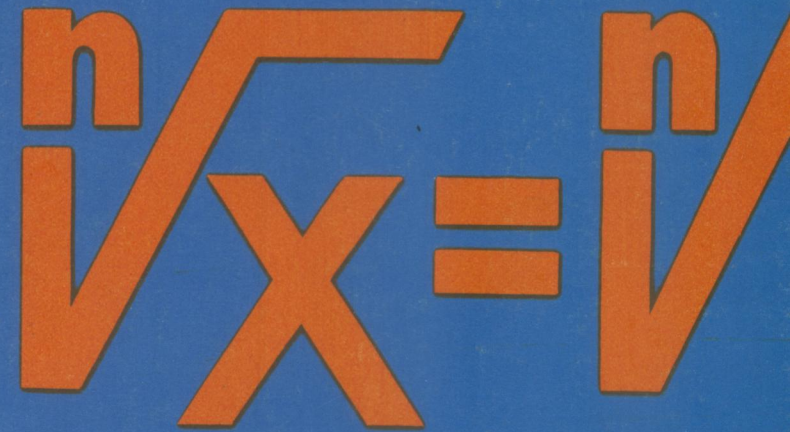


R. LEITNER, W. ŻAKOWSKI

# MATEMATYKA

dla kandydatów  
na wyższe  
uczelnie techniczne

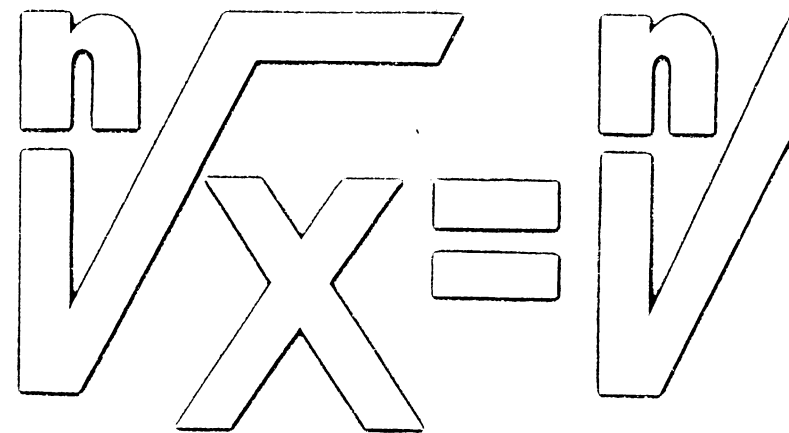


PLANIMETRIA. TRYGONOMETRIA. STEREOMETRIA.  
GEOMETRIA ANALITYCZNA.  
RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA.

R. LEITNER, W. ŻAKOWSKI

# MATEMATYKA

dla kandydatów  
na wyższe  
uczelnie techniczne



PLANIMETRIA. TRYGNOMETRIA. STEREOMETRIA.  
GEOMETRIA ANALITYCZNA.  
RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA.

ROMAN LEITNER, WOJCIECH ŻAKOWSKI

# MATEMATYKA

DLA KANDYDATÓW  
NA WYŻSZE UCZELNIE TECHNICZNE

CZĘŚĆ II

WYDANIE CZTERNASTE



WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE  
WARSZAWA 1989

Opiniodawca prof. dr Wacław Pawełski  
 Redaktor naukowy doc. dr hab. Tadeusz Stanisławski  
 Redaktor techniczny Jacek Dubiel  
 Redaktor WNT mgr Małgorzata Rajwacka-Jachymek

53(022)

Książka zawiera zwięzły wykład geometrii, trygonometrii analitycznej i rachunku prawdopodobieństwa poparty licznymi przykładami oraz zadaniami do samodzielnego rozwiązania.

Książka jest przeznaczona dla osób pragnących powtórzyć matematykę w zakresie szkoły średniej bądź też uzupełnić posiadane wiadomości z tego zakresu, głównie zaś dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne.

Książka jest zalecana do uczniowskich i nauczycielskich bibliotek techników i liceów.

1965 — wydanie pierwsze

1970 — wydanie szóste zmienione

© Copyright by Wydawnictwa Naukowo-Techniczne  
 Warszawa 1965–1989  
 All rights reserved  
 Printed in Poland

ISBN 83-204-1027-4 całość

ISBN 83-204-1029-0 cz. II

## SPIS TREŚCI

|                      |   |
|----------------------|---|
| Od Autorów . . . . . | 7 |
|----------------------|---|

## PLANIMETRIA

|                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Rozdział XI. Aksjomaty planimetrii . . . . .</b>                         | <b>9</b>  |
| 71. Wiadomości wstępne . . . . .                                            | 9         |
| 72. Pojęcia podstawowe geometrii . . . . .                                  | 13        |
| 73. Punkty, proste i odcinki na płaszczyźnie . . . . .                      | 17        |
| 74. Rzut równoległy na prostą . . . . .                                     | 25        |
| 75. Okrąg i koło. Wnętrze, zewnątrz i brzeg figury . . . . .                | 27        |
| 76. Kąt. Wielokąty . . . . .                                                | 35        |
| Odpowiedzi do rozdziału XI . . . . .                                        | 40        |
| <b>Rozdział XII. Przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie . . . . .</b> | <b>42</b> |
| 77. Izometria. Symetria osiowa . . . . .                                    | 42        |
| 78. Proste prostopadłe . . . . .                                            | 48        |
| 79. Figury przystające . . . . .                                            | 58        |
| 80. Symetria środkowa . . . . .                                             | 64        |
| 81. Wektory i translacje . . . . .                                          | 69        |
| 82. Obroty i kąty skierowane . . . . .                                      | 78        |
| 83. Rodzaje izometrii . . . . .                                             | 85        |
| <b>Rozdział XIII. Własności miarowe figur płaskich . . . . .</b>            | <b>88</b> |
| 84. Twierdzenie Talesa . . . . .                                            | 88        |
| 85. Jednokładność . . . . .                                                 | 96        |
| 86. Figury podobne . . . . .                                                | 97        |
| 87. Twierdzenia o trójkącie . . . . .                                       | 100       |
| 88. Twierdzenia o okręgu . . . . .                                          | 108       |
| 89. Pole figury i długość krzywej . . . . .                                 | 113       |
| 90. Zadania konstrukcyjne . . . . .                                         | 124       |
| 91. Zadania rachunkowe z planimetrii . . . . .                              | 135       |
| Odpowiedzi do rozdziału XIII . . . . .                                      | 141       |

## TRYGONOMETRIA

|                                                                                           |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Rozdział XIV. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego . . . . .</b>                      | <b>143</b> |
| 92. Określenie funkcji trygonometrycznych kąta ostrego . . . . .                          | 143        |
| 93. Funkcje i kofunkcje. Tablice funkcji trygonometrycznych . . . . .                     | 150        |
| 94. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych. Logarytmy funkcji trygonometrycznych . . . . . | 151        |
| 95. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego . . . . .        | 157        |

|                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 96. Wyznaczenie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ i $72^\circ$ | 161 |
| 97. Koło trygonometryczne. Przebieg funkcji trygonometrycznych w zakresie kątów ostrych                         | 162 |
| Odpowiedzi do rozdziału XIV                                                                                     | 165 |
| <b>Rozdział XV. Funkcje trygonometryczne kąta skierowanego</b>                                                  | 168 |
| 98. Kąt skierowany na płaszczyźnie zorientowanej                                                                | 168 |
| 99. Określenie funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego                                                     | 176 |
| 100. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta skierowanego                                  | 178 |
| 101. Okresowość funkcji trygonometrycznych                                                                      | 180 |
| 102. Wzory redukcyjne                                                                                           | 183 |
| 103. Koło trygonometryczne i przebieg funkcji trygonometrycznych w zakresie dowolnych kątów skierowanych        | 189 |
| 104. Wykresy funkcji trygonometrycznych                                                                         | 192 |
| 105. Tożsamości trygonometryczne                                                                                | 195 |
| 106. Tożsamości trygonometryczne (ciąg dalszy)                                                                  | 202 |
| 107. Równania trygonometryczne                                                                                  | 204 |
| Odpowiedzi do rozdziału XV                                                                                      | 217 |
| <b>Rozdział XVI. Rozwiązywanie trójkątów dowolnych</b>                                                          | 223 |
| 108. Twierdzenia sinusów, cosinusów i tangensów                                                                 | 223 |
| 109. Wzory na pole trójkąta, promień koła wpisanego, promień koła opisanego i promienie kół dopisanych          | 232 |
| 110. Zastosowania trygonometrii do planimetrii                                                                  | 237 |
| Odpowiedzi do rozdziału XVI                                                                                     | 244 |
| <b>Rozdział XVII. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej</b>                                            | 246 |
| 111. Łukowa miara kąta. Inne miary kąta                                                                         | 246 |
| 112. Określenie funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej                                                | 250 |
| 113. Funkcje cyklometryczne                                                                                     | 253 |
| Odpowiedzi do rozdziału XVII                                                                                    | 257 |
| Alfabet grecki                                                                                                  | 258 |
| Tablica I. Mantysy logarytmów                                                                                   | 259 |
| Tablica II. Funkcje trygonometryczne                                                                            | 261 |
| Tablica III. Logarytmy funkcji trygonometrycznych                                                               | 262 |

## STEREOMETRIA

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Rozdział XVIII. Aksjomaty stereometrii</b>              | 263 |
| 114. Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni            | 263 |
| 115. Sfera i kula. Wnętrze, zewnątrz i brzeg figury. Bryła | 267 |
| 116. Kąt dwuścienny. Kąt wielościenny. Wielościan          | 269 |
| 117. Wektory i translacje w przestrzeni                    | 273 |
| 118. Rzut równoległy na płaszczyznę                        | 276 |
| 119. Prostopadłość w przestrzeni                           | 277 |
| 120. Kreślenie figur w rzucie równoległym                  | 282 |
| Odpowiedzi do rozdziału XVIII                              | 287 |

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Rozdział XIX. Przekształcenia geometryczne w przestrzeni</b> | 288 |
| 121. Izometria i przystawianie figur w przestrzeni              | 288 |
| 122. Symetrie w przestrzeni                                     | 289 |
| 123. Obrót przestrzeni dookoła osi                              | 291 |
| 124. Rodzaje izometrii                                          | 293 |
| 125. Jednokładność i podobieństwo w przestrzeni                 | 294 |
| 126. Bryły i ich rodzaje                                        | 295 |

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| <b>Rozdział XX. Objętość bryły i pole powierzchni</b> | 305 |
| 127. Pojęcie objętości                                | 305 |
| 128. Objętość graniastosłupa i walca                  | 308 |
| 129. Objętość ostrosłupa i stożka                     | 310 |
| 130. Pole powierzchni wielościanu                     | 315 |
| 131. Pole powierzchni walca i stożka                  | 325 |
| 132. Pole powierzchni kuli                            | 330 |
| 133. Objętość kuli                                    | 332 |
| 134. Zastosowania trygonometrii do stereometrii       | 334 |
| Odpowiedzi do rozdziału XX                            | 353 |

## GEOMETRIA ANALITYCZNA

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Rozdział XXI. Geometria analityczna na płaszczyźnie</b>                      | 360 |
| 135. Współrzędne punktu i wektora na płaszczyźnie                               | 360 |
| 136. Równanie linii prostej na płaszczyźnie                                     | 373 |
| 137. Przekształcenia płaszczyzny w ujęciu analitycznym                          | 383 |
| 138. Linie krzywe drugiego stopnia                                              | 387 |
| 139. Ogniska stożkowych                                                         | 397 |
| Odpowiedzi do rozdziału XXI                                                     | 403 |
| <b>Rozdział XXII. Geometria analityczna w przestrzeni</b>                       | 406 |
| 140. Współrzędne punktu i współrzędne wektora w przestrzeni                     | 406 |
| 141. Działania na wektorach i działania na współrzędnych wektorów w przestrzeni | 410 |
| Odpowiedzi do rozdziału XXII                                                    | 415 |

## RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Rozdział XXIII. Rachunek prawdopodobieństwa</b>               | 416 |
| 142. Prawdopodobieństwo statystyczne                             | 416 |
| 143. Zdarzenia losowe                                            | 417 |
| 144. Relacje między zdarzeniami                                  | 420 |
| 145. Pojęcie prawdopodobieństwa                                  | 422 |
| 146. Własności prawdopodobieństwa                                | 424 |
| 147. Przykłady definiowania prawdopodobieństw                    | 426 |
| 148. Elementy kombinatoryki                                      | 429 |
| 149. Zastosowanie kombinatoryki do obliczania prawdopodobieństwa | 432 |

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| 150. Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .         | 435 |
| 151. Zdarzenia niezależne . . . . .                 | 439 |
| 152. Próby niezależne . . . . .                     | 440 |
| 153. Rozkład dwumianowy . . . . .                   | 444 |
| 154. Zmienna losowa . . . . .                       | 447 |
| 155. Wartość oczekiwana . . . . .                   | 448 |
| 156. Wariancja . . . . .                            | 449 |
| 157. O prawie wielkich liczb Bernoulliego . . . . . | 451 |
| Odpowiedzi do rozdziału XXIII . . . . .             | 452 |
| Zadania z różnych działów . . . . .                 | 455 |
| Odpowiedzi do zadań z różnych działów . . . . .     | 458 |
| Skorowidz . . . . .                                 | 459 |

## OD AUTORÓW

*Książka ta powstała na skutek dużego zapotrzebowania na podręcznik, który by w zwięzłej formie streszczał matematykę wykładaną w szkole średniej, oddając usługi osobom pragnącym bądź poznać matematykę elementarną, bądź powtórzyć i utrwalić wiadomości uprzednio nabyte. Dotyczy to w szczególności kandydatów na wyższe uczelnie techniczne.*

*Pierwsze wydanie tej książki ukazało się w 1965 r. Wydanie obecne jest dostosowane do nowego programu matematyki w szkołach średnich. Książka obejmuje cały materiał, który może być wymagany od kandydatów na wyższe uczelnie techniczne.*

*Autorzy wyrażają serdeczne podziękowanie panu drowi Wiesławowi Szlenkowi i panu drowi Maciejowi Bryńskiemu za pomoc w wyborze aksjomatyki i układu twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa i stereometrii, a panu mgrowi Januszowi Zucharskiemu za współpracę przy redagowaniu rozdziału „Rachunek prawdopodobieństwa”.*

*Autorzy dziękują także panu drowi Tadeuszowi Stanisłowi za cenne uwagi, z których skorzystano przy dwunastym wydaniu tej książki.*

*Posługując się tą książką, Czytelnik powinien wykazać aktywność, tzn. mieć pod ręką brulion i w nim pisać, rysować, rachować, jednym słowem wykonywać wszystkie czynności związane z danym tekstem. Tekst należy czytać krytycznie, tj. zadawać sobie pytanie: dlaczego tak jest, skąd to wynika itp. Nadto należy samodzielnie rozwiązać znaczną liczbę zadań.*

*Ze względów technicznych książka jest wydawana w dwóch częściach, z których pierwsza zawiera algebrę i elementy analizy matematycznej, druga zaś planimetrię, stereometrię, trygonometrię, geometrię analityczną i rachunek prawdopodobieństwa.*

Warszawa, lipiec 1977 r.

ROMAN LEITNER  
WOJCIECH ŻAKOWSKI

## Rozdział XI

## AKSJOMATY PLANIMETRII

## 71. Wiadomości wstępne

**Przestrzeń fizyczna i przestrzeń geometryczna.** Świat materialny, który nas otacza i w którym żyjemy, znajduje się w przestrzeni fizycznej. Poznanie praw tego świata jest od wieków głównym zadaniem poznawczym człowieka. Jest to zadanie ogromne i zajmują się nim różne nauki.

Przestrzeń fizyczna jest związana z materią i czasem. Poszczególne części przestrzeni, wypełnione w różny sposób materią, nazywamy bryłami fizycznymi. Bryły fizyczne pozostają w ruchu i ulegają zmianom w czasie. Dla opisu wielkości tych brył, ich postaci i wzajemnego położenia potrzebne są odpowiednie pojęcia i terminy — formy myślenia i wypowiedzania się. Zadaniem geometrii jest dostarczenie tych form.

Tworzymy więc abstrakcyjną przestrzeń geometryczną, wolną od materii i niezmienną w czasie. Przestrzeń taka jest tworem umysłu ludzkiego i dlatego geometria jest nauką abstrakcyjną i rozumową.

**Przedmiot geometrii.** Przestrzeń geometryczna jest zbiorem punktów geometrycznych. Dowolny zbiór punktów geometrycznych, czyli każdą część przestrzeni geometrycznej, nazywamy *figurą geometryczną*. Przedmiotem geometrii są figury geometryczne. Figury geometryczne określamy za pomocą definicji. *Definicja* jest to wypowiedź, w której zespół elementów już znanych wyodrębnia się jako pewną nową całość i nadaje jej nazwę. Np., wiedząc co to jest kąt, obszar kąta i oś symetrii kąta, tworzymy pojęcie „półprosta mająca początek w wierzchołku kąta, położona na osi symetrii kąta i zawarta w obszarze kąta” i nadajemy temu pojęciu nazwę „dwusieczna kąta”. Wypowiedź wyjaśniająca co oznacza termin „dwusieczna kąta” stanowi definicję tego pojęcia. Definicja — to stworzenie nowego pojęcia i nadanie mu nazwy.

Figura geometryczna może mieć własności, o których nie było mowy w definicji tej figury. Np. dwusieczna kąta ma następujące własności:

- każdy punkt dwusiecznej jest równo odległy od obu ramion kąta;
- trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie;
- dwusieczna w trójkącie dzieli przeciwległy bok na części proporcjonalne do pozostałych dwóch boków.

Wypowiedzi tego rodzaju są twierdzeniami. Każda z powyższych trzech wypowiedzi o dwusiecznej stanowi pewne *twierdzenie*. Powstaje pytanie: Czy twierdzenia te są prawdziwe i jak się o tym upewnić? Dowód twierdzenia geometrycznego nie może polegać na kreśleniu i mierzeniu, gdyż twierdzenia geometryczne dotyczą tworów abstrakcyjnych (myślowych) i dowód musi być rozumowy. Przy dowodzeniu twierdzenia geometrycznego należy korzystać z twierdzeń uprzednio udowodnionych i z logiki.

Geometria jest zbudowana z definicji i twierdzeń.

**Powstanie i rozwój geometrii.** W starożytnym Egipcie, gdzie wznoszono potężne budowle, sypano tamy i nawadniano grunta, istniała wiedza praktyczna stosowana przy wykonywaniu różnych pomiarów. Tę wiedzę przejęli od Egipcjan Grecy i nazwali ją geometrią od słów: *ge* — ziemia, *metreo* — mierzę. Dostrzegając w geometrii logiczne powiązania, zaczęli uprawiać ją jako naukę. W VI wieku p.n.e. Pitagoras, a w IV wieku szkoła Platona i Eudoxos wzbogacili zbiór znanych prawd geometrycznych. Wszystkie te badania i odkrycia zebrał w III wieku p.n.e. Euklides i w dziele *Elementy* dał pierwszy wykład geometrii, przedstawiając ją jako naukę abstrakcyjną i dedukcyjną.

**Geometria jako nauka dedukcyjna.** Euklides przyjął bez dowodu kilkanaście bardzo oczywistych twierdzeń, nazwał je *aksjomatami* czyli *pewnikami* i z nich wyprowadził (*dedukował*) wszystkie pozostałe twierdzenia geometrii.

Nauka, której twierdzenia wyprowadza się drogą logicznego rozumowania z niewielkiej liczby aksjomatów przyjętych bez dowodu, nazywa się *nauką dedukcyjną*. Geometria jest nauką dedukcyjną. Dowodząc jakiegoś twierdzenia geometrii, powołujemy się na aksjomaty i twierdzenia poprzednio udowodnione. Aksjomatów nie udowadnia się, lecz przyjmuje się je jako podstawę całej geometrii.

Nie należy jednak sądzić, aby aksjomaty były jakimiś prawdami niewzruszonymi i niewątpliwymi. Wprawdzie nie zauważono sprzeczności między aksjomatami geometrii a obserwacjami i eksperymentami wykonywanymi w przestrzeni fizycznej, ale aksjomaty dotyczą faktów nie dających się rozstrzygnąć bezpośrednio drogą doświadczenia. Np. żadnym doświadczeniem nie można rozstrzygnąć czy przez punkt leżący poza daną prostą przechodzi tylko jedna prosta równoległa do danej prostej. Euklides przyjął to jako pewnik i dziś pewnik ten nazywamy *pewnikiem Euklidesa*, a geometrię zawierającą ten pewnik geometrią *euklidesową*. Okazało się jednak, że można zbudować geometrię, która zamiast pewnika Euklidesa zawiera pewnik sprzeczny z pewnikiem Euklidesa. Taką geometrię nazywamy *nienieuklidesową*. Geometrie nienieuklidesowe i ich zastosowania są przedmiotem badań współczesnej nauki.

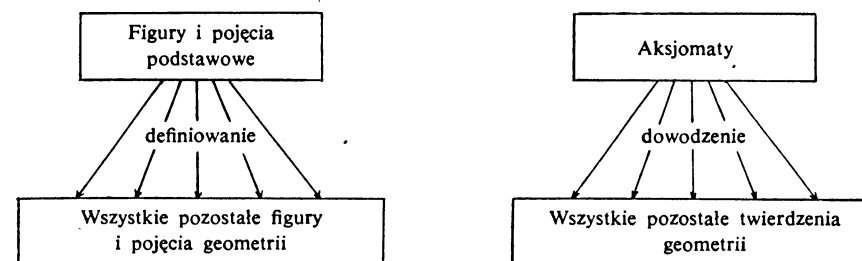
Istnieje więc możliwość przyjęcia takich lub innych aksjomatów. Przyjmujemy

te aksjomaty, które uważamy za najprostsze i najdogodniejsze, aby z nich wyprowadzić wszystkie pozostałe twierdzenia geometrii.

Podobnie ma się rzecz z figurami geometrycznymi. Najprostsze z nich przyjmujemy bez definicji jako *figury podstawowe* czyli *pierwotne*. Są to: punkt, prosta i płaszczyzna. Tych figur nie definiuje się. Natomiast wszystkie pozostałe figury definiuje się za pomocą figur podstawowych i figur uprzednio zdefiniowanych.

Figury podstawowe można sobie wyobrazić w dowolny sposób, byle było to zgodne z przyjętymi pewnikami. Pewniki stanowią więc pośredni opis figur podstawowych.

Strukturę geometrii przedstawia następujący schemat



Miedzy lewą i prawą stroną powyższego schematu istnieją powiązania:

- aksjomaty stanowią pośredni opis pojęć podstawowych;
- w dowodzie korzystamy z definicji;
- w definicji korzystamy z twierdzeń i aksjomatów.

**Zupełność systemu aksjomatów.** System aksjomatów powinien być *zupełny*, tj. powinien zawierać wszystkie te twierdzenia geometrii, które przyjmujemy bez dowodu. System aksjomatów powinien też być *niezależny*, tj. żaden aksjomat nie powinien być wnioskiem logicznym z innych aksjomatów. Podanie takiego systemu aksjomatów nie było zadaniem łatwym. Euklides podał za mało aksjomatów i niektóre z nich były między sobą zależne. W XIX wieku wielu znakomitych badaczy starało się usunąć te braki; w tym czasie rosyjski matematyk *Łobaczewski* zbudował pierwszą geometrię nienieuklidesową. Uwieńczeniem tych prac było dzieło niemieckiego matematyka *Hilberta* pt. *Podstawy geometrii*, które zawiera pierwszy zupełny system aksjomatów. Można powiedzieć, że dopiero od tego czasu wiemy dokładnie na jakich podstawach spoczywa cały gmach naszej geometrii.

**Podział geometrii.** Geometria dzieli się na *planimetrię*, tj. geometrię płaszczyzny, i *stereometrię*, tj. geometrię przestrzeni. Niezależnie od tego podziału wyróżnia się osobny dział zwany *trygonometrią*, a poświęcony związkowi między bokami i kątami trójkątów. Mamy tu na myśli zwykle, płaskie trójkąty; aby to podkreślić, mówi się czasem *trygonometria płaska*. Znajduje ona zastosowanie zarówno w planimetrii jak i w stereometrii. Trygonometrii (płaskiej) poświęcamy rozdziały XIV-XVII.

Oprócz trygonometrii płaskiej istnieje *trygonometria sferyczna*, która opisuje związki między bokami i kątami *trójkątów sferycznych*, tj. figur utworzonych przez łuki okręgów na sferze (tj. na powierzchni kuli). Trygonometria sferyczna nie wchodzi w zakres programu szkolnego i nie będziemy jej tu przedstawiać.

Osobny dział stanowi *geometria analityczna*, która posługuje się metodą współrzędnych. Przy tej metodzie każdy punkt płaszczyzny — to pewna para liczb, a każda linia — to równanie o dwóch zmiennych. Punkt leży na linii, jeśli jego współrzędne spełniają równanie tej linii. Geometria analityczna zawarta jest w rozdziałach XXI i XXII.

**Geometria jako przedmiot szkolny.** Wykład geometrii może być oparty na takim lub innym systemie aksjomatów. Może się zdarzyć, że to, co w jednym podręczniku jest aksjomatem, będzie dowodzone w drugim podręczniku jako twierdzenie. Zredagowanie poszczególnych aksjomatów i ustawienie ich w system może być w każdej książce inne. Oto zestawienie liczby aksjomatów w niektórych podręcznikach:

|   | Autor i rok wydania                     | Planimetria | Stereometria |
|---|-----------------------------------------|-------------|--------------|
| 1 | A. Łomnicki 1920 (aksjomatyka Hilberta) | 16          | 5            |
| 2 | B. Iwaszkiewicz 1949                    | 14          | 4            |
| 3 | Z. Krygowska i J. Maroszkowa 1966       | 10          | —            |
| 4 | W. Janowski 1969                        | 15          | —            |
| 5 | M. Bryński 1970                         | —           | 6            |

W niniejszej książce opieramy się na aksjomatyce podręczników 3 i 5.

Podręczniki geometrii mogą się też różnić kolejnością definicji i twierdzeń. Na skutek innej kolejności ta sama figura może być definiowana w różnych podręcznikach w odmienny sposób, a dowód pewnego twierdzenia, który jest poprawny w układzie jednej książki, może być nie do przyjęcia w układzie innej książki.

### Pytania

(Poprawność odpowiedzi sprawdzać przez porównanie z tekstem książki)

1. Co to jest pewnik? Co to jest twierdzenie?
2. Co to jest figura podstawowa, pojęcie podstawowe?
3. Co to jest definicja? Co to jest dowód?
4. Dlaczego w geometrii nie można dowodu zastąpić sprawdzeniem opartym na pomiarach?
5. Jaką nauką jest geometria?
6. Jaką naukę nazywamy dedukcyjną?

## 72. Pojęcia podstawowe geometrii

**Zbiór** jest jednym z podstawowych pojęć matematyki. Zamiast zbiór mówi się też *mnogość*. Przykładami zbiorów są:

- zbiór wszystkich punktów danej prostej,
- zbiór wszystkich punktów danej płaszczyzny,
- zbiór wszystkich punktów przestrzeni,
- zbiór wszystkich prostych na danej płaszczyźnie,
- zbiór wszystkich okręgów na danej płaszczyźnie.

Przedmioty należące do danego zbioru nazywamy *elementami* tego zbioru. Zbiór, którego wszystkimi elementami są przedmioty  $a_1, \dots, a_n$  oznaczamy

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

Np. zbiór wszystkich wierzchołków kwadratu  $ABCD$  zapiszemy

$$\{A, B, C, D\}$$

Zbiór może być oznaczony jedną literą, np. prosta  $l$ , okrąg  $c$ , płaszczyzna  $\Sigma$ , przestrzeń  $\Omega$ .

Zdanie orzekające, że element  $x$  należy do zbioru  $Z$  zapisujemy

$$x \in Z$$

Relacja *należy do* jest pojęciem podstawowym teorii mnogości. Zamiast „ $x$  należy do  $Z$ ” mówimy też „zbiór  $Z$  zawiera element  $x$ ”.

Zdanie orzekające, że element  $x$  *nie należy* do zbioru  $Z$  zapisujemy

$$x \notin Z$$

Zapis ten odczytujemy też: „zbiór  $Z$  nie zawiera elementu  $x$ ”.

Zamiast „zbiór zbiorów” mówi się zwykle „rodzina zbiorów”, np. rodzina prostych.

**Suma zbiorów.** Niech będą dane dwa zbiory  $A, B$ . *Sumą zbiorów  $A$  i  $B$*  nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów zbioru  $A$  i wszystkich elementów zbioru  $B$ . Sumę zbiorów  $A$  i  $B$  oznaczamy

$$A \cup B$$

Jeśli  $x \in A \cup B$ , to  $x \in A$  lub  $x \in B$ .

**Przykład.** Jeśli proste  $l, p$  uważamy za zbiory punktów, to  $l \cup p$  oznacza zbiór punktów, z których każdy należy do  $l$  lub do  $p$ . Do zbioru tego zaliczamy także punkt wspólny prostych  $l, p$  (punkt przecięcia się), o ile taki punkt istnieje.

**Iloczyn zbiorów.** *Iloczynem* zbiorów  $A, B$  (także: *częścią wspólną* zbiorów  $A, B$ ) nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów o tej własności, że każdy z nich należy do  $A$  i do  $B$ . Iloczyn zbiorów  $A, B$  oznaczamy

$$A \cap B$$

Jeśli  $x \in A \cap B$ , to  $x \in A$  i  $x \in B$ .

Iloczyn zbiorów  $A, B$  jest zbiorem:

- *pustym*, jeśli  $A, B$  nie mają elementów wspólnych,
- *jednoelementowym*, jeśli  $A, B$  mają tylko jeden element wspólny,
- *skończonym*, jeśli  $A, B$  mają skończenie wiele elementów wspólnych,

— nieskończonym, jeśli  $A, B$  mają nieskończenie wiele elementów wspólnych,  
 — identycznym ze zbiorem  $A$  i ze zbiorem  $B$ , jeśli  $A$  i  $B$  oznaczają jeden i ten sam zbiór.

Zbiór *pusty*, tj. zbiór nie zawierający żadnego elementu, oznaczamy  $\emptyset$ .

**Zawieranie się (inkluzja) zbiorów.** Jeśli każdy element zbioru  $A$  jest elementem zbioru  $B$ , to mówimy, że zbiór  $A$  zawiera się w zbiorze  $B$ , co zapisujemy

$$A \subset B$$

Wówczas zbiór  $A$  nazywamy *podzbiorem* zbioru  $B$ , zaś  $B$  — *nadzbiorem* zbioru  $A$ .

**Przykład.** Niech  $l$  oznacza pewną prostą, zaś  $u$  — odcinek tej prostej. Wówczas każdy punkt odcinka  $u$  jest punktem prostej  $l$ , czyli  $u \subset l$ . Odcinek  $u$  jest podzbiorem prostej  $l$  (zawiera się w prostej  $l$ ).

Zaprzeczenie zdania  $A \subset B$  zapisujemy

$$A \not\subset B$$

i czytamy:  $A$  nie zawiera się w  $B$ .

Jeśli  $A \subset B$  oraz  $B \subset A$ , to  $A = B$  ( $A$  i  $B$  — to jeden i ten sam zbiór).

Jeśli  $A \subset B$  oraz  $B \not\subset A$ , to  $A$  nazywamy *podzbiorem właściwym* zbioru  $B$ .

**Uporządkowanie zbioru<sup>1)</sup>.** Definicja 72.1 (uporządkowania). Zbiór nazywamy *uporządkowanym*, gdy w zbiorze tym została określona *relacja porządkująca*, zwana *poprzedzaniem*, tj. gdy dla każdego dwóch elementów tego zbioru wiadomo co oznacza powiedzenie, że jeden element poprzedza drugi i gdy relacja ta posiada następujące trzy własności:

- przechodniość: dla dowolnych trzech elementów  $a, b, c$  tego zbioru jeśli  $a$  poprzedza  $b$  i  $b$  poprzedza  $c$ , to  $a$  poprzedza  $c$ ;
- antysymetria: jeśli  $a$  poprzedza  $b$ , to  $b$  nie poprzedza  $a$ ;
- spójność: jeśli  $a \neq b$ , to  $a$  poprzedza  $b$  lub  $b$  poprzedza  $a$ .

Są to ogólne własności poprzedzania, w ramach których dla danego zbioru relacja ta powinna być określona. Np. dla zbioru liczb rzeczywistych relacją taką jest relacja mniejszości  $x < y$ .

**Definicja 72.2** (pojęć „leży między” i „następuje”). Jeśli  $a$  poprzedza  $b$  oraz  $b$  poprzedza  $c$ , to mówimy, że  $b$  *leży między*  $a$  i  $c$ . Jeśli  $a$  poprzedza  $b$ , to mówimy, że  $b$  *następuje* po  $a$ .

**Twierdzenie.** Jeśli  $a, b, c$  są trzema różnymi elementami zbioru uporządkowanego, to jeden i tylko jeden z nich leży między pozostałymi.

**Odwzorowanie** — jest podstawowym pojęciem matematyki.

Niech  $X$  i  $Y$  będą dwoma zbiorami. Jeśli każdemu elementowi zbioru  $X$  został jednoznacznie przyporządkowany pewien element zbioru  $Y$ , to mówimy, że zostało

określone odwzorowanie zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  (72.1)

Jeśli odwzorowanie zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  oznaczmy literą

$f$

zaś dowolnie wybrany element zbioru  $X$  oznaczmy literą  $x$ , to

$$f(x)$$

oznacza ten element zbioru  $Y$ , który został przyporządkowany elementowi  $x$ . Element  $f(x)$  nazywamy *obrazem elementu  $x$*  w odwzorowaniu  $f$ . Zbiór  $W$  wszystkich elementów  $f(x)$  nazywamy *obrazem zbioru  $X$*  w odwzorowaniu  $f$  i oznaczamy

$$W = f(X)$$

Mówimy też, że  $f$  stanowi

odwzorowanie zbioru  $X$  na zbiór  $W$  (72.2)

**Uwaga.** W wyrażeniach (72.1) i (72.2) celowo użyto dwóch różnych przyimków: „w” i „na”. Powiedzenie „w zbiór  $Y$ ” należy rozumieć jako „w zbiór  $Y$  ewentualnie w podzbiór zbioru  $Y$ ”. Natomiast powiedzenie „na zbiór  $W$ ” należy rozumieć jako „na cały zbiór  $W$ ”.

Obok słowa „odwzorowanie” używamy słów „funkcja” i „przekształcenie”. Słowa „funkcja” używamy, gdy  $Y$  jest zbiorem liczb; wówczas  $x$  nazywamy *argumentem* funkcji,  $X$  — *dziedziną* funkcji,  $f(x)$  — *wartością funkcji* dla argumentu  $x$ , zaś zbiór  $W$  — *przeciwdziedziną* funkcji. Słowa „przekształcenie” używamy w geometrii, gdy  $X$  i  $Y$  są zbiorami punktów.

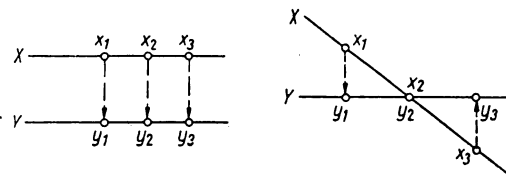
Jeśli przy przekształceniu zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  istnieje w zbiorze  $X$  element  $x_0$ , który sam jest swym obrazem w tym przekształceniu

$$x_0 = f(x_0)$$

to element taki nazywamy *punktem stałym* tego przekształcenia (także: *punktem niezmienniczym*).

Przekształcenie może nie mieć punktów stałych, a może mieć ich więcej niż jeden. Jeśli przy przekształceniu zbioru  $X$  każdy punkt tego zbioru jest punktem stałym, to przekształcenie takie nazywamy *przekształceniem tożsamościowym* zbioru  $X$ .

**Przykład.** Niech będą dane na płaszczyźnie dwie proste  $X, Y$ . Są to dwa zbiory punktów. Każdemu punktowi  $x$  prostej  $X$  niech będzie przyporządkowany rzut prostokątny tego punktu na prostą  $Y$ . Przekształcenie polega tu na rzutowaniu punktów prostej  $X$  na prostą  $Y$ . Jeśli proste  $X, Y$  przecinają się, to punkt przecięcia jest punktem stałym tego przekształcenia (rys. 72-1).



Rys. 72-1

<sup>1)</sup> Istnieje parę odmian tego pojęcia; zbiór może być: uporządkowany, quasi-uporządkowany, liniowo uporządkowany, dobrze uporządkowany (zob. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN 1968) lub dokładnie uporządkowany (Z. Krygowska i J. Marosz-kowa, *Geometria*, PZWS 1969). Tu korzystamy z tej ostatniej odmiany, opuszczając słowo „dokładnie”, gdyż innych odmian tego pojęcia nie będziemy wprowadzać.

**Punkt, prosta, płaszczyzna** są to w geometrii figury podstawowe, których się nie definiuje; ich własności wynikają z aksjomatów. Zbiór wszystkich punktów nazywamy *przestrzenią*. Płaszczyzna i prosta są zbiorami punktów, a więc są podzbiorami przestrzeni.

**Odległość** jest pojęciem podstawowym w geometrii. Odległość może być określana w różnego rodzaju zbiorach, np. w zbiorach punktów, w zbiorach funkcji, w zbiorach ciągów liczbowych itp. Jest to funkcja, która każdej parze elementów  $X, Y$  danego zbioru<sup>1)</sup> przyporządkowuje jednoznacznie liczbę zwaną odległością tych elementów

$$\text{odl}(X, Y)$$

i spełniającą następujące warunki:

1.  $\text{odl}(X, Y) \geq 0$   
(odległość jest nieujemna);
2.  $\text{odl}(X, Y) = \text{odl}(Y, X)$   
(odległość  $X$  od  $Y$  jest równa odległości  $Y$  od  $X$ , dlatego mówi się o *wzajemnej odległości* dwóch elementów; własność tę wyrażamy mówiąc, że odległość jest funkcją *symetryczną*);
3.  $\text{odl}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$  (72.3)  
(odległość elementów  $X, Y$  jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  i  $Y$  oznaczają jeden i ten sam element);
4.  $\text{odl}(X, Y) + \text{odl}(Y, Z) \geq \text{odl}(X, Z)$  (72.4)  
(jest to nierówność nazywana „prawem trójkąta”).

Powyższe warunki wyrażają tylko ogólne własności, które powinna mieć odległość. W ramach tych warunków definicja odległości może być dość dowolna.

**Przykład.** *Odległością sferyczną* dwóch punktów na sferze (tj. na powierzchni kulistej) nazywamy długość łączącego te punkty łuku okręgu leżącego na sferze i mającego środek w środku sfery, przy czym z dwóch łuków, na jakie te dwa punkty dzielą okrąg, bierze się ten, którego kąt środkowy jest wypukły. Odległość sferyczna jest stosowana w komunikacji transoceanicznej. Odległość ta różni się od zwykłej odległości mierzonej wzdłuż odcinka. W pewnych okolicznościach może się okazać pożyteczną jeszcze inna odległość, jednak każda odległość winna spełniać warunki 1—4.

W dalszym ciągu za pomocą aksjomatów, wprowadzimy odległość prostoliniową, którą będziemy nazywać krótko odległością.

#### Pytania i zadania

1. Wymienić pojęcia podstawowe i figury podstawowe geometrii.
2. Co to jest: zbiór, suma zbiorów, iloczyn zbiorów, zawieranie się zbiorów?

<sup>1)</sup> Że względu na późniejsze zastosowania formułowanych tu związków oznaczyliśmy elementy dużymi literami  $X, Y$ ; tak bowiem będziemy później oznaczać punkty.

3. Co to jest uporządkowanie zbioru?
4. Oznaczając znakiem  $\rightarrow$  relację poprzedzania, zapisać symbolicznie trzy własności tej relacji (odpowiedź str. 40).
5. Na czym polega odwzorowanie zbioru w zbiór?
6. Na czym polega odwzorowanie zbioru na zbiór?
7. Jak nazywamy w geometrii odwzorowanie zbioru punktów w zbiór punktów?
8. Co to jest punkt stały przekształcenia?
9. Kiedy przekształcenie nazywamy tożsamościowym?
10. Wymienić ogólne własności odległości.
11. Przy jakim położeniu punktów  $X, Y, Z$  na sferze ich odległości sferyczne spełniają równość  $\text{odl}(X, Y) + \text{odl}(Y, Z) = \text{odl}(X, Z)$ ?

### 73. Punkty, proste i odcinki na płaszczyźnie

**Przedmiot planimetrii.** Przestrzeń jest zbiorem wszystkich punktów. Przestrzeń będziemy oznaczać literą  $\Omega^1$ ). W przestrzeni zawierają się wszelkie inne zbiory punktów, a wśród nich wszystkie płaszczyzny. W rozdziałach XI—XIII mamy zajmować się planimetrią, czyli geometrią płaszczyzny. Dowolny zbiór punktów zawarty w płaszczyźnie nazywamy *figurą płaską*. Będziemy się zajmować figurami płaskimi zawartymi w jakiejś jednej płaszczyźnie. Obierzmy więc jakąś płaszczyznę i oznaczmy ją  $\Sigma^1$ ).

W odniesieniu do płaszczyzny  $\Sigma$  i figur w niej zawartych będziemy wypowiadać aksjomaty i definicje, formułować twierdzenia, przeprowadzać dowody i rozwiązywać zadania, jednym słowem: zbudujemy planimetrię na płaszczyźnie  $\Sigma$ .

Umowa: *W planimetrii* (rozd. XI — XIII) *ograniczamy wszelkie rozważania do jednej płaszczyzny i figur w niej zawartych.*

Zgodnie z tą umową, wypowiadając np. zdanie „przez każdy punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych” będziemy je rozumieli: „Przez każdy punkt płaszczyzny  $\Sigma$  przechodzi nieskończenie wiele prostych, z których każda zawiera się w płaszczyźnie  $\Sigma$ ”.

Planimetria zbudowana na tej jednej płaszczyźnie będzie się stosować także do każdej innej płaszczyzny, ale z tego skorzystamy dopiero w stereometrii (rozd. XVIII — XX).

**Prosta i punkt.** Prosta jest zbiorem punktów. Zdanie: *punkt  $P$  należy do prostej  $a$*  zapisujemy

$$P \in a$$

Zdanie to będziemy przeważnie wypowiadać w postaciach:

- punkt  $P$  leży na prostej  $a$ ;
- prosta  $a$  przechodzi przez punkt  $P$ .

<sup>1)</sup> Zob. alfabet grecki na str. 258.

**Aksjomat I** (o przynależności punktów do prostej).

a) Na każdej prostej leży nieskończenie wiele punktów.

b) Przez każdy punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych.

**Definicja 73.1** (pęku prostych). *Pękiem prostych* nazywamy rodzinę prostych przechodzących przez jeden punkt. Punkt, przez który przechodzą wszystkie proste danego pęku nazywamy *wierzchołkiem pęku*.

**Aksjomat II** (o dwóch punktach i prostej). *Przez dwa różne punkty przechodzi jedna i tylko jedna prosta.*

Prostą przechodzącą przez dwa różne punkty  $A, B$  nazywamy *prostą  $AB$* ; mówimy że jest to prosta *wyznaczona* przez te punkty.

**Twierdzenie 73.1** (o wzajemnym położeniu dwóch prostych na płaszczyźnie). Jeśli  $a$  jest prostą i  $b$  jest prostą, to możliwe są trzy przypadki:

1 — prosta  $a$  i prosta  $b$  nie mają punktu wspólnego;

2 — prosta  $a$  i prosta  $b$  mają dokładnie jeden punkt wspólny;

3 — prosta  $a$  jest identyczna z prostą  $b$ .

**Dowód.** Twierdzenie to jest wnioskiem z aksjomatów I i II.

**Definicja 73.2** (równoległości, przecinania się i pokrywania prostych). Jeśli prosta  $a$  i prosta  $b$  nie mają punktu wspólnego, to mówimy, że te proste są *równoległe*, co zapisujemy

$$a \parallel b$$

Jeśli prosta  $a$  i prosta  $b$  mają dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że proste  $a, b$  *przecinają się*; jedyny punkt wspólny tych prostych nazywamy ich *punktem przecięcia*; jeśli punkt przecięcia prostych  $a, b$  oznaczymy  $M$ , to możemy napisać

$$a \cap b = \{M\}$$

Jeśli prosta  $a$  jest identyczna z prostą  $b$ , to mówimy, że proste  $a, b$  *pokrywają się* i zapisujemy to

$$a = b$$

W tym ostatnim przypadku występuje jedna prosta o dwóch oznaczeniach.

Przyjmujemy, że każda prosta jest równoległa do siebie samej

$$a \parallel a$$

Zatem również w przypadku  $a = b$  mamy prawo napisać  $a \parallel b$ .

Jeśli więc o prostych  $a, b$ , powiedziano, że są równoległe, to należy przez to rozumieć, że albo to są dwie proste nie mające punktu wspólnego (ale, zgodnie z umową, leżące w jednej płaszczyźnie  $\Sigma$ ) albo  $a$  i  $b$  stanowią jedną i tę samą prostą. Zapisując to symbolicznie, mamy

$$(a \parallel b) \Leftrightarrow [(a \cap b = \emptyset) \vee (a = b)]$$

**Aksjomat III** (Euklidesa). *Przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej.*

**Twierdzenie 73.2** (o relacji równoległości prostych). Relacja równoległości prostych jest:

- zwrotna  $a \parallel a$
- symetryczna  $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$
- przechodnia  $(a \parallel b \wedge b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$

**Dowód.** Twierdzenie to wynika z definicji 73.2 i z aksjomatu III.

**Definicja 73.3** (kierunku). Rodzinę wszystkich prostych równoległych do pewnej prostej  $a$  nazywamy *kierunkiem prostej  $a$*  i oznaczamy  $(a)$ .

Jeśli prosta  $m$  jest równoległa do prostej  $a$ , to mówimy, że  $m$  *należy do kierunku  $(a)$* , lub że prosta  $m$  *ma kierunek prostej  $a$* .

**Definicja 73.4** (współliniowości). Punkty nazywają się *współliniowe (kolinearne)*, gdy leżą na jednej prostej.

Dwa punkty są zawsze kolinearne (wynika to z aksjomatu II). Trzy punkty nie muszą być kolinearne.

**Odległość punktów.** W p. 72 podaliśmy ogólne własności, jakie powinna mieć odległość określona w dowolny sposób dla elementów pewnego zbioru. Jako przykład podano odległość sferyczną punktów sfery. Odległość tę mierzymy wzdłuż okręgów wielkich. Łatwo zauważyć, że dla tej odległości równość  $\text{odl}(X, Y) + \text{odl}(Y, Z) = \text{odl}(X, Z)$  jest spełniona, jeśli  $X, Y, Z$  leżą na jednym okręgu koła wielkiego i jeśli rozmieszczenie tych punktów na tym okręgu spełnia pewne dodatkowe warunki.

Obecnie wprowadzimy odległość prostoliniową punktów na płaszczyźnie, którą dla punktów  $X, Y$  będziemy oznaczać  $XY$  lub  $YX$ . Prostoliniowy charakter tej odległości wyrazi się przez warunek, że równość  $XY + YZ = XZ$  ma być spełniona dla punktów  $X, Y, Z$  współliniowych (przy pewnym dodatkowym warunku, co do ich uporządkowania na prostej). Precyzują to aksjomaty IV i V.

**Aksjomat IV** (o odległości). *Każdym dwom punktom  $X, Y^1$  można przyporządkować liczbę zwaną odległością punktów  $X$  i  $Y$  i oznaczaną*

$$XY \quad \text{lub} \quad YX$$

*a spełniającą następujące trzy warunki:*

1 — *odległość  $XY$  jest liczbą nieujemną, a jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy  $X = Y$ ;*

2 — *jeśli trzy punkty  $X, Y, Z$  nie są współliniowe, to zachodzą wszystkie trzy nierówności*

$$XY + YZ > XZ \quad \text{i} \quad YZ + ZX > YX \quad \text{i} \quad ZX + XY > ZY \quad (73.1)$$

3 — *jeśli trzy punkty  $X, Y, Z$  są współliniowe<sup>2)</sup>, to zachodzi co najmniej jedna*

<sup>1)</sup> różnym lub pokrywającym się

<sup>2)</sup> niekoniecznie różne

z równości

$$XY + YZ = XZ \text{ lub } YZ + ZX = YX \text{ lub } ZX + XY = ZY \quad (72.3)$$

Uwaga 1 (o jednostce odległości). Wartość liczbową odległości  $XY$  danych dwóch punktów  $X, Y$  jest zależna od wyboru *jednostki* odległości. Jednostkę tę wyznaczamy przez obranie dwóch punktów wzorcowych  $P$  i  $Q$  i przyjęcie, że ich odległość jest równa jednostce  $PQ = 1$ .

Uwaga 2 (o strukturze logicznej warunków (73.1) i (73.2)). Warunek (73.1) jest koniunkcją trzech nierówności. Warunek (73.2) jest alternatywą trzech równości.

**Wniosek** z aksjomatu IV. Odczytując aksjomat IV, widzimy, że (73.1) jest warunkiem koniecznym niewspółliniowości ((73.1) wynika z niewspółliniowości). Udowodnimy teraz, że (73.1) jest także wystarczającym warunkiem niewspółliniowości, czyli że z warunku (73.1) wynika niewspółliniowość.

Oto **dowód**: Załóżmy, że zachodzi (73.1); wówczas punkty  $X, Y, Z$  nie mogą być współliniowe: gdyby bowiem były współliniowe, to według warunku 3 aksjomatu IV musiałyby zachodzić co najmniej jedna z równości (73.2), a to jest niemożliwe wobec założenia, że zachodzą wszystkie trzy nierówności (73.1).

Podobnie ma się rzecz z warunkiem (73.2). W wysłowieniu aksjomatu IV jest on warunkiem koniecznym współliniowości, ale można udowodnić, że jest on też wystarczającym warunkiem współliniowości punktów  $X, Y, Z$ .

Uwaga 3 (o twierdzeniu odwrotnym). Twierdzenie „Jeśli  $X, Y, Z$  nie są współliniowe, to zachodzi (73.1)” oraz twierdzenie „Jeśli zachodzi (73.1), to  $X, Y, Z$  nie są współliniowe” są twierdzeniami wzajemnie odwrotnymi.

Dwa twierdzenia nazywamy wzajemnie *odwrotnymi*, gdy założenie pierwszego jest tezą drugiego, a teza pierwszego jest założeniem drugiego twierdzenia. Innymi słowy: Twierdzenie odwrotne powstaje przez przestawienie tezy z założeniem.

W powyższym przypadku obydwa twierdzenia są prawdziwe: pierwsze — jako aksjomat, drugie — bo podano dowód tego twierdzenia. Dowód ten był niezbędny, gdyż nie zawsze twierdzenie odwrotne do twierdzenia prawdziwego jest prawdziwe.

Uwaga 4 (o twierdzeniu częściowo odwrotnym). Jeśli założenie danego twierdzenia jest koniunkcją kilku założeń częściowych, to przedstawiając ze sobą tezę i jedno z założeń częściowych, otrzymujemy twierdzenie, które nazywa się *częściowo odwrotnym* do danego twierdzenia.

Twierdzenie częściowo odwrotne do twierdzenia prawdziwego nie musi być prawdziwe.

**Twierdzenie 73.3** (warunek konieczny i wystarczający niewspółliniowości). Punkty  $X, Y$  i  $Z$  nie są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|XY - YZ| < XZ < XY + YZ \quad (73.3)$$

**Dowód.** Zgodnie z wnioskiem z aksjomatu IV, warunek (73.1) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym niewspółliniowości punktów  $X, Y, Z$ . Pokażemy, że

(73.3) jest tylko inną postacią warunku (73.1). Poddając (73.1) stopniowym przekształceniom arytmetycznym otrzymamy ciąg warunków wzajemnie równoważnych, z których ostatni będzie warunkiem (73.3). Wychodzimy od (73.1):

$$\begin{aligned} &XY + YZ > XZ \quad i \quad YZ + ZX > YX \quad i \quad ZX + XY > ZY \\ &XZ < XY + YZ \quad i \quad ZX > YX - YZ \quad i \quad ZX > ZY - XY \\ &XZ < XY + YZ \quad i \quad \underline{XZ > XY - YZ} \quad i \quad \underline{XZ > -(XY - YZ)} \\ &\underline{XZ < XY + YZ} \quad i \quad \underline{XZ > |XY - YZ|} \\ &\quad |XY - YZ| < XZ < XY + YZ \end{aligned}$$

**Twierdzenie 73.4** (warunek konieczny i wystarczający współliniowości). Punkty  $X, Y$  i  $Z$  są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$XZ = XY + YZ \quad \text{lub} \quad XZ = |XY - YZ| \quad (73.4)$$

**Dowód** analogiczny do dowodu twierdzenia poprzedniego.

**Twierdzenie 73.5** (prawo trójkąta). Dla dowolnych punktów  $X, Y, Z$  zawsze zachodzi nierówność słaba

$$|XY - YZ| \leq XZ \leq XY + YZ \quad (73.5)$$

Równość występuje tu wtedy i tylko wtedy, gdy punkty  $X, Y, Z$  są współliniowe.

**Dowód.** Twierdzenie to jest połączeniem tw. 73.3 i tw. 73.4

**Uporządkowanie punktów na prostej.** W p. 72 podaliśmy ogólne własności relacji porządkującej zbiorów. Obecnie wprowadzimy uporządkowanie punktów na prostej.

**Aksjomat V** (o uporządkowaniu punktów na prostej). Na prostej istnieją dokładnie dwa uporządkowania takie, że dla dowolnych punktów  $A, B, C$  tej prostej zachodzą następujące trzy warunki;

- 1 — jeśli  $A$  poprzedza  $B$  przy jednym uporządkowaniu, to  $B$  poprzedza  $A$  przy drugim uporządkowaniu;
- 2 — jeśli  $B$  leży między  $A$  i  $C$ , to  $AB + BC = AC$ ;
- 3 — jeśli  $AB + BC = AC$  i punkty  $A, B, C$  są różne, to  $B$  leży między  $A$  i  $C$ .

**Definicja 73.5** (zwrotu prostej). Każde z dwóch uporządkowań omówionych w aksjomacie V nazywamy *zwrotem prostej*. Na każdej prostej istnieją dwa zwroty, które nazywamy wzajemnie *przeciwnymi*.

Zwrot, w którym  $A$  poprzedza  $B$ , nazywamy *zwrotem od  $A$  do  $B$* . Drugi zwrot, przeciwny do poprzedniego, nazywamy *zwrotem od  $B$  do  $A$* .

Uwaga 5 (o rodzajach definicji). Definicja może być nominalna, albo genetyczna. Definicja *nominalna* jest to zdanie, w którym wypowiada się pewien nowy termin i podaje jego znaczenie. Przykładem definicji nominalnej jest definicja (73.1) pędu prostych.

Niekiedy treść pojęcia jest zbyt złożona i trudno ją zamknąć w jednym zdaniu. Wówczas stosujemy definicję *genetyczną*. Jest to wypowiedź składająca się z kilku

zdań, w których stopniowo wprowadzamy nowe pojęcie, a na końcu podajemy jego nazwę. Przykładem definicji genetycznej jest poniższa definicja.

**Półprosta. Definicja 73.6.** Niech będzie dana dowolna prosta  $l$  i na niej punkt  $A$ . Na prostej  $l$  istnieją dwa (wzajemnie przeciwne) zwroty. Aby wyróżnić jeden z nich, obierzmy na  $l$  dowolny punkt  $B$ , różny od  $A$ . Mamy teraz do wyboru zwrot od  $A$  do  $B$  i zwrot od  $B$  do  $A$ . Obierzmy zwrot od  $A$  do  $B$ .

Zbiór punktów prostej  $l$ , które w tym zwrocie następują po  $A$ , nazywa się jedną *stroną* punktu  $A$  na prostej  $l$ , mianowicie tą stroną, do której należy punkt  $B$  (albo: po której leży punkt  $B$ ).

Zbiór punktów prostej  $l$ , które w przyjętym zwrocie poprzedzają punkt  $A$ , także nazywamy stroną punktu  $A$  na prostej  $l$ , mianowicie: *stroną przeciwną* do poprzedniej strony.

Zbiór punktów prostej  $l$  leżących po jednej stronie punktu  $A$  wraz z punktem  $A$  nazywamy *półprostą*, a punkt  $A$  nazywamy *początkiem tej półprostej*.

Punkt  $A$  wyznacza na  $l$  dwie półproste. Do jednej z nich należy punkt  $B$ , tę — nazywamy półprostą  $AB$  i oznaczamy

$$AB^{\rightarrow}$$

Aby oznaczyć drugą z tych półprostych, obierzmy na  $l$  dowolny punkt  $C$  leżący po tej stronie punktu  $A$ , w której nie leży punkt  $B$ . Wówczas tę drugą półprostą oznaczmy

$$AC^{\rightarrow}$$

Obie półproste:  $AB^{\rightarrow}$  i  $AC^{\rightarrow}$  leżą na tej samej prostej  $l$ , mają jedyny punkt wspólny  $A$

$$AB^{\rightarrow} \cap AC^{\rightarrow} = \{A\}$$

który jest ich wspólnym początkiem, sumą tych półprostych jest prosta  $l$

$$AB^{\rightarrow} \cup AC^{\rightarrow} = l$$

O takich dwóch półprostych mówimy, że *uzupełniają się wzajemnie* (do prostej), albo że jedna z nich jest *przedłużeniem* drugiej.

Mówiąc o półprostej  $AB^{\rightarrow}$ , będziemy jednocześnie przyjmowali na niej zwrot od  $A$  do  $B$ .

**Odcinek. Definicja 73.7.** Odcinkiem  $\overline{AB}$  nazywamy figurę utworzoną z punktów  $A$ ,  $B$  i wszystkich punktów leżących na prostej  $AB$  między punktami  $A$  i  $B$ .

Punkty  $A$ ,  $B$  nazywamy *końcami* odcinka  $\overline{AB}$ .

Jeśli  $A = B$ , to  $\overline{AB}$  nazywamy odcinkiem *zerowym*; jest to punkt. Jeśli  $A \neq B$ , to  $\overline{AB}$  nazywamy odcinkiem *niezerowym*.

**Twierdzenie 73.6** (o odległościach dowolnego punktu odcinka od końców tego odcinka). *Jeśli  $X$  jest dowolnym punktem odcinka  $\overline{AB}$ , to*

$$AX + XB = AB \quad (73.6)$$

i na odwrót: *jeśli zachodzi (73.6), to  $X$  jest punktem odcinka  $\overline{AB}$ .*

Twierdzenie to można zapisać:

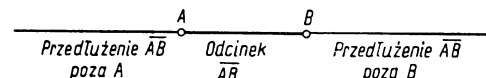
$$X \in \overline{AB} \Leftrightarrow AX + XB = AB \quad (73.7)$$

**Dowód.** Twierdzenie to jest wnioskiem z aksjomatu V.

Oto definicje dalszych pojęć związanych z odcinkiem.

**Długość odcinka** jest to odległość końców tego odcinka. Długość odcinka  $\overline{AB}$  oznaczamy  $AB$ . Jeśli odcinek oznaczamy jedną literą, np.  $\bar{a}$ , to jego długość oznaczamy  $a$ . Odcinek jest figurą (zbiorem punktów), jego długość jest liczbą. Odcinek zerowy ma długość 0. Odcinki o równych długościach nazywamy *równymi*.

**Przedłużenie odcinka.** Niech będą dane różne punkty  $A$ ,  $B$ . Tę stronę punktu  $B$  na prostej  $AB$ , na której nie leży punkt  $A$  (rys. 73-1), nazywamy *przedłużeniem odcinka  $\overline{AB}$  poza punkt  $B$* .



Rys. 73-1

Tę stronę punktu  $A$  na prostej  $\overline{AB}$ , na której nie leży punkt  $B$ , nazywamy *przedłużeniem odcinka  $\overline{AB}$  poza punkt  $A$* .

Sumę przedłużenia odcinka  $\overline{AB}$  poza  $B$  i przedłużenia odcinka  $\overline{AB}$  poza  $A$  nazywamy *przedłużeniem odcinka  $\overline{AB}$* .

O prostej przechodzącej przez punkty  $A$ ,  $B$  mówimy, że jest *wyznaczona przez punkty  $A$ ,  $B$*  lub że jest *wyznaczona przez odcinek  $\overline{AB}$* .

**Twierdzenie 73.7** (o zawieraniu się odcinka w prostej, w półprostej i w odcinku).

*Odcinek, którego końce leżą na pewnej prostej, zawiera się w tej prostej.*

*Odcinek, którego końce leżą na pewnej półprostej, zawiera się w tej półprostej.*

*Odcinek, którego końce leżą na pewnym odcinku, zawiera się w tym odcinku.*

**Dowód.** Twierdzenie to jest wnioskiem z definicji 73.7 i aksjomatów II i V.

**Aksjomat VI** (o odkładaniu na półprostej odcinka o dowolnej długości). *Na każdej półprostej leży dokładnie jeden punkt, którego odległość od początku tej półprostej równa się danej liczbie nieujemnej.*

**Wniosek z aksjomatu VI.** Jeśli jest dany dowolny, niezerowy odcinek  $a$  oraz prosta  $l$  i na niej punkt  $O$ , to istnieją na  $l$  dokładnie dwa punkty  $X_1$ ,  $X_2$ , po jednym po każdej stronie punktu  $O$ , takie że

$$OX_1 = OX_2 = a$$

Wyznaczenie punktów  $X_1$ ,  $X_2$  nazywamy *odkładaniem odcinka  $\bar{a}$  na prostej  $l$  od punktu  $O$* .

**Uwaga 6.** Aksjomat VI orzeka, że na każdej prostej można odłożyć odcinek równy danemu odcinkowi, ale i coś więcej: że istnieją odcinki o dowolnej długości. Wynika stąd, że między punktami prostej a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość.

**Łamana. Definicja 73.8.** Jeśli każdej z liczb naturalnych

$$1, 2, 3, \dots, n \quad n \geq 3$$

przyporządkujemy jakiś punkt, to otrzymamy *ciąg punktów*

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \quad (73.7)$$

(niektóre z tych punktów mogą się pokrywać, np. może być  $A_1 = A_n$ ).

Łącząc każde dwa kolejne punkty tego ciągu odcinkami, otrzymamy *łańcuch odcinków*

$$\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3}, \dots, \overline{A_{n-1} A_n} \quad (73.8)$$

Jeśli każde dwa odcinki tego łańcucha mają co najwyżej jeden punkt wspólny, to figurę utworzoną z tych odcinków nazywamy *łamaną* i oznaczamy ją

$$A_1 A_2 A_3 \dots A_n \quad (73.9)$$

Jeśli odcinki łamanej spełniają dalsze założenia:

- dwa odcinki mające wspólny koniec nie leżą na jednej prostej;
- dwa odcinki nie mające wspólnego końca nie mają punktu wspólnego;
- każdy z punktów (73.7) może być końcem co najwyżej dwóch odcinków łamanej,

to tę łamaną nazywamy *łamaną zwyczajną*, odcinki (73.8) nazywamy jej *bokami*, a punkty (73.7) — *wierzchołkami*. W przypadku  $A_1 = A_n$  łamaną nazywamy *zamkniętą*, w przeciwnym razie — *otwartą*.

*Długością łamanej* nazywamy sumę długości jej boków.

### Pytania i zadania

1. Wypowiedzieć aksjomaty I — VI.
2. Co to są proste równoległe?
3. Jakie własności ma relacja równoległości?
4. Jak określamy odległość?
5. Co orzeka prawo trójkąta?
6. Wypowiedzieć warunki współliniowości i warunek niewspółliniowości trzech punktów.
7. Wypowiedzieć warunek konieczny i wystarczający na to, aby punkt  $X$  leżał na odcinku  $\overline{AB}$ .
8. Kiedy dwa twierdzenia są odwrotne, a kiedy częściowo odwrotne?
9. Jaka różnica jest między definicją nominalną i definicją genetyczną?
10. Co to jest: kierunek prostej, zwrot prostej, półprosta, punkty współliniowe, odcinek, przedłużenie odcinka poza jeden jego koniec, przedłużenie odcinka?
11. Zapisać symbolicznie następujące wypowiedzi:
  - punkt  $P$  leży na prostej  $l$ ;
  - prosta  $l$  przechodzi przez punkt  $A$  i  $B$ ;
  - proste  $a, b$  przecinają się w punkcie  $M$ ;

- jeśli każda z prostych  $a, b$  przechodzi przez punkty  $P$  i każda z nich jest równoległa do prostej  $l$ , to proste  $a, b$  pokrywają się;
- twierdzenie 73.7.

12. Co to jest łamana? Kiedy łamana jest zwyczajna, zamknięta, otwarta?

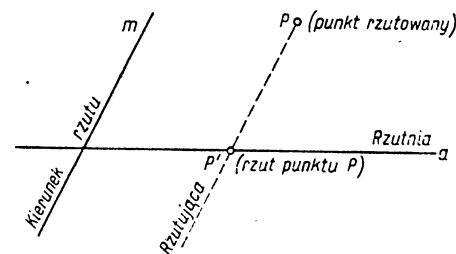
## 74. Rzut równoległy na prostą

**Rzut równoległy na prostą. Definicja 74.1.** Niech będą dane dwie proste przecinające się:

- prosta  $a$ , którą w dalszym ciągu będziemy nazywać *rzutnią* i
- prosta  $m$ , której kierunek nazwiemy *kierunkiem rzutu*.

Rzutnia i kierunek rzutu tworzą *układ rzutowania*.

Niech  $P$  będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Przeprowadźmy przez  $P$  prostą równoległą do  $m$ , tzw. *prostą rzutującą*; prosta ta przecina rzutnię w pewnym punkcie, który nazywamy *rzutem punktu  $P$  na prostą  $a$  w kierunku  $m$*  i oznaczamy zwykle  $P'$  (tj. tą samą literą, co punkt rzutowany z dołączeniem u góry znaczką „prim”) (rys. 74-1). Rzut punktu leżącego na rzutni pokrywa się z tym punktem.



Rys. 74-1

Rzut równoległy stanowi pewne przekształcenie płaszczyzny w prostą. Punkt  $P'$  jest w tym przekształceniu obrazem punktu  $P$ . Każdy punkt rzutni jest punktem stałym tego przekształcenia. Przekształcenie to jest jednoznaczne (każdy punkt ma jeden rzut), ale nie jest wzajemnie jednoznaczne (jeden i ten sam punkt rzutni jest rzutem nieskończenie wielu punktów płaszczyzny).

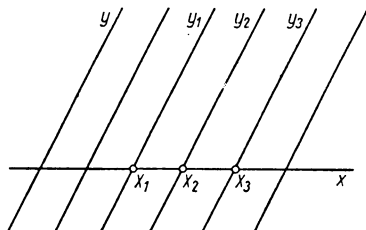
**Aksjomat VII** (o zachowaniu porządku punktów prostej w rzucie równoległym). *Jeśli prosta  $AB$  nie jest równoległa do kierunku rzutu i punkt  $X$  leży na prostej  $AB$  między punktami  $A$  i  $B$ , to jego rzut  $X'$  leży na rzutni między rzutami  $A'$  i  $B'$  punktów  $A$  i  $B$ .*

**Wnioski z aksjomatu VII:**

- rzut odcinka jest odcinkiem (lub punktem),
- rzut półprostej jest półprostą (lub punktem),
- rzut prostej jest prostą (lub punktem),
- uporządkowanie jednej prostej można za pomocą rzutu przenieść na inną

prostą; w szczególności mając dwie proste równoległe, możemy za pomocą rzutu przenieść zwrot jednej prostej na drugą; o tak skierowanych prostych mówimy, że są *zgodnie skierowane*, czyli mają *ten sam zwrot*.

**Uporządkowanie rodziny prostych równoległych.** Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna została pokryta prostymi równoległymi o kierunku  $y$  oraz że na pewnej prostej  $x$  nierównoległej do  $y$  został obrany jeden z dwóch zwrotów tej prostej (rys. 74-2).



Rys. 74-2

Miedzy prostymi kierunku ( $y$ ) a punktami prostej  $x$  istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość. Można więc przenieść uporządkowanie prostej  $x$  na rodzinę prostych ( $y$ ).

**Definicja 74.2 (uporządkowania rodziny prostych).** Załóżmy, że proste  $y_1, y_2, y_3$  należą do kierunku ( $y$ ), zaś  $X_1, X_2, X_3$  są punktami przecięcia tych prostych z prostą  $x$ . Jeśli przyjmiemy, że  $y_1$  poprzedza  $y_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X_1$  poprzedza  $X_2$  oraz że  $y_2$  leży między  $y_1$  i  $y_3$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X_2$  leży między  $X_1$  i  $X_3$ , to mówimy, że rodzina prostych ( $y$ ) została uporządkowana zgodnie ze zwrotem prostej  $x$  albo że w rodzinie prostych ( $y$ ) został określony zwrot zgodny ze zwrotem prostej  $x$ .

**Strona prostej.** **Definicja 74.3.** *Stroną prostej  $y$  nazywamy część płaszczyzny pokrytą prostymi kierunku ( $y$ ) następującymi po  $y$  w danym zwrocie rodziny ( $y$ ). Część płaszczyzny pokrytą prostymi kierunku ( $y$ ) poprzedzającymi prostą  $y$  w danym zwrocie rodziny ( $y$ ) nazywamy *stroną przeciwną* do poprzedniej strony prostej  $y$ .*

**Półpłaszczyzna.** **Definicja 74.4.** Półpłaszczyzną o krawędzi  $y$  nazywamy część płaszczyzny złożoną z prostej  $y$  i wszystkich prostych kierunku ( $y$ ) leżących po jednej stronie prostej  $y$ .

Każda prosta wyznacza na płaszczyźnie dwie półpłaszczyzny, dla których jest wspólną krawędzią. Aby wyróżnić jedną z tych półpłaszczyzn, wystarczy wskazać jakąkolwiek prostą równoległą do krawędzi i zawartą w tej półpłaszczyźnie (zamiast prostej wystarczy jeden punkt tej prostej).

Z aksjomatu VII wynikają następujące twierdzenia:

- jeśli dwa punkty leżą po jednej stronie pewnej prostej, to cały odcinek łączący te punkty leży po tej stronie prostej;
- jeśli dwa punkty leżą po różnych stronach pewnej prostej, to odcinek łączący te punkty przecina tę prostą.

Półpłaszczyzny *uzupełniające się* (do całej płaszczyzny) są to dwie półpłaszczyzny które mają wspólną krawędź i których suma jest płaszczyzną.

**Pas. Definicja 74.5.** Jeśli proste  $y_1, y_2$  są równoległe, to *pasem o krawędziach  $y_1, y_2$*  nazywamy część płaszczyzny stanowiącą sumę prostych  $y_1, y_2$  oraz wszystkich prostych równoległych do  $y_1$  (i do  $y_2$ ), leżących między  $y_1$  i  $y_2$ .

Pas o krawędziach  $a, b$  oznaczamy  $\overline{ab}$ . Jeśli  $a = b$ , to  $\overline{ab} = a$ .

## Pytania

1. Wypowiedzieć definicję rzutu równoległego na prostą.
2. Wypowiedzieć aksjomat VII.
3. W jaki sposób można uporządkować rodzinę prostych równoległych?
4. Co to jest strona prostej, półpłaszczyzna, pas?

## 75. Okrąg i koło. Wnętrze, zewnątrz i brzeg figury

**Okrąg i koło.** Obierzmy na płaszczyźnie dowolny punkt  $S$  i weźmy pod uwagę wszystkie półproste wychodzące z tego punktu i leżące w płaszczyźnie. Półproste te pokrywają całą płaszczyznę. Na każdej z tych półprostych można (według aksjomatu VI) odkładać odcinki o dowolnych długościach. Niech będzie dany odcinek  $\bar{r}$  o długości  $r$  ( $r > 0$ ). Odlóżyśmy na każdej z tych półprostych odcinek o długości  $r$ .

**Definicja 75.1 (okręgu).** Zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od punktu  $S$  są równe  $r$  ( $r > 0$ ), nazywamy *okręgiem o środku  $S$  i promieniu  $r$*  i oznaczamy

$$o(S, r) \quad (75.1)$$

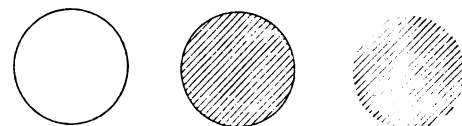
Każdy odcinek łączący środek  $S$  okręgu z dowolnym punktem okręgu nazywamy *promieniem okręgu*.

Umowa. Promień okręgu (75.1) jest odcinkiem  $\bar{r}$  o długości  $r$ . Zamiast mówić „promień o długości równej  $r$ ” umawiamy się mówić krócej „promień równy  $r$ ” lub wprost „promień  $r$ ”.

Okrąg jest zbiorem punktów; o każdym punkcie należącym do tego zbioru mówimy, że „punkt ten leży na okręgu”, lub, że jest to „punkt okręgu”.

**Definicja 75.2 (koła).** Zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od punktu  $S$  są mniejsze od  $r$  lub równe  $r$  ( $r > 0$ ), nazywamy *kołem o środku  $S$  i promieniu  $r$*  i oznaczamy

$$k(S, r) \quad (75.2)$$



Rys. 75-1. Okrąg, koło, wnętrze koła

Punkt należący do koła nazywamy *punktem koła*. O okręgu (75.1) mówimy, że jest *brzegiem koła* (75.2). Zbiór punktów koła, nie leżących na brzegu tego koła, nazywamy *wnętrzem koła* i oznaczamy

$$w(S, r) \quad (75.3)$$

Punkt należący do wnętrza koła nazywamy *punktem wewnętrznym* tego koła.

*Zewnątrzem koła* nazywamy zbiór punktów płaszczyzny nie należących ani do wnętrza ani do brzegu tego koła. Są to punkty, których odległość od środka koła jest większa od promienia. Zewnątrze koła oznaczamy

$$z(S, r) \quad (75.4)$$

Punkt należący do zewnątrza koła nazywamy *punktem zewnątrznym* tego koła. Punkty koła dzielą się na wewnętrzne i brzegowe. „Punkt zewnątrznego koła” nie jest „punktem koła”.

**Definicja 75.3** (dalszych pojęć związanych z okręgiem). *Cięciwą okręgu* nazywamy odcinek łączący dowolne dwa (różne) punkty okręgu. *Średnicą okręgu* nazywamy cięciwę przechodzącą przez środek okręgu. Z twierdzenia 73.6 wynika, że długość średnicy równa się podwójnej długości promienia.

Oberzmy na okręgu dwa różne punkty  $A, B$  i przeprowadźmy prostą  $AB$ . Prostą, która ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem nazywamy *sieczną* tego okręgu.

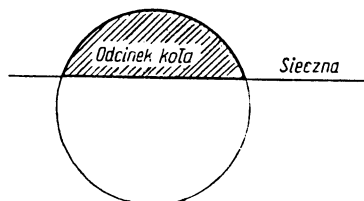
Część okręgu leżąca po jednej stronie siecznej z dołączeniem punktów okręgu  $A, B$  leżących na siecznej nazywamy *łukiem okręgu o końcach  $A, B$*  i oznaczamy

$$\overline{AB}$$

Część okręgu leżąca po drugiej stronie siecznej wraz z punktami  $A, B$  jest też łukiem  $\overline{AB}$ . O każdym z tych łuków mówimy, że jest *wsparty na cięciwie  $\overline{AB}$* . Aby odróżnić od siebie te dwa łuki, posługujemy się niekiedy jakimiś punktami tych łuków różnymi od ich końców. Jeżeli takimi punktami są  $M, N$  i punkt  $M$  leży na jednym łuku, a punkt  $N$  na drugim, to mówimy, że punkty  $A, B$  wyznaczają na okręgu dwa łuki

$$\overline{AMB} \quad \overline{ANB}$$

Część koła leżącą po jednej stronie siecznej wraz z cięciwą leżącą na tej siecznej nazywamy *odcinkiem koła* (rys.75-2). Sieczna wyznacza dwa odcinki koła; cięciwa jest wspólną częścią tych odcinków koła.



Rys. 75-2

Jeżeli cięciwa jest średnicą, to oba, wyznaczone przez nią, łuki okręgu nazywamy *półokreęgami*, a oba odcinki koła — *półkołami*.

Okręgi mające wspólny środek nazywamy *współśrodkowymi*.

**Definicja 75.4** (pierścienia kołowego). Zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu  $S$  jest nie mniejsza niż  $a$  i nie większa niż  $b$ , gdzie  $0 < a < b$ , nazywamy *pierścieniem kołowym o środku  $S$ , promieniu małym  $a$  i promieniu dużym  $b$* .

**Aksjomat VIIIa** (własność brzegu koła). *Odcinek, a także łuk dowolnego okręgu, który łączy punkt wewnętrzny dowolnego koła z punktem zewnątrznym tego koła, ma z brzegiem koła dokładnie jeden punkt wspólny (mówimy: przecina brzeg koła dokładnie w jednym punkcie).*

Z aksjomatu VIIIa wynikają następujące trzy twierdzenia.

**Twierdzenie 75.1.** *Półprosta, której początek leży wewnątrz koła, ma z brzegiem koła dokładnie jeden punkt wspólny; punkty poprzedzające go w tej półprostej leżą wewnątrz koła, punkty następujące po nim leżą na zewnątrzu koła.*

**Twierdzenie 75.2.** *Prosta przechodząca przez punkt wewnętrzny koła ma dokładnie dwa punkty wspólne z brzegiem koła; punkty leżące między tymi dwoma punktami leżą wewnątrz koła, punkty leżące poza nimi leżą na zewnątrzu koła.*

**Twierdzenie 75.3.** *Jeśli  $X$  jest punktem odcinka  $\overline{AB}$ , a  $O$  jest dowolnym punktem, to prawdziwą jest przynajmniej jedna z nierówności*

$$OX \leq OA \quad \text{lub} \quad OX \leq OB \quad (75.5)$$

Uwaga. Powyższe twierdzenia wydają się nam oczywiste, gdy są zgodne z naszymi wyobrażeniami okręgu i prostej, ale zgodność ta nie może zastąpić ścisłego dowodu rozumowego. W dowodzie takim każdy krok rozumowania powinien być formalnie uzasadniony przez powołanie się na jakiś aksjomat lub na twierdzenie poprzednio udowodnione. Dlatego dowód oczywistego twierdzenia może okazać się zawiły i trudny.

**Dowód twierdzenia 75.1.** Niech  $A$  będzie punktem wewnętrznym koła  $k(S, r)$ . Jest  $AS < r$ . Wyprowadźmy z  $A$  dowolną półprostą. Odłóżmy na niej odcinek  $\overline{AB}$  takiej długości, aby punkt  $B$  znalazł się na zewnątrzu koła. Wystarczy przyjąć  $AB = 2r$ , wówczas (tw. 73.5) jest

$$BS \geq |BA - AS| = |2r - AS| > |2r - r| = r$$

$B$  leży zewnątrzu koła. Ponieważ  $A$  leży wewnątrz koła, więc (aks. VIIIa) na odcinku  $\overline{AB}$  leży dokładnie jeden punkt, nazwijmy go  $C$ , należący do okręgu  $o(S, r)$ .

Wykażemy, że jest to jedyny punkt należący do okręgu nie tylko na odcinku  $\overline{AB}$ , ale na półprostej  $AB^{\rightarrow}$ . Istotnie, każdy punkt  $P$  leżący na  $AB^{\rightarrow}$  poza  $B$  ma odległość od  $A$  większą od  $AB = 2r$ , więc

$$PS \geq |PA - AS| > |2r - AS| > |2r - r| = r$$

co oznacza, że  $P$  leży zewnątrzu koła.

Żaden punkt leżący na  $\overline{AB}$  przed  $C$  nie może leżeć wewnątrz koła, gdyż wówczas między tym punktem i punktem  $A$  musiałyby istnieć jeszcze jeden punkt okręgu; tymczasem na całym odcinku  $\overline{AB}$ , zgodnie z aksjomatem VIIIa istnieje tylko jeden punkt okręgu.

**Dowód twierdzenia 75.2.** Przez punkt  $A$  leżący wewnątrz koła przeprowadzamy prostą. Punkt  $A$  wyznacza na niej dwie półproste. Do każdej z nich stosuje się tw. 75.1. Stąd wynika teza tw. 75.2.

**Uwaga.** Gdyby w tw. 75.2 założenie, że prosta przechodzi przez punkt wewnętrzny koła, zastąpić założeniem, że prosta przechodzi przez dwa różne punkty okręgu, to otrzymalibyśmy twierdzenie prawdziwe, lecz trudniejsze do udowodnienia.

**Dowód twierdzenia 75.3.** Jeśli  $X$  jest jednym z końców odcinka  $\overline{AB}$ , to alternatywa (75.5) jest spełniona. Rozważmy więc przypadek, gdy  $X$  leży na  $\overline{AB}$  między  $A$ ,  $B$ . Gdyby było

$$OX > OA \quad \text{ i } \quad OX > OB \quad (75.6)$$

to po wprowadzeniu okręgu  $o(O, OX)$  okazałoby się, że oba punkty  $A$  i  $B$  leżą wewnątrz tego okręgu. Wtedy, zgodnie z tw. 75.1, na przedłużeniu  $\overline{AB}$  poza  $B$  musiałyby leżeć punkt tego okręgu, ale  $X$  leżący między  $A$ ,  $B$  jest też punktem tego okręgu i na  $\overline{AB}$  istniałyby dwa punkty okręgu  $o(O, OX)$ , co jest sprzeczne z tw. 75.1. Przypuszczenie (75.6) prowadzi do sprzeczności, więc nie może być prawdziwe. Zatem prawdziwą jest teza (75.5).

**Otoczenie punktu. Definicja 75.5.** *Otoczeniem kołowym punktu  $P$  o promieniu  $r$  nazywamy koło  $k(P, r)$ .*

**Uwaga.** Według tej definicji otoczeniem kołowym jest koło (wraz z brzegiem); jest to otoczenie kołowe *domknięte*. W niektórych książkach przez otoczenie kołowe rozumie się wnętrze koła (bez brzegu); jest to otoczenie kołowe *otwarte*.

Jeśli pewna własność zachodzi w otoczeniu domkniętym, to zachodzi też w otoczeniu otwartym o tym samym promieniu. Na odwrót, jeśli pewna własność zachodzi w otoczeniu otwartym, to nie musi zachodzić w otoczeniu domkniętym o tym samym promieniu, ale zachodzi w otoczeniu domkniętym o mniejszym promieniu.

*Otoczeniem punktu  $P$  nazywamy każdą figurę, która zawiera jakieś koło o środku  $P$ .*

**Uwaga.** W dalszym ciągu będziemy posługiwać się prawie wyłącznie otoczeniami kołowymi, więc będziemy je nazywać krótko: *otoczeniami*.

**Wnętrze, zewnętrzne i brzeg figury. Definicja 75.6.** Niech będzie dana pewna figura płaska  $f$ . Punkt nazywamy *punktem wewnętrznym* figury  $f$ , jeśli istnieje otoczenie tego punktu składające się z punktów należących do  $f$ . Punkt nazywamy *punktem zewnętrznym* figury  $f$ , jeśli istnieje otoczenie tego punktu nie zawierające ani jednego punktu należącego do  $f$ . Punkt nazywamy *punktem brzegowym* figury  $f$ , jeśli punkt ten nie jest ani punktem wewnętrznym ani zewnętrznym względem figury  $f$ , tj. jeśli

w każdym otoczeniu tego punktu znajduje się co najmniej jeden punkt należący do  $f$  i co najmniej jeden punkt nie należący do  $f$ .

Zbiór punktów wewnętrznych figury  $f$  nazywamy *wnętrzem* figury  $f$ .

Zbiór punktów zewnętrznych figury  $f$  nazywamy *zewnątrzem* figury  $f$ .

Zbiór punktów brzegowych figury  $f$  nazywamy *brzegiem* figury  $f$ .

Z definicji tej wynika, że

- punkt wewnętrzny figury  $f$  zawsze należy do  $f$ ;
- punkt zewnętrzny figury  $f$  nigdy nie należy do  $f$ ;
- punkt brzegowy figury  $f$  może do  $f$  należeć lub nie należeć.

**Uwaga.** W definicji 75.2 wprowadzono pojęcia wnętrza, zewnątrz i brzegu koła. Definicja 75.6 rozszerza te pojęcia na dowolne figury.

**Aksjomat VIII b** (własność brzegu dowolnej figury). *Odcinek (a także łuk dowolnego okręgu) który łączy punkt wewnętrzny dowolnej figury z punktem zewnętrznym tej figury, przecina brzeg tej figury co najmniej w jednym punkcie.*

**Figury domknięte i figury otwarte. Definicja 75.7.** Figurę nazywamy *domkniętą*, jeśli każdy punkt brzegowy tej figury należy do tej figury.

Figurę nazywamy *otwartą*, jeśli żaden punkt brzegowy tej figury nie należy do tej figury. Oznacza to, że figura otwarta składa się z punktów wyłącznie wewnętrznych względem danej figury, a więc że każdy punkt figury otwartej ma otoczenie zawierające się w tej figurze.

**Przykłady.** Odcinek, okrąg, koło, pierścień kołowy są figurami domkniętymi. Wnętrze koła jest figurą otwartą. Figura, która nie jest domknięta nie musi być otwartą; jeśli z odcinka niezerowego usuniemy jeden punkt (np. jeden koniec), to otrzymamy zbiór, który nie jest domknięty (gdyż ten usunięty punkt jest punktem brzegowym nowo utworzonej figury, a nie należy do tej figury) ale nie jest też figurą otwartą (gdyż nie wszystkie punkty tej figury są punktami wewnętrznymi — w tym przypadku nawet żaden punkt nie jest wewnętrznym). Figura złożona z dowolnej skończonej liczby punktów jest figurą domkniętą; odrzucając z tej figury jeden punkt, otrzymamy nową figurę również domkniętą.

**Uwaga.** Słowo „otwarta” było użyte w definicji 73.8 w odniesieniu do łamanej, która mogła być otwarta lub zamknięta, zależnie od tego, czy jej koniec był różny od początku, czy pokrywał się z nim. Słowo to było użyte w innym znaczeniu. Aby skonfrontować ze sobą oba znaczenia tego słowa, wypowiemy zdanie (prawdziwe):

*Łamana otwarta nie jest zbiorem otwartym, lecz, podobnie jak odcinek, jest zbiorem domkniętym. Łamana zamknięta jest również zbiorem domkniętym.*

**Figury ograniczone i figury nieograniczone. Definicja 75.8.** Figurę  $f$  nazywamy *ograniczoną*, gdy istnieje koło, w którym ta figura zawiera się. W przeciwnym razie figurę nazywamy *nieograniczoną*.

**Przykłady.** Odcinek jest figurą ograniczoną. Półprosta jest figurą nieograniczoną. Każdy zbiór punktów jest albo ograniczony albo nieograniczony.

**Figury wypukłe. Definicja 75.9.** Figurę nazywamy *wypukłą*, gdy odcinek łączący dwa dowolne punkty tej figury zawiera się w tej figurze. Figurę, która nie jest wypukłą, nazywamy *niewypukłą*.

**Przykłady.** Odcinek, prosta, półprosta, półpłaszczyzna, pas, koło, wnętrze koła — są figurami wypukłymi. Pierścień kołowy nie jest figurą wypukłą.

**Twierdzenie 75.4.** *Iloczyn dwóch figur wypukłych jest figurą wypukłą.*

**Figury spójne. Definicja 75.10.** Figurę nazywamy *spójną*, gdy każde dwa punkty tej figury można połączyć łamaną zwyczajną zawartą w tej figurze.

**Przykłady.** Każda figura wypukła jest figurą spójną, gdyż odcinek jest najprostszym przykładem łamanej. Pierścień kołowy jest figurą spójną.

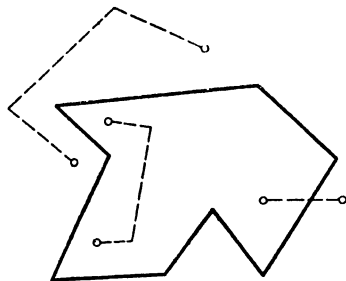
**Rozcinanie płaszczyzny. Definicja 75.11.** Powiedzenie *figura  $f$  rozcina płaszczyznę na dwie figury spójne  $f_1$  i  $f_2$*  oznacza, że

- figury  $f_1, f_2$  są niepuste, otwarte, spójne i wzajemnie rozłączne;
  - figura  $f$  jest wspólnym brzegiem figur  $f_1, f_2$ ;
  - suma  $f \cup f_1 \cup f_2$  jest całą płaszczyzną.
- O każdej z figur  $f_1, f_2$  mówimy, że jest *wycięta z płaszczyzny przez figurę  $f$* .

**Przykłady.** Prosta rozcina płaszczyznę na dwie figury, które nazwalismy stronami prostej (zob. def. 74.3). Okrąg rozcina płaszczyznę na dwie figury, z których jedna jest wnętrzem koła, a druga zewnętrzem tego koła.

**Aksjomat IX** (o rozcinaniu płaszczyzny przez łamaną zamkniętą). *Łamana zwyczajna zamknięta rozcina płaszczyznę na dwie figury spójne. Jedna z tych figur jest ograniczona, druga — nieograniczona.*

Jeśli figura  $f$  rozcina płaszczyznę na dwie figury spójne  $f_1$  i  $f_2$ , to zgodnie z aksjomatem VIIIb, odcinek, którego jeden koniec należy do  $f_1$  a drugi do  $f_2$ , musi mieć



Rys. 75-3. Łamana zwyczajna zamknięta rozcina płaszczyznę

co najmniej jeden punkt wspólny z  $f$ . Także każda łamana, której początek należy do  $f_1$ , a koniec do  $f_2$ , musi mieć punkt wspólny z figurą  $f$  (rys. 75-3).

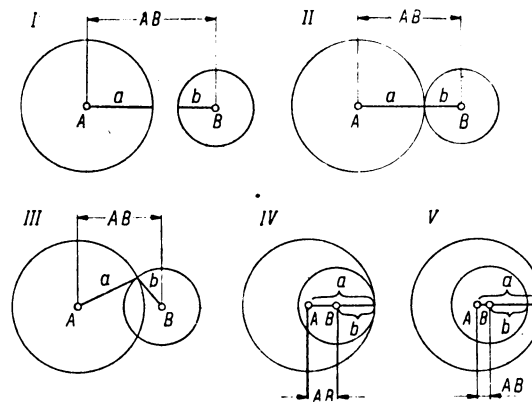
**Wzajemne położenie dwóch okręgów.** Dla skrócenia wypowiedzi, zamiast mówić „figura leży we wnętrzu koła, którego brzegiem jest okrąg” powiemy „figura leży

wewnątrz okręgu”. Podobnie zamiast mówić „figura leży w zewnątrz koła, którego brzegiem jest okrąg” powiemy „figura leży zewnątrz okręgu”.

**Definicja 75.12** (przypadki wzajemnego położenia 2 okręgów). Niech będą dane dwa różne okręgi

$$o(A, a) \quad o(B, b) \quad a \geq b > 0 \quad (75.7)$$

Rozpatrując wzajemne położenie tych okręgów, znajdujemy 5 przypadków: (rys. 75-4)



Rys. 75-4. Wzajemne położenie dwóch okręgów

- I — okręgi są *wzajemnie zewnętrzne*, tzn. każdy z nich leży zewnątrz drugiego;
- II — okręgi są *zewnętrznie styczne*, tzn. mają jeden punkt wspólny, a pozostałe punkty każdego z tych okręgów leżą zewnątrz drugiego okręgu;
- III — okręgi *przecinają się*, tzn. mają dokładnie 2 punkty wspólne;
- IV — okręgi są *wewnętrznie styczne*, tzn. mają jeden punkt wspólny, a pozostałe punkty jednego okręgu leżą wewnątrz drugiego okręgu;
- V — jeden okrąg leży wewnątrz drugiego okręgu.

Przypadki te są uwarunkowane pewnymi nierównościami między promieniami okręgów i odległością środków tych okręgów.

**Twierdzenie 75.5** (o rozpoznawaniu wzajemnego położenia dwóch okręgów). *Załóżmy, że okręgi  $o(A, a)$ ,  $o(B, b)$ , gdzie  $a \geq b > 0$ , są różne. O okręgach tych twierdzimy:*

- I.  $AB > a + b \Rightarrow$  okręgi są *wzajemnie zewnętrzne*;
- II.  $AB = a + b \Rightarrow$  okręgi są *zewnętrznie styczne*;
- III.  $a - b < AB < a + b \Rightarrow$  okręgi *przecinają się*;
- IV.  $a - b = AB \Rightarrow$  okręgi są *wewnętrznie styczne*;
- V.  $AB < a - b \Rightarrow$  *jeden okrąg leży wewnątrz drugiego*.

**Zamknięty układ twierdzeń** jest to układ twierdzeń, których założenia wyczerpią wszystkie możliwości, a tezy wykluczają się wzajemnie.

Jeśli twierdzenia tworzące zamknięty układ twierdzeń są prawdziwe, to twierdzenia odwrotne do nich są też prawdziwe.

Twierdzenia I — V wchodzące w skład twierdzenia 75.5 tworzą zamknięty układ twierdzeń, zatem twierdzenia odwrotne do nich są prawdziwe. Oznacza to, że zmieniając w nich kierunek  $\Rightarrow$  implikacji na kierunek  $\Leftarrow$ , otrzymamy twierdzenia również prawdziwe. Łącząc je z poprzednimi, otrzymujemy

**Twierdzenie 75.6.** *O dwóch różnych okręgach  $o(A, a)$ ,  $o(B, b)$ ,  $a \geq b > 0$  twierdzymy:*

- I.  $AB > a + b \Leftrightarrow$  okręgi są wzajemnie zewnętrzne;
- II.  $AB = a + b \Leftrightarrow$  okręgi są zewnętrznie styczne;
- III.  $a - b < AB < a + b \Leftrightarrow$  okręgi przecinają się;
- IV.  $AB = a - b \Leftrightarrow$  okręgi są wewnętrznie styczne;
- V.  $AB < a - b \Leftrightarrow$  jeden okrąg leży wewnątrz drugiego.

### Pytania i zadania

1. Udowodnić, że odległość  $AB$  dwóch dowolnych punktów  $A, B$  koła o promieniu  $r$  jest nie większa od  $2r$ .
2. Udowodnić, że  $A \in o(S, r) \Leftrightarrow S \in o(A, r)$ .
3. Punkt  $B$  leży wewnątrz koła  $k(S, r)$ . Wskazać otoczenie punktu  $B$  zawierające się w kole  $k(S, r)$ .
4. Punkt  $C$  leży zewnątrz koła  $k(S, r)$ . Wskazać otoczenie punktu  $C$  nie mające punktu wspólnego z kołem  $k(S, r)$ .
5. Co to jest: okrąg, koło, cięciwa, średnica, sieczna, łuk okręgu, półokrąg, odcinek koła, półkole, pierścień?
6. Wypowiedzieć aksjomaty VIIa i VIIb. Czym różnią się one?
7. Co to jest kołowe otoczenie punktu i dowolne otoczenie punktu?
8. Kiedy punkt jest wewnętrzny, kiedy zewnętrzny, a kiedy brzegowy względem danej figury?
9. Co to jest wnętrze, zewnętrzne i brzeg figury?
10. Kiedy figurę nazywamy domkniętą, a kiedy otwartą?
11. Podać przykłady figury domkniętej, figury otwartej i figury, która nie jest ani domknięta ani otwarta.
12. Opisać i nazwać 5 przypadków wzajemnego położenia 2 okręgów.
13. Kiedy figurę nazywamy ograniczoną?
14. Kiedy figurę nazywamy wypukłą?
15. Podać przykłady wskazujące na to, że suma dwóch figur wypukłych może być figurą wypukłą, ale może też być figurą niewypukłą.
16. Zapisać symbolicznie własność figury wypukłej.
17. Udowodnić twierdzenie 75.4.
18. Kiedy figurę nazywamy spójną?

19. Co oznacza powiedzenie, że pewna figura rozcina płaszczyznę na dwie figury spójne?
20. Wypowiedzieć aksjomat IX o rozcinianiu płaszczyzny przez łamaną zamkniętą.

## 76. Kąt. Wielokąty

**Pojęcie kąta.** W geometrii występują dwa pojęcia kąta:

- 1 — kąt zwykły czyli nieskierowany.
- 2 — kąt skierowany.

W tym rozdziale zajmujemy się kątem zwykłym, który będziemy nazywać krótko: kątem.

**Definicja 76.1** (kąta). *Zbiór utworzony z dwóch różnych półprostych mających wspólny początek i jednej z dwóch figur wyciętych z płaszczyzny przez te dwie półproste nazywamy kątem. Półproste nazywamy ramionami kąta, ich wspólny początek — wierzchołkiem kąta; figurę wyciętą z płaszczyzny przez ramiona kąta nazywamy wnętrzem kąta, a sumę wnętrza kąta i obu ramion kąta — obszarem kąta.*

Obierzmy na płaszczyźnie  $\Sigma$  punkt  $O$  i wyprowadźmy z niego dwie różne półproste  $OA^*$  i  $OB^*$  i rozważmy figurę będącą sumą tych półprostych

$$OA^* \cup OB^* \quad (76.1)$$

Figura ta rozcina płaszczyznę  $\Sigma$  na dwie figury  $\Sigma_1, \Sigma_2$ . Każda z figur  $\Sigma_1, \Sigma_2$  po dołączeniu do niej półprostych  $OA^*$  i  $OB^*$  tworzy kąt. Mamy więc dwa kąty

$$\{OA^*, OB^*, \Sigma_1\} \quad \{OA^*, OB^*, \Sigma_2\} \quad (76.2)$$

o wspólnym wierzchołku i wspólnych ramionach, ale różnych wnętrzach  $\Sigma_1, \Sigma_2$  i obszarach  $\Sigma_1 \cup OA^* \cup OB^*, \Sigma_2 \cup OA^* \cup OB^*$ , które tylko brzeg mają wspólny. Każdy z tych kątów nazywamy „kątem  $AOB$ ” i oznaczamy

$$\sphericalangle AOB \quad (76.3)$$

Symbol ten i nazwa nie są jednoznaczne, nie wskazują który z kątów (76.2) mamy na myśli. Dlatego zwykle dodajemy jakąś informację wyróżniającą ten z kątów (76.2), o który nam chodzi.

Jeśli półproste  $OA^*, OB^*$  nie leżą na jednej prostej, to obszar jednego z kątów wyznaczonych przez te półproste jest wypukły, a obszar drugiego z nich jest niewypukły. To pozwala rozróżnić między sobą te kąty, a mianowicie:

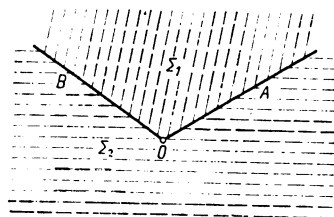
- kąt, którego obszar jest wypukły, nazywamy *wypukłym*,
- kąt, którego obszar jest niewypukły, nazywamy *wklęsłym*.

Dla oznaczenia tych kątów można użyć symboli

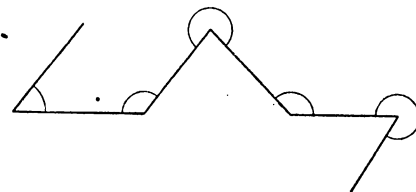
$$\text{wyp} \sphericalangle AOB \quad \text{wkl} \sphericalangle AOB \quad (76.4)$$

Na rys. 76-1 kąt o wnętrzu  $\Sigma_1$  jest wypukły, a kąt o wnętrzu  $\Sigma_2$  — wklęsły.

Na rysunkach zaznaczamy zwykle wnętrza kątów łukami (rys. 76-2).



Rys. 76-1



Rys. 76-2

**Kąt półpełny** jest to kąt, którego ramiona uzupełniają się (do prostej).

**Kąt pełny i kąt zerowy.** Wyobraźmy sobie, że półprosta  $OB^-$  obraca się dokoła punktu  $O$ , dążąc do pokrycia się z półprostą  $OA^-$ . Jakim zmianom ulegają wówczas oba kąty wyznaczone przez te dwie półproste? Wnętrze jednego z tych kątów zanika (staje się zbiorem pustym), a wnętrze drugiego kąta rozszerza się tak, że w końcu obszar tego kąta pokrywa całą płaszczyznę. Gdy półproste  $OA^-$ ,  $OB^-$  pokrywają się, mamy dwa utwory

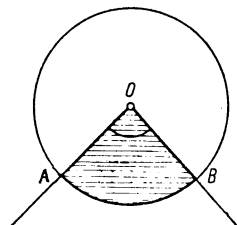
$$\{OA^-, OA^-, \emptyset\} \quad \{OA^-, OA^-, \Sigma - OA^-\} \quad (76.5)$$

Pierwszy z nich ma wnętrze puste, nazywamy go kątem zerowym. Drugi ma obszar pokrywający całą płaszczyznę; nazywamy go kątem pełnym.

Kąty: zerowy, półpełny i pełny — mają obszary wypukłe; jednak nie będziemy tych kątów nazywali wypukłymi. Mówiąc w dalszym ciągu „kąt wypukły”, będziemy mieli na myśli kąt wypukły, który nie jest ani zerowy, ani półpełny, ani pełny.

Uwaga o definicji kąta. Definicja 76.1 określa kąt jako zbiór złożony z wierzchołka, ramion i wnętrza. Prostsza jest definicja określająca kąt jako zbiór punktów, mianowicie ten zbiór, który my nazwalismy obszarem kąta, ale według takiej definicji kąt półpełny nie ma określonego wierzchołka, zaś kąt pełny nie ma ani wierzchołka ani ramion.

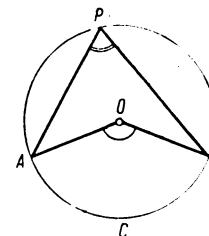
**Kąty w kole.** Kąt środkowy koła jest to kąt, którego wierzchołek jest środkiem tego koła. Na rys. 76-3 są dwa kąty środkowe: jeden wypukły, a drugi wklęsły.



Rys. 76-3. Kąt środkowy wypukły  $\angle AOB$  i wycinek koła odpowiadający temu kątowi

**Wycinkiem koła** nazywamy część wspólną koła i obszaru kąta środkowego. Kątowi środkowemu wypukłemu odpowiada wycinek koła wypukły. Kątowi środkowemu wklęsłemu odpowiada wycinek koła, który jest figurą niewypukłą. Kątowi środkowemu półpełnemu odpowiada półkoło, które może być uważane zarówno za odcinek koła jak i za wycinek koła.

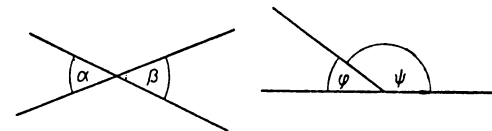
**Kąt wpisany w okrąg** (mówimy też: kąt wpisany w koło) jest to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona przecinają okrąg w dwóch różnych punktach. Punkty te wyznaczają cięciwę, a o kącie mówimy, że jest oparty na tej



Rys. 76-4. Kąt wpisany  $\angle APB$  i kąt środkowy  $\angle AOB$  oparte na tym samym łuku  $ACB$

cięciwie. Punkty te wyznaczają na okręgu dwa łuki, z których jeden jest zawarty w obszarze kąta i mówimy, że kąt jest oparty na tym łuku; drugi z tych łuków ma trzy punkty wspólne z obszarem kąta (są nimi dwa końce łuku i wierzchołek kąta) i mówimy, że kąt jest wpisany w ten łuk.

**Kąty przyległe, kąty wierzchołkowe.** Dwie proste przecinające się wyznaczają 4 kąty wypukłe. Każdy z tych kątów nazywamy kątem dwóch przecinających się prostych. Każde dwa z tych kątów, jeśli mają jedno ramie wspólne, nazywamy ką-



Rys. 76-5. Kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  — wierzchołkowe, kąty  $\varphi$ ,  $\psi$  — przyległe

tami przyległymi, jeśli zaś nie mają ramienia wspólnego nazywamy kątami wierzchołkowymi.

Kątem wierzchołkowym do danego kąta wypukłego nazywamy kąt wypukły, którego ramiona są przedłużeniami ramion danego kąta.

Kątem przyległym do danego kąta wypukłego nazywamy kąt wypukły, który ma z danym kątem jedno ramie wspólne, a którego drugie ramie jest przedłużeniem drugiego ramienia danego kąta (rys. 76-5).

**Kąt między odcinkami.** Niech będą dwa odcinki  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  mające jeden koniec

$B$  wspólny i nie leżące na jednej prostej (takimi odcinkami są dwa kolejne boki łamanej zwyczajnej). Rozważmy kąty wyznaczone przez półproste  $BA^-$  i  $BC^-$   
wyp  $\star ABC$  wkl  $\star ABC$

Każdy z tych kątów będziemy nazywać *kątem między odcinkami*  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$ , dodając ewentualnie określenie: wypukły lub wklęsły.

**Wielokąt.** Zgodnie z aksjomatem IX, linia łamana zwyczajna zamknięta rozcina płaszczyznę na dwie figury, z których jedna jest nieograniczona, a druga ograniczona. O tej ostatniej mówimy, że jest to *część płaszczyzny ograniczona łamaną*.

**Definicja 76.2 (wielokąta).** *Wielokąt jest to figura będąca sumą:*

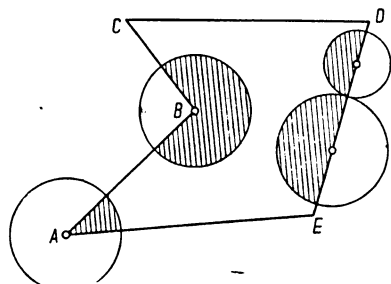
- 1 — łamanej zwyczajnej zamkniętej i
- 2 — części płaszczyzny ograniczonej tą łamaną.

Każda łamana zwyczajna zamknięta wyznacza pewien wielokąt i jest brzegiem tego wielokąta. Część płaszczyzny ograniczona tą łamaną jest wnętrzem tego wielokąta.

*Wierzchołki i boki wielokąta* są to wierzchołki i boki łamanej wyznaczającej ten wielokąt. Odcinek łączący dwa wierzchołki wielokąta, ale nie będący bokiem wielokąta nazywamy *przekątną* wielokąta. Prosta, na której leży przekątna, nazywamy *prostą przekątną*. *Obwód* wielokąta jest to suma długości boków wielokąta.

**Twierdzenie 76.1 (własność brzegu wielokąta).** *Do każdego punktu leżącego na brzegu wielokąta można dobrać takie otoczenie kolowe, że wszystkie boki wielokąta, do których dany punkt brzegowy nie należy, znajdują się zewnątrz tego otoczenia. Brzeg wielokąta rozcina to otoczenie na dwa wycinki kolowe, z których jeden zawiera się w wielokącie, a drugi ma wewnątrz nie zawierające ani jednego punktu wielokąta.*

Dla skrócenia wypowiedzi będziemy pierwszy z tych wycinków nazywać *sektorem wewnętrznym*, a drugi — *sektorem zewnętrznym*. (rys. 76-6).



Rys. 76-6. Otoczenie punktów brzegowych wielokąta. Sektory wewnętrzne tych otoczeń zaznaczono

**Kąty wielokąta.** Każdy wierzchołek wielokąta jest wspólnym końcem dwóch kolejnych boków wielokąta i wierzchołkiem dwóch kątów między tymi bokami. Jeden z tych kątów zawiera w swym obszarze sektor wewnętrzny otoczenia tego wierzchołka,

a drugi — sektor zewnętrzny. Pierwszy z tych kątów nazywamy *kątem wewnętrznym wielokąta przy danym wierzchołku*.

Kąt wewnętrzny wielokąta (krótko: kąt wielokąta) będziemy oznaczać za pomocą jednej litery oznaczającej wierzchołek kąta np.  $\angle A$ , lub za pomocą trzech liter oznaczających wierzchołek kąta i dwa sąsiednie wierzchołki (np. na rys. 76-6  $\angle EAB$ ). Ponadto dla oznaczenia kątów posługujemy się też literami greckimi.

**Wielokąt wypukły.** Wielokąt jest (według def. 75.9) figurą wypukłą, gdy odcinek łączący dwa dowolne punkty należące do wielokąta zawiera się w wielokącie. W przeciwnym razie wielokąt jest niewypukły.

**Twierdzenie 76.2a.** Jeśli wielokąt jest wypukły, to jego wnętrze leży po jednej stronie prostej wyznaczonej przez dowolny bok.

**Twierdzenie 76.2b.** Jeśli wewnątrz wielokąta leży po jednej stronie prostej wyznaczonej przez dowolny bok wielokąta, to wielokąt jest wypukły.

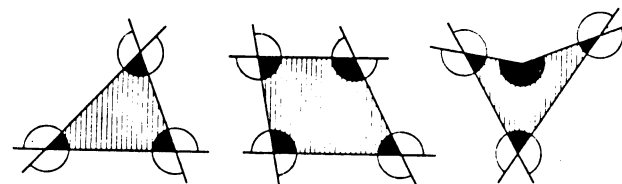
|                       |                                                           |                                                                                |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| wielokąt jest wypukły | tw. 76. 2a<br>$\Rightarrow$<br>tw. 76. 2b<br>$\Leftarrow$ | wnętrze wielokąta leży po jednej stronie prostej wyznaczonej przez dowolny bok |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|

Łącząc twierdzenia 76.2a i 76.2b w jedną wypowiedź, mamy

**Twierdzenie 76.2c** (położenie wielokąta wypukłego względem jego boków). Wielokąt jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jego wnętrze leży po jednej stronie prostej wyznaczonej przez dowolny bok tego wielokąta.

**Twierdzenie 76.3** (o kątach wielokąta wypukłego). Wielokąt jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego kąty wewnętrzne są wypukłe.

**Kąt zewnętrzny wielokąta wypukłego** jest to każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego wielokąta. Na rys. 76-7 wnętrza wielokątów zakreślano, kąty



Rys. 76-7

wewnętrzne zaznaczono, a kąty zewnętrzne zaznaczono łukami; w czworokącie niewypukłym przy jednym wierzchołku występuje kąt wklęsły i tam kąt zewnętrzny nie jest zdefiniowany.

Dalsze wiadomości o kątach — zob.p. 79, 82, 98 i 111.

**Uwaga** (o aksjomatach). W rozdziale XI podaliśmy 9 aksjomatów planimetrii. Ostatni, dziesiąty aksjomat planimetrii dotyczy przekształceń i znajduje się w następnym rozdziale.

## Pytania

1. Wypowiedzieć definicję kąta. Co nazywamy obszarem kąta?
2. Co to jest: kąt półpełny, kąt pełny, kąt zerowy, kąt środkowy w kole, kąt wpisany w koło, kąt między odcinkami?
3. Co to są: kąty dwóch przecinających się prostych, kąty przyległe, kąty wierzchołkowe?
4. Wypowiedzieć definicję wielokąta.
5. Jaką własność ma brzeg wielokąta? Jak określamy kąt wewnętrzny wielokąta?
6. Co to jest wielokąt wypukły?
7. Wymienić własności charakterystyczne dla wielokąta wypukłego.
8. Czym jest twierdzenie 76.2b dla twierdzenia 76.2a?
9. Wypowiedzieć twierdzenie 76.2a używając terminu „warunek konieczny”.
10. Wypowiedzieć twierdzenie 76.2b używając terminu „warunek wystarczający”.
11. Wypowiedzieć twierdzenie 76.2c używając terminu „warunek konieczny i wystarczający”.
12. Wypowiedzieć w ten sam sposób twierdzenie 76.3.

## Odpowiedzi do rozdziału XI

### 72

4.  $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c$   
 $a < b \Rightarrow \sim (b < a)$   
 $a \neq b \Rightarrow (a < b) \vee (b < a)$

### 73

11.  $P \in l; A \in l \wedge B \in l; a \cap b = M;$   
 $P \in a \wedge P \in b \wedge a \parallel l \wedge b \parallel l \Rightarrow a = b$  (jest to część aksjomatu Euklidesa orzekająca, że przez dany punkt  $P$  przechodzi co najwyżej jedna prosta równoległa do danej prostej  $l$ );  
 $A \in l \wedge B \in l \Rightarrow \overline{AB} \subset l$   
 $M \in \overline{AB}^- \wedge N \in \overline{AB}^- \Rightarrow \overline{MN} \subset \overline{AB}^-$   
 $M \in \overline{AB} \wedge N \in \overline{AB} \Rightarrow \overline{MN} \subset \overline{AB}$

### 75

1. Z założenia jest  $AO \leq r, BO \leq r$ . Według prawa trójkąta (72.4) lub (72.5) jest  $AB \leq AO + OB \leq r + r = 2r$ .
2.  $A \in o(S, r) \Leftrightarrow SA = r \Leftrightarrow S \in o(A, r)$ .
3. Jest  $BS < r$ . Oznaczmy  $r - BS$  przez  $p$ . Twierdzimy, że szukany otoczeniem może być  $k(B, p)$  oraz każde otoczenie punktu  $B$  o promieniu mniejszym od  $p$ . Mamy wykazać, że  $k(B, p) \subset k(S, r)$ . W tym celu wystarczy wykazać, że  $M \in k(B, p) \Rightarrow M \in k(S, r)$ . Załóżmy, że  $M \in k(B, p)$ . Zatem  $MB \leq p$ . Wg prawa trójkąta  $MS \leq MB + BS$ , stąd  $MS \leq p + BS = r$  czyli  $M \in k(S, r)$ .

4.  $k(C, p)$ , gdzie  $p < SC - r$

16.  $A, B \in f \Rightarrow AB \subset f$

17.  $A, B \in f_1 \cap f_2 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow A, B \in f_1 \Rightarrow \overline{AB} \subset f_1 \\ \Rightarrow A, B \in f_2 \Rightarrow \overline{AB} \subset f_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} \subset f_1 \cap f_2$

### 76

6. Definicja 75.9.
7. Twierdzenia 76.2c, 76.3.
8. Twierdzenia 76.2a i 76.2b są wzajemnie odwrotne.
9. Warunkiem koniecznym wypukłości wielokąta jest, aby jego wnętrze leżało po jednej stronie prostej wyznaczonej przez każdy bok.
10. Warunkiem wystarczającym wypukłości wielokąta jest, aby jego wnętrze leżało po jednej stronie prostej wyznaczonej przez każdy bok.
11. Warunkiem koniecznym i wystarczającym wypukłości wielokąta jest, aby jego wnętrze leżało po jednej stronie prostej wyznaczonej przez każdy bok.
12. Warunkiem koniecznym i wystarczającym wypukłości wielokąta jest, aby wszystkie jego kąty wewnętrzne były wypukłe.

## Rozdział XII

### PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE NA PŁASZCZYŹNIE

#### 77. Izometria. Symetria osiowa

**Przekształcenia geometryczne. Definicja 77.1** (przekształcenia). *Jeśli każdemu punktowi  $P$  figury  $F$  został jednoznacznie przyporządkowany pewien punkt  $P'$ , to mówimy, że zostało określone przekształcenie figury  $F$ . Punkt  $P'$  nazywamy obrazem punktu  $P$  w danym przekształceniu. Zbiór obrazów wszystkich punktów figury  $F$  w danym przekształceniu stanowi pewną figurę  $F'$  i figurę tę nazywamy obrazem figury  $F$  w danym przekształceniu.*

Jeśli przekształcenie oznaczymy literą  $T$ , to zapis

$$T(P) = P' \quad (77.1)$$

który odczytujemy: „ $T$  od  $P$  jest  $P$  prim” oznacza: „Wynikiem zastosowania do punktu  $P$  przekształcenia  $T$  jest punkt  $P'$ ” lub „Obrazem punktu  $P$  w przekształceniu  $T$  jest punkt  $P'$ ”, zaś zapis

$$T(F) = F' \quad (77.2)$$

oznacza: „Wynikiem zastosowania do figury  $F$  przekształcenia  $T$  jest figura  $F'$ ” albo „Obrazem figury  $F$  w przekształceniu  $T$  jest figura  $F'$ ”

Punkt  $P_0$  figury  $F$  nazywamy *punktem stałym (niezmienniczym)* przekształcenia  $T$ , jeśli  $T(P_0) = P_0$ .

**Składanie przekształceń.** Jeśli figurę  $F$  poddano pewnemu przekształceniu  $T$ , otrzymując w wyniku figurę  $F'$

$$T(F) = F' \quad (77.3)$$

a następnie figurę  $F'$  poddano drugiemu przekształceniu, nazwijmy je  $U$ , otrzymując figurę  $F''$

$$U(F') = F'' \quad (77.4)$$

to przekształcenie prowadzące od figury  $F$  do figury  $F''$  nazywamy *złożeniem* (albo *iloczynem*) przekształceń  $T$  i  $U$ . Zapis tego przekształcenia otrzymamy wstawiając (77.3) do (77.4)

$$U(T(F)) = F''$$

Jednak będziemy opuszczać nawiasy zewnętrzne i stosować zapis

$$UT(F) = F'' \quad (77.5)$$

Przekształcenie złożone z trzech przekształceń  $T$ ,  $U$ ,  $W$  zapiszemy

$$WUT(F) = F'''$$

Składanie przekształceń nie zawsze jest *przemienne*

$$\text{nie zawsze } UT = TU$$

Składanie przekształceń jest zawsze *łączne*

$$W(UT) = (WU)T \quad (77.6)$$

**Przekształcenie odwrotne.** Jeśli przekształcenie  $T$  figury  $F$  na figurę  $F'$  ma tę własność, że dwom różnym punktom figury  $F$  przyporządkowuje zawsze dwa różne punkty figury  $F'$

$$P_1 \neq P_2 \Rightarrow T(P_1) \neq T(P_2) \quad (77.7)$$

to przekształcenie  $T$  nazywamy *wzajemnie jednoznacznym* (czyli *odwracalnym*). Wówczas można utworzyć następującą odpowiedniość:

— Każdemu punktowi figury  $F'$  niechaj będzie przyporządkowany ten punkt  $P$  figury  $F$ , którego obrazem w przekształceniu  $T$  był punkt  $P'$ . Taką odpowiedniość nazywamy *przekształceniem odwrotnym* do przekształcenia  $T$ . Streszczeniem tych rozważań jest następująca definicja:

**Definicja 77.2** (przekształcenia odwrotnego). Przekształcenie  $U$  nazywamy *odwrotnym* do przekształcenia  $T$ , gdy dla każdego punktu  $P$  figury  $F$  zachodzi równość

$$U(P') = P \Leftrightarrow T(P) = P' \quad (77.8)$$

Jeśli dowolny punkt  $P$  figury  $F$  poddamy przekształceniu  $T$ , a następnie otrzymany obraz  $P'$  poddamy przekształceniu odwrotnemu  $U$ , to w wyniku złożenia tych dwóch przekształceń z powrotem mamy punkt  $P$

$$UT(P) = P \quad (77.9)$$

Przekształcenia  $U$  i  $T$  znoszą się ze sobą wzajemnie.

**Symbol przekształcenia odwrotnego.** Przekształcenie odwrotne do przekształcenia  $T$  oznaczamy symbolem

$$T^{-1} \quad (77.10)$$

który można odczytać: „ $T$  odwrotne” albo „ $T$  u góry minus 1”, ale którego nie należy odczytywać: „ $T$  w potęgę minus pierwszej” gdyż symbol ten nie oznacza liczby w potęgę minus pierwszej.

W matematyce staramy się zawsze o to, aby jednym symbolem nie oznaczać różnych pojęć. Jeśli więc przekształcenie odwrotne oznaczono symbolem takim samym jak odwrotność liczby, np.  $5^{-1} = 0,2$ , to widocznie istnieje jakiś powód. Po-

wodem tym jest tożsamość (77.9). Jeśli zapiszemy ją, używając symbolu (77.10), to otrzymamy

$$T^{-1} T(P) = P \quad (77.11)$$

Wzajemne znoszenie się przekształceń  $T$  i  $T^{-1}$  bardzo przypomina upraszczanie wyrażeń algebraicznych, np.  $5^{-1} \cdot 5 \cdot x = x$ .

**Przekształcenie tożsamościowe. Definicja 77.3.** Przekształcenie, które każdemu punktowi figury  $F$  przyporządkowuje ten sam punkt, nazywamy *przekształceniem tożsamościowym* figury  $F$ .

Złożenie dwóch przekształceń wzajemnie odwrotnych jest przekształceniem tożsamościowym.

**Przekształcenie izometryczne. Definicja 77.4.** Przekształcenie figury  $F$  zachowujące odległości punktów tej figury (tj. przekształcenie, w którym odległość obrazów dwóch dowolnych punktów figury  $F$  jest równa odległości tych punktów) nazywamy *przekształceniem izometrycznym*<sup>1)</sup> figury  $F$ .

Przekształcenie izometryczne płaszczyzny na płaszczyznę nazywamy krótko *izometrią*.

Izometria jest przekształceniem odwracalnym; przekształcenie odwrotne do izometrii jest izometrią. Przekształcenie tożsamościowe płaszczyzny jest izometrią. Istnieją izometrie nietożsamościowe: symetrie osiowe, symetrie środkowe, translacje, symetrie z poślizgiem i obroty, będą one przedmiotem naszych rozważań.

**Izometria nietożsamościowa o dwóch punktach stałych.** Niech będą dane na płaszczyźnie dwa różne punkty  $A, B$  i niech  $X$  będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Odległości punktu  $X$  od punktów  $A, B$  oznaczmy:  $a = AX, b = BX$ .

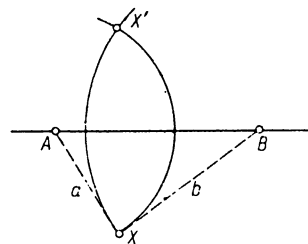
**Twierdzenie 77.1.** Jeśli istnieje izometria nietożsamościowa o punktach stałych  $A, B$ , to

1 — dowolny punkt  $X$ , różny od  $A$  i od  $B$ , ma w tej izometrii obraz  $X'$  taki, że  $X$  i  $X'$  są punktami wspólnymi okręgów

$$o(A, a), \quad o(B, b) \quad \text{gdzie} \quad a = AX, \quad b = BX;$$

2 — każdy punkt prostej  $AB$  jest punktem stałym tej izometrii;

3 — izometria taka istnieje co najwyżej jedna.



Rys. 77-1

<sup>1)</sup> Gr. *izos* — równy, *metron* — miara

**Dowód tezy 1.** W izometrii odległość obrazów równa się odległości punktów. Obrazem  $X$  jest  $X'$ , ale obrazem  $A$  jest ten sam punkt  $A$ . Zatem  $AX' = AX = a$ , co oznacza, że  $X$  i  $X'$  leżą na okręgu  $o(A, a)$ . Tak samo wykazuje się, że  $X$  i  $X'$  leżą na okręgu  $o(B, b)$ . Punkty  $X$  i  $X'$  są punktami wspólnymi tych okręgów (rys. 77-1).

**Dowód tezy 2.** Jeśli  $X$  leży na prostej  $AB$ , to zgodnie z tw. 73.4

$$AB = AX + XB \quad \text{lub} \quad AB = |AX - XB|$$

czyli

$$AB = a + b \quad \text{lub} \quad AB = |a - b|$$

co, wobec tw. 75.6, oznacza, że okręgi są styczne zewnętrznie lub wewnętrznie, więc mają tylko jeden punkt wspólny,  $X = X'$ , czyli  $X$  jest punktem stałym przekształcenia.

**Dowód tezy 3.** Jeśli  $X$  nie leży na prostej  $AB$ , to według tw. 73.3

$$|AX - XB| < AB < AX + XB$$

czyli

$$|a - b| < AB < a + b$$

co wobec tw. 75.6 oznacza, że okręgi przecinają się i mają dwa punkty wspólne leżące po różnych stronach prostej  $AB$ . Jeden z tych punktów to punkt  $X$ .

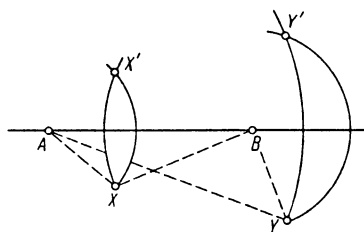
Aby wykazać, że drugim z tych punktów jest  $X'$ , wystarczy wykazać, że  $X \neq X'$ . Otóż, gdyby  $X = X'$ , czyli gdyby jakiś punkt  $X$  niewspółliniowy z punktami  $A, B$  był punktem stałym, to stosując udowodnioną już tezę 2 do punktów  $A$  i  $X$  otrzymalibyśmy, że wszystkie punkty prostej  $AX$  są punktami stałymi i także prosta  $BX$  oraz każda prosta przecinająca dowolne dwie z prostych  $AB, AX$  i  $BX$  byłyby pokryte punktami stałymi i każdy punkt płaszczyzny byłby punktem stałym, czyli przekształcenie byłoby tożsamościowe (otrzymany tu ważny rezultat formułujemy poniżej w postaci twierdzenia 77.3).

Wykazaliśmy, że w izometrii nietożsamościowej o punktach stałych  $A, B$  punkt  $X$  nie leżący na prostej  $AB$  nie może pokrywać się ze swym obrazem  $X'$ . Zatem  $X$  jest jednym, a  $X'$  drugim punktem wspólnym okręgów  $o(A, a), o(B, b)$ . Wynika stąd, że rozważana izometria (o ile istnieje) jest tylko jedna, gdyż dowolnemu punktowi  $X$  odpowiadać może tylko jeden obraz  $X'$ .

**Konstrukcja.** Z tezy 1 twierdzenia 77.1 wynika konstrukcja obrazu punktu  $X$ : z punktów  $A, B$  jako środków należy zatoczyć okręgi przechodzące przez punkt  $X$  (rys. 77-1) i drugi punkt wspólny tych okręgów jest obrazem  $X'$  punktu  $X$ , o ile  $X$  nie leży na prostej  $AB$ . Obrazem punktu leżącego na prostej  $AB$  jest ten sam punkt. Uwaga. Środkami okręgów wyznaczających obraz  $X'$  mogą być dwa dowolne punkty prostej  $AB$ .

Powyższa konstrukcja określa jednoznacznie pewne przekształcenie. Dla dowolnych punktów  $X, Y$  (rys. 77-2) możemy wyznaczyć ich obrazy  $X', Y'$ . Konstrukcja zapewnia, że  $AX = AX', BX = BX', AY = AY', BY = BY'$ , ale czy jest to izo-

metria? czy jest również  $XY = X'Y'$ ? Odpowiedzi na to pytanie nie można uzyskać z dotychczas wypowiedzianych aksjomatów. Przyjmujemy, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca i to stanowi ostatni aksjomat planimetrii.



Rys. 77-2

**Aksjomat X.** Dla każdych dwóch punktów płaszczyzny istnieje izometria nie-tożsamościowa, której punktami stałymi są te dwa punkty.

Zbiór wszystkich punktów stałych tej izometrii jest prostą przechodzącą przez dane dwa punkty. Wynika to z tw. 77.1.

**Symetria osłowa.** Definicja 77.5. Izometrię nietożsamościową, której punktami stałymi są punkty pewnej prostej, nazywamy *symetrią osiową względem tej prostej*, a tę prostą nazywamy *osią symetrii*.

Jeśli oś symetrii oznaczono  $a$ , to symetrię względem tej osi będzie oznaczał

$$S_a$$

Jeśli  $X'$  jest obrazem punktu  $X$  w symetrii  $S_a$ , to piszemy

$$S_a(X) = X'$$

i mówimy, że *punkt  $X'$  jest symetryczny do punktu  $X$  względem prostej  $a$* . Jeśli figura  $F'$  jest obrazem figury  $F$  w symetrii  $S_a$ , to piszemy

$$S_a(F) = F'$$

i mówimy, że *figura  $F'$  jest symetryczna do figury  $F$  względem prostej  $a$* .

**Własności symetrii osiowej. Twierdzenie 77.2**

1° Symetria względem prostej  $AB$  jest jedyną nietożsamościową izometrią, w której punkty  $A, B$  są stałe.

2° Symetria względem prostej  $a$  przekształca każdą z dwóch półpłaszczyzn o krańdziej  $a$  na uzupełniającą półpłaszczyznę.

3° Przekształceniem odwrotnym do symetrii względem prostej  $a$  jest ta sama symetria

$$S_a(X) = X' \Leftrightarrow S_a(X') = X$$

(77.12)

**Dowód.** Twierdzenie to wynika z aksjomatu X i twierdzenia 77.1.

**Uwaga.** Wobec związku (77.12) można mówić o *wzajemnej symetrii punktów  $X$  i  $X'$  względem prostej  $a$*  i tak samo o *wzajemnej symetrii dwóch figur względem pewnej prostej*.

**Figury osiowo symetryczne. Definicja 77.6.** Figurę, która jest symetryczna do siebie samej względem pewnej prostej, nazywamy *figurą osiowo symetryczną*. Prostą, względem której figura jest osiowo symetryczna, nazywamy *osią symetrii* tej figury.

**Przykład.** Okrąg jest figurą osiowo symetryczną względem każdej prostej przechodzącej przez środek tego okręgu.

Aby to wykazać, skorzystamy z tego, że symetria jest izometrią, a więc zachowuje odległości. Niech  $X$  będzie dowolnym punktem okręgu  $o(C, r)$ . Jest  $CX = r$ , więc  $C'X' = r$ , ale  $C' = C$ , więc  $CX' = r$ , co oznacza, że obraz  $X'$  punktu  $X$  również należy do okręgu  $o(C, r)$ .

**Ogólne własności izometrii.** Na wstępie wypowiemy twierdzenie udowodnione na str. 45 w ramach dowodu tezy 3 twierdzenia 77.1.

**Twierdzenie 77.3.** Jeśli w pewnej izometrii trzy punkty niewspółliniowe są stałe, to izometria ta jest przekształceniem tożsamościowym.

**Twierdzenie 77.4.** Dwie izometrie zgodne w trzech niewspółliniowych punktach są zgodne w każdym punkcie płaszczyzny.

**Dowód.** Załóżmy, że izometrie  $T$  i  $S$  są zgodne w trzech niewspółliniowych punktach  $A, B, C$ . Jest więc

$$S(A) = T(A) \quad S(B) = T(B) \quad S(C) = T(C) \quad (77.13)$$

Niech  $T^{-1}$  będzie izometrią odwrotną do  $T$ . Stosując ją obustronnie do (77.13), dostajemy

$$T^{-1}S(A) = A \quad T^{-1}S(B) = B \quad T^{-1}S(C) = C$$

Złożenie  $T^{-1}S$  jest izometrią o trzech punktach niewspółliniowych stałych, zatem (tw. 77.3) izometria ta jest tożsamościową. Oznaczając przekształcenie tożsamościowe  $E$ , mamy

$$\begin{aligned} T^{-1}S &= E \\ T^{-1}S &= TE \\ ES &= T \\ S &= T \end{aligned}$$

**Twierdzenie 77.5.** Izometria zachowuje:

- 1 – *współliniowość punktów* (obrazem prostej jest prosta),
- 2 – *uporządkowanie punktów na prostej* (obrazem odcinka jest odcinek),
- 3 – *wypukłość figury* (obrazem figury wypukłej jest figura wypukła).

**Dowód** tezy 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby punkt  $X$  leżał na prostej  $AB$  między punktami  $A, B$  jest równość

$$AX + XB = AB$$

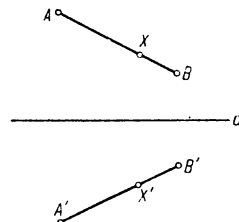
Izometria zachowuje odległości, więc powyższa równość przenosi się na obrazy punktów  $A, B, X$  i jest

$$A'X' + X'B' = A'B'$$

ale to oznacza, że  $X'$  leży na prostej  $A'B'$  między  $A'$  i  $B'$ , c.n.u.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Skrót: c.n.u oznacza: „co należało udowodnić”.

Rys. 77-3 jest ilustracją powyższego twierdzenia w przypadku, gdy izometria jest symetrią względem prostej  $a$ .



Rys. 77-3

Dowody tez 2 i 3 — podobne.

Podobnie dowodzimy, że w dowolnej izometrii:

- obrazem okręgu jest okrąg; obrazem koła jest koło;
- obrazem brzegu, wnętrza i zewnątrz dowolnej figury jest odpowiednio: brzeg, wnętrze i zewnątrz obrazu tej figury.

**Figury przystające. Definicja 77.7.** Dwie figury nazywamy przystającymi (jedną do drugiej), gdy istnieje izometria przekształcająca jedną figurę w drugą.

Relacja przystawania jest:

- zwrotna (każda figura jest przystająca do siebie samej),
- symetryczna (jeśli  $f$  przystaje do  $f'$ , to  $f'$  przystaje do  $f$ ),
- przechodnia (jeśli  $f$  przystaje do  $f'$  i  $f'$  przystaje do  $f''$ , to  $f$  przystaje do  $f''$ ).

### Pytania

1. Wypowiedzieć definicję: przekształcenia, przekształcenia odwrotnego, izometrii i symetrii osiowej.
2. Jak konstruujemy obraz punktu w symetrii osiowej?
3. Pokazać na rysunku, że złożenie dwóch symetrii o osiach równoległych jest zależne od kolejności wykonywania tych przekształceń, a złożenie dwóch symetrii o osiach prostopadłych jest niezależne od kolejności przekształceń składowych.
4. Co to znaczy, że figura jest osiowo symetryczna?
5. Wymienić kilka własności izometrii.

## 78. Proste prostopadłe

**Prostopadłość. Definicja 78.1.** Prostą  $n$  nazywamy prostopadłą do prostej  $a$ , co zapisujemy

$$n \perp a$$

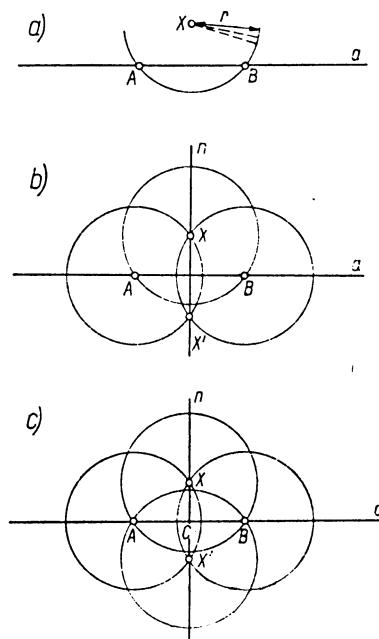
gdy jest osią symetrii prostej  $a$  i nie pokrywa się z prostą  $a$ .

**Twierdzenie 78.1** (o prostopadłej). Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi dokładnie jedna prosta prostopadła do danej prostej.

Poniższy dowód wskazuje konstrukcję prostopadłej.

**Dowód.** Niech będzie dana prosta  $a$  oraz punkt  $X$ .

Przypadek  $X \notin a$ . Konstruujemy punkt  $X'$  symetryczny do punktu  $X$  względem prostej  $a$ . Występujące w tej konstrukcji punkty  $A, B$  (zob. rys. 77-1) mogą być obrane na prostej  $a$  w dowolny sposób, jednak dla naszego dowodu oberzemy je w równych odległościach od  $X$ . W tym celu zakreślmy okrąg  $o(X, r)$  o promieniu  $r$  na tyle dużym, aby okrąg ten miał dwa punkty wspólne z prostą  $a$ . Punkty te oznaczamy  $A, B$ . Jest  $AX = BX = r$  (rys. 78-1a). Następnie zakreślmy okręgi  $o(A, r)$ ,  $o(B, r)$ . Punkt wspólny tych okręgów, różny od  $X$  oznaczamy  $X'$ ; jest to punkt symetryczny do  $X$  względem  $a$ . Prostą  $XX'$  oznaczamy  $n$  (rys. 78-1b).



Rys. 78-1. Konstrukcja prostopadłej do prostej  $a$  przechodzącej przez punkt  $X$  nie leżący na  $a$

Wykażemy, że  $n$  jest prostopadłą do  $a$ . W tym celu trzeba wykazać, że  $n$  jest osią symetrii prostej  $a$ . Najpierw wykazemy, że na odwrót:  $a$  jest osią symetrii prostej  $n$ . Otóż

$$S_a(X) = X' \quad (\text{to wynika z konstrukcji})$$

$$S_a(X') = X \quad (\text{to wynika z (77.12)})$$

Zgodnie z tw. 77.5 – 1°, obrazem prostej  $XX'$  musi być prosta  $X'X$ , ale to jest jedna i ta sama prosta  $n$ , więc

$$S_a(n) = n \quad \text{czyli} \quad a \perp n$$

Teraz wykażemy, że  $n$  jest osią symetrii prostej  $a$ . Kreślimy okrąg  $o(X', r)$ . Okrąg ten musi przechodzić przez  $A$  i  $B$  (rys. 78-1c). Mamy dwie pary okręgów takie, że punkty przecięcia jednej pary są środkami okręgów drugiej pary i na odwrót. Wobec tej wzajemności role prostych  $a, n$  mogą być zamienione. Stąd wynika, że  $n$  jest osią symetrii prostej  $a$ , czyli  $n \perp a$ . Wykazaliśmy, że istnieje prosta przechodząca przez punkt  $X$  i prostopadła do  $a$ .

Uwaga 1 (o symetryczności relacji  $\perp$ ). Powyżej wykazaliśmy, że jeśli są dane dwie różne proste i jedna z nich jest osią symetrii drugiej to i druga jest osią symetrii pierwszej

$$a \perp n \Leftrightarrow n \perp a \quad (78.1)$$

Relacja prostopadłości jest symetryczna; dlatego mówimy o *wzajemnej prostopadłości* dwóch prostych.

Uwaga 2 (o wzajemnym połowieniu się odcinków  $\overline{AB}$  i  $\overline{XX'}$ ). Oznaczmy przez  $C$  punkt wspólny prostych  $a$  i  $n$ . Jest to punkt niezmienniczy względem  $S_a$  i  $S_n$ . Z niezmienniczości względem  $S_n$  wynika

$$S_n(A) = B \wedge S_n(C) = C \Rightarrow S_n(\overline{AC}) = \overline{BC} \Rightarrow AC = BC$$

co oznacza, że  $n$  jest osią symetrii odcinka  $\overline{AB}$  i połowi ten odcinek. Podobnie wykazujemy, że prosta  $a$  jest osią symetrii odcinka  $\overline{XX'}$  i połowi ten odcinek. Punkt  $C$  jest środkiem odcinków  $\overline{AB}$  i  $\overline{XX'}$ .

Należy jeszcze wykazać, że istnieje tylko jedna prostopadła do  $a$  przechodząca przez  $X$ . Niech  $x$  będzie prostą przechodzącą przez  $X$  i prostopadłą do  $a$

$$x \perp a$$

Wobec (78.1) jest też  $a \perp x$ , czyli  $a$  jest osią symetrii prostej  $x$ ,  $S_a(x) = x$ . Punkt  $X$  leży na  $x$ , więc jego obraz  $S_a(X) = X'$  musi leżeć na  $x$ . Zatem  $x$  jest prostą  $XX'$ , c.n.u.

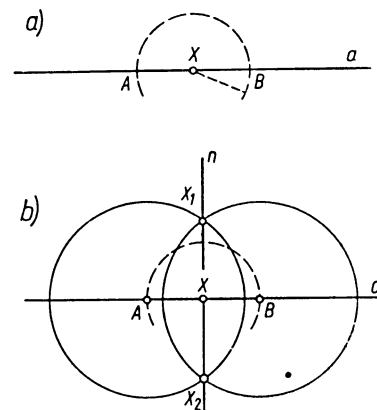
Przypadek  $X \in a$ . Jako punkty  $A, B$  potrzebne do konstrukcji prostopadłej wybieramy dwa punkty leżące na prostej  $a$  po przeciwnych stronach punktu  $X$ , równoodległe od  $X$  (rys. 78-2a):

$$AX = XB$$

Z punktów  $A, B$  zakreślamy okręgi  $o(A, r)$  i  $o(B, r)$  o promieniu  $r$  większym od  $AX$ . Okręgi te mają dwa punkty wspólne  $X_1, X_2$  (rys. 78-2b). Prosta  $n$ , wyznaczona przez nie, jest prostopadła do  $a$ , (wynika to z pierwszej części dowodu), trzeba tylko wykazać, że ta prosta przechodzi przez  $X$ . Zgodnie z uwagą 2, prosta  $n$  połowi odcinek  $\overline{AB}$ . Ale środkiem odcinka  $\overline{AB}$  jest  $X$ , więc  $X$  musi leżeć na  $n$ .

Trzeba jeszcze wykazać, że jest to jedyna prostopadła do  $a$  przechodząca przez  $X$ . Otóż dowolna prosta  $x$  przechodząca przez  $X$ , różna od  $n$  i różna od  $a$ , leży po róż-

nych stronach prostej  $n$ . Tymczasem w symetrii  $S_a$  obrazem półpłaszczyzny o krawędzi  $n$  jest ta sama półpłaszczyzna, zatem nie może być  $S_a(x) = x$ . Więc  $a$  nie jest osią symetrii prostej  $x$ , stąd wobec (78.1) także  $x$  nie jest osią symetrii pros-



Rys. 78-2. Konstrukcja prostopadłej do prostej  $a$  przechodzącej przez punkt  $X$  leżący na  $a$

tej  $a$ , czyli  $x$  nie jest prostopadła do  $a$ . Wykazaliśmy, że prosta  $n$  jest jedyną prostopadłą do  $a$  przechodzącą przez  $X$ .

**Twierdzenie 78.2** (prostopadłość a równoległość). I. *Dwie proste, prostopadłe do trzeciej prostej, są równoległe*

$$n \perp a \wedge m \perp a \Rightarrow n \parallel m \quad (78.2)$$

II. *Jeśli z dwóch prostych równoległych jedna jest prostopadła do pewnej prostej, to i druga z nich jest prostopadła do tej prostej*

$$n \parallel m \wedge m \perp a \Rightarrow n \perp a \quad (78.3)$$

III. *Jeśli dwie proste przecinają się, to prostopadłe do nich też przecinają się*

$$n \perp a \wedge m \perp b \wedge a \nparallel b \Rightarrow n \nparallel m \quad (78.4)$$

IV. *Jeśli z dwóch prostych jedna jest prostopadła do pewnej prostej, a druga nie jest prostopadła do tej prostej, to te dwie proste nie mogą być równoległe*

$$n \perp a \wedge \sim(m \perp a) \Rightarrow n \nparallel m \quad (78.5)$$

**Prostopadłość odcinków. Kąt prosty. Definicja 78.2.** Dwa odcinki nazywamy *prostopadłymi*, jeśli są one niezerowe i prosta zawierająca jeden odcinek jest prostopadła do prostej zawierającej drugi odcinek. Podobnie określamy prostopadłość odcinka lub półprostej do półprostej lub prostej. *Kątem prostym* nazywamy kąt wypukły o ramionach prostopadłych.

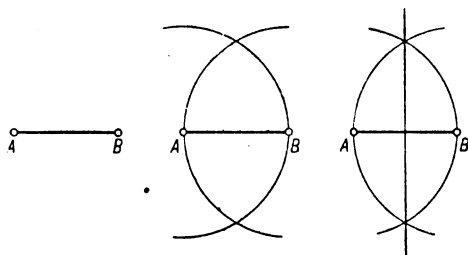
**Symetralna odcinka.** Odcinek niezerowy ma dwie osie symetrii. Są nimi:

- prosta, na której leży odcinek,
- prosta, prostopadła do odcinka i przechodząca przez jego środek.

Istnienie pierwszej osi symetrii jest oczywiste. Istnienie drugiej wynika z uwagi 2 do twierdzenia 78.1. W symetrii względem pierwszej osi każdy punkt odcinka jest niezmienniczy. W symetrii względem drugiej osi tylko środek odcinka jest niezmienniczy, inne punkty odcinka są wzajemnie symetryczne, w szczególności końce odcinka są wzajemnie symetryczne. Tę drugą oś symetrii nazywamy symetralną odcinka.

**Definicja 78.3** (symetralnej odcinka). *Symetralną odcinka niezerowego nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka i przechodzącą przez jego środek.*

Rysunek 78-3 pokazuje konstrukcję symetralnej odcinka.



Rys. 78-3. Konstrukcja symetralnej odcinka  $\overline{AB}$

**Twierdzenie 78.3a** (o położeniu punktu względem symetralnej odcinka i względem końców odcinka). I. *Jeśli punkt  $X$  leży na symetralnej odcinka  $\overline{AB}$ , to*

$$XA = XB$$

II. *Jeśli punkt  $X$  leży po tej samej stronie symetralnej odcinka  $\overline{AB}$ , co punkt  $A$ , to*

$$XA < XB$$

III. *Jeśli punkt  $X$  leży po tej samej stronie symetralnej odcinka  $\overline{AB}$ , co punkt  $B$ , to*

$$XA > XB$$

**Dowód.** I. Niech  $n$  będzie symetralną odcinka  $\overline{AB}$ . Jest  $S_n(A) = B$ ,  $S_n(X) = X$ , stąd  $AX = BX$ .

II. Punkt  $X$  leży po przeciwnej stronie prostej  $n$  niż punkt  $B$ , więc odcinek  $\overline{XB}$  przecina prostą  $n$  w pewnym punkcie  $N$ . Jest

$$XB = XN + NB \quad (78.6)$$

Ponieważ  $XA < XN + NA$ , zaś  $NA = NB$  (gdyż do  $N$  stosuje się udowodnioną już część I tego twierdzenia), więc

$$XA < XN + NB \quad (78.7)$$

Z porównania (78.6) i (78.7) widać, że  $XA < XB$ .

III. Dowód tej części twierdzenia analogiczny do poprzedniego.

Uwaga. Twierdzenia 78.3a tworzą zamknięty układ twierdzeń, więc twierdzenia odwrotne do nich są prawdziwe.

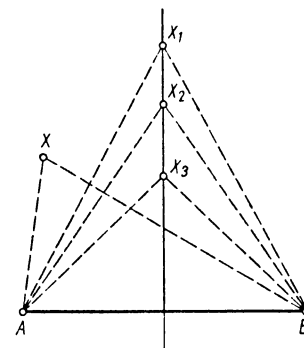
**Twierdzenie 78.3b** (odwrotne do poprzedniego). *Niech  $\overline{AB}$  będzie odcinkiem niezerowym, zaś  $n$  symetralną tego odcinka.*

I. *Jeśli  $XA = XB$ , to  $X$  leży na  $n$ .*

II. *Jeśli  $XA < XB$ , to  $X$  leży po tej samej stronie  $n$ , co  $A$  (rys. 78-4).*

III. *Jeśli  $XA > XB$ , to  $X$  leży po tej stronie  $n$ , co  $B$ .*

Jako wniosek z powyższych dwóch twierdzeń wypowiemy następujące



Rys. 78-4. Punkty leżące na symetralnej odcinka  $\overline{AB}$  spełniają równości  $AX_1 = BX_1$ ,  $AX_2 = BX_2$ ,  $AX_3 = BX_3$

**Twierdzenie 78.3c** (o symetralnej odcinka). *Symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległości od końców tego odcinka są równe (rys. 78-4, punkty  $X_1, X_2, X_3$ ).*

Ponieważ każda izometria zachowuje odległości punktów, więc jeśli w pewnej izometrii obrazem odcinka  $\overline{AB}$  i jego symetralnej  $n$  jest pewien odcinek  $\overline{A'B'}$  i pewna prosta  $n'$ , to  $n'$  jest symetralną odcinka  $\overline{A'B'}$ . Innymi słowy: W izometrii obraz symetralnej odcinka jest symetralną obrazu odcinka.

**Twierdzenie 78.4** (o zachowaniu prostopadłości w izometrii). *Izometria zachowuje prostopadłość.*

**Okrąg opisany. Definicja 78.4.** Jeśli wszystkie wierzchołki wielokąta leżą na pewnym okręgu, to okrąg ten oraz koło ograniczone tym okręgiem nazywamy *opisanymi* na wielokącie, zaś wielokąt nazywamy *wpisanym* w ten okrąg i w to koło.

Okrąg opisany na wielokącie (o ile istnieje) ma środek równoodległy od wszystkich wierzchołków wielokąta i środek ten jest punktem wspólnym symetralnych wszystkich boków wielokąta. Nie każdy wielokąt da się wpisać w okrąg, natomiast każdy trójkąt da się wpisać w okrąg. Mówi o tym następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 78.5** (o symetralnych boków trójkąta). *Trzy symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.*

**Dowód.** W trójkącie  $ABC$  każdy punkt symetralnej boku  $\overline{AB}$  jest równoodległy od  $A$  i od  $B$ . Każdy punkt symetralnej boku  $\overline{BC}$  jest równoodległy od  $B$  i od  $C$ . Żadnego

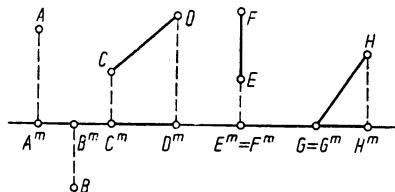
dwa boki trójkąta nie mogą być równoległe, a więc (tw. 78.2 III) ich symetralne przecinają się w pewnym punkcie  $O$ . Jest  $OA = OB = OC$ ;  $O$  jest środkiem okręgu przechodzącego przez  $A, B, C$ . Wobec  $OA = OC$  punkt  $O$  leży na symetralnej boku  $AC$ .

**Rzut prostokątny. Definicja 78.5.** Rzut równoległy, w którym kierunek rzutu jest prostopadły do rzutni, nazywamy *rzutem prostokątnym*.

Rzut prostokątny punktu  $A$  na prostą  $m$  będziemy oznaczać

$A^m$

(czytamy:  $A$  u góry  $m$ ). Na rys. 78-5 pokazano rzuty punktów i odcinków.



Rys. 78-5

**Definicja 78.6.** Jeśli punkt  $A$  nie leży na prostej  $m$ , to o każdym odcinku poprowadzonym z punktu  $A$  do dowolnego punktu prostej  $m$  mówimy, że jest to *odcinek zawarty między punktem  $A$  i prostą  $m$* .

Jeden z tych odcinków jest prostopadły do  $m$ , pozostałe nazywamy *pochyłymi* względem prostej  $m$ .

**Twierdzenie 78.6** (o odcinkach zawartych między punktem i prostą).

I. Jeśli dwa odcinki zawarte między danym punktem i daną prostą są równe, to ich rzuty prostokątne na tę prostą też są równe.

II. Jeśli dwa odcinki zawarte między danym punktem i daną prostą nie są równe, to ich rzuty prostokątne na tę prostą nie są równe i większemu odcinkowi odpowiada większy rzut.

Dowód opiera się na twierdzeniu 78.3.

Twierdzenia 78.6 I i II tworzą układ zamknięty, więc twierdzenia odwrotne do nich są prawdziwe, a w szczególności twierdzenie odwrotne do tw. 78.6 II: Jeśli dwa odcinki zawarte między danym punktem i daną prostą mają rzuty prostokątne na tę prostą nie równe, to odcinki te nie są równe i ten z nich jest większy, który ma większy rzut. Wynika stąd że z odcinków zawartych między danym punktem i daną prostą najkrótszy jest ten, którego rzut jest zerowy. Takim odcinkiem jest odcinek łączący dany punkt z jego rzutem prostokątnym na daną prostą. Udowodniliśmy w ten sposób

**Twierdzenie 78.7** (o odcinku prostopadłym i odcinkach pochyłych). *Wśród odcinków zawartych między danym punktem i daną prostą najkrótszym jest odcinek prostopadły. Innymi słowy: Odległość danego punktu od jego rzutu prostokątnego*

*na daną prostą jest mniejsza niż odległość tego punktu od każdego innego punktu tej prostej.*

**Odległość punktu od dowolnej figury. Definicja 78.7.** *Odległością punktu od dowolnej figury niepustej nazywamy długość promienia największego otoczenia kołowego tego punktu, wewnątrz którego nie znajduje się żaden punkt tej figury.* Jeśli otoczenie takie nie istnieje, mówimy, że odległość jest zerem.

Powyższa definicja jest sformułowana tak ogólnie, aby dała się zastosować do dowolnej figury. Niekiedy odległość punktu od figury równa się odległości tego punktu od najbliższego punktu figury. Tak jest, gdy figurą jest prosta (zob. tw. 78.7) lub koło, a punkt leży zewnątrz figury. Ale inaczej jest, gdy figurą jest wnętrze koła, a dany punkt leży zewnątrz koła; wówczas wśród punktów figury nie istnieje punkt najbliższy danemu punktowi — natomiast definicja 78.7 może być i w tym przypadku stosowana.

**Twierdzenie 78.8.** *Izometria zachowuje odległość punktu od dowolnej figury.*

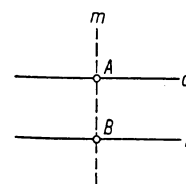
**Twierdzenie 78.9** (o odległości punktu od prostej). *Odległość punktu od prostej równa się odległości tego punktu od jego rzutu prostokątnego na tę prostą.*

**Dowód.** Mając dane: punkt  $P$  i prostą  $a$ , oznaczmy  $PP^a = r$ . Utwórzmy okrąg  $o(P, r)$ . Wobec tw. 78.7 żaden punkt prostej  $a$  nie leży wewnątrz tego okręgu, natomiast każde koło o środku  $P$  i promieniu większym od  $r$  będzie zawierać punkt  $P^a$ . Zgodnie z def. 78.7,  $r = PP^a$  jest odległością punktu  $P$  od prostej  $a$ .

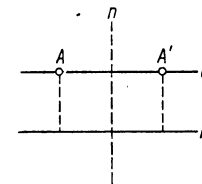
**Wysokość trójkąta. Definicja 78.8.** *Wysokością trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z rzutem tego wierzchołka na prostą przechodzącą przez pozostałe dwa wierzchołki tego trójkąta.*

Każdy trójkąt ma trzy wysokości. W trójkącie  $ABC$  bok  $\overline{BC}$  nazywamy bokiem przeciwnym do wierzchołka  $A$ , a wysokość łączącą wierzchołek  $A$  z jego rzutem na prostą  $BC$  nazywamy *wysokością odpowiadającą wierzchołkowi  $A$  albo wysokością poprowadzoną do boku  $\overline{BC}$* .

**Odległość dwóch prostych równoległych.** Mając dane dwie proste równoległe,  $a, b$ , przetnijmy je prostą  $m$  prostopadłą do  $a$  i do  $b$ . Otrzymamy dwa punkty przecięcia:  $A$  na prostej  $a$  i  $B$  na prostej  $b$ . Punkt  $B$  jest prostokątnym rzutem  $A$  na prostą  $b$ , zaś punkt  $A$  jest prostokątnym rzutem punktu  $B$  na prostą  $a$ . Wynika stąd, że odległość  $A$  od  $b$  jest taka sama jak odległość  $B$  od  $a$  (rys. 78-6).



Rys. 78-6



Rys. 78-7

Rozważmy teraz na prostej  $a$  dwa różne punkty  $A$  i  $A'$ . Wykażemy, że odległość punktu  $A$  od prostej  $b$  jest równa odległości punktu  $A'$  od prostej  $b$  (rys. 78.7). Poprowadźmy, jako prostą, pomocniczą symetralną  $n$  odcinka  $\overline{AA'}$ . Jest ona zarazem

symetralną prostej  $b$ . W symetrii względem  $n$  obrazem  $A$  jest  $A'$ , a obrazem  $b$  jest  $b'$ . Wobec tw. 78.8 odległość  $A$  od  $b$  jest równa odległości  $A'$  od  $b'$ .

**Wniosek.** Jeśli mając dane dwie proste równoległe, obierzemy na jednej z nich dowolny punkt, wyznaczmy rzut prostokątny tego punktu na drugą prostą i utworzymy odcinek łączący ten punkt z jego rzutem, to długość tego odcinka będzie dla danych dwóch prostych zawsze taka sama (bez względu na wybór punktu).

**Definicja 78.9.** Odległością dwóch prostych równoległych nazywamy odległość któregośkolwiek punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej. Odległość tę nazywamy też szerokością pasa, którego krawędziami są te dwie proste.

**Położenie prostej względem okręgu. Definicja 78.10.** Prosta jest względem okręgu:

- zewnętrzna, gdy nie ma punktu wspólnego z okręgiem,
- styczna, gdy ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem, punkt ten nazywamy punktem styczności prostej z okręgiem,
- sieczna, gdy ma dwa punkty wspólne z okręgiem.

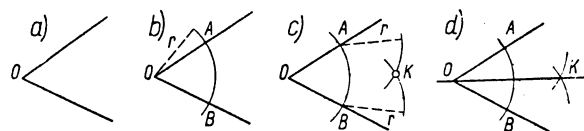
**Twierdzenie 78.10** (o położeniu prostej względem okręgu). Oznaczając przez  $r$  długość promienia okręgu, zaś przez  $h$  odległość prostej od środka okręgu, twierdzimy, że prosta jest dla okręgu:

- zewnętrzną, gdy  $h > r$ ,
- styczną, gdy  $h = r$ ,
- sieczną, gdy  $h < r$ .

**Twierdzenie 78.11** (o prostokątności stycznej do promienia w punkcie styczności). Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

**Oś symetrii kąta.** Jeśli ramiona kąta pokrywają się, to osią symetrii kąta jest prosta, na której leżą oba pokrywające się ramiona. Załóżmy, że ramiona kąta nie pokrywają się. W symetrii osiowej kąta obrazem jednego ramienia kąta powinno być drugie ramie kąta, obrazem odcinka  $\overline{OA}$  zaczynającego się w wierzchołku  $O$  i leżącego na jednym ramieniu kąta powinien być odcinek  $\overline{OB}$  leżący na drugim ramieniu i oba te odcinki powinny mieć tę samą długość  $OA = OB = r > 0$ . Przy tym obrazem punktu  $A$  powinien być punkt  $B$ , czyli oś symetrii kąta powinna być symetralną odcinka  $\overline{AB}$ . Z tych rozważań wynika konstrukcja osi symetrii kąta.

**Konstrukcja.** Na ramionach kąta (rys. 78-8a) odkładamy odcinki  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  jednakowej długości  $r$  (rys. 78-8b), po czym postępujemy tak jak przy konstrukcji symetralnej odcinka  $\overline{AB}$ , tj. z punktów  $A$ ,  $B$  zakreślamy okręgi o promieniu  $r$  (w przypadku kąta półpełnego należy użyć okręgów o promieniu większym od  $r$ ), okręgi



Rys. 78-8. Konstrukcja osi symetrii kąta

te przecinają się w punkcie  $K$  różnym od  $O$  (rys. 78-8c). Prosta  $OK$  jest symetralną odcinka  $\overline{AB}$  i jednocześnie osią symetrii kąta  $AOB$  (rys. 78-8d).

**Dwusieczna kąta. Definicja 78.11.** Dwusieczną kąta nazywamy półprostą mającą początek w wierzchołku kąta, leżącą na osi symetrii kąta i zawartą w obszarze kąta.

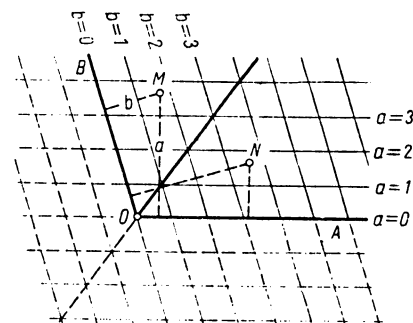
Z powyższej definicji i z definicji 77.7 wynika, że dwusieczna kąta dzieli kąt na dwa kąty przystające.

**Twierdzenie 78.12** (o odległościach dowolnego punktu dwusiecznej od ramion kąta). Dwusieczna kąta wypukłego i niepełnego jest zbiorem wszystkich punktów leżących w obszarze tego kąta i mających jednakowe odległości od obu ramion tego kąta.

**Dowód.** Każdemu punktowi  $M$  leżącemu w obszarze kąta  $AOB$  odpowiada dokładnie jedna para liczb nieujemnych, którymi są:

- odległość  $a$  punktu  $M$  od prostej  $OA$ ,
- odległość  $b$  punktu  $M$  od prostej  $OB$

(rys. 78-9). Liczby te można uważać za pewnego rodzaju współrzędne, nazwijmy je: współrzędnymi „odległościowymi” punktu  $M$  względem prostych  $OA$  i  $OB$



Rys. 78-9

Od współrzędnych wymaga się, aby także na odwrót: każdej parze liczb stanowiących współrzędne odpowiadał dokładnie jeden punkt. Otóż tak jest i tutaj, jeśli kąt  $AOB$  jest wypukły i niepełny (dla kąta wklęsłego tak nie jest).

W symetrii osiowej kąta punkt  $M$  nakłada się na taki punkt  $N$ , którego współrzędne odległościowe otrzymujemy przez przestawienie współrzędnych punktu  $M$ . Ale w tej symetrii każdy punkt dwusiecznej nakłada się na siebie, więc przestawienie ze sobą dwóch współrzędnych punktu dwusiecznej nie powinno zmienić pary liczb, jaką tworzą te współrzędne

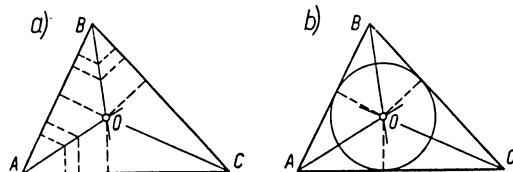
$$(a, b) = (b, a) \quad \text{stad} \quad a = b$$

**Okrąg wpisany. Definicja 78.12.** Okręgiem wpisanym w wielokąt wypukły nazywamy okrąg, którego środek jest punktem wewnętrznym tego wielokąta i który jest styczny do prostych zawierających boki tego wielokąta.

Koło, którego brzegiem jest okrąg wpisany w wielokąt, nazywamy *kołem wpisanym* w wielokąt. Wielokąt nazywamy wtedy *opisanym* na okręgu (na kole).

**Twierdzenie 78.13** (o środku okręgu wpisanego w trójkąt). *Trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.*

**Dowód.** W trójkącie  $ABC$  (rys. 78-10) dwusieczne kątów wewnętrznych przy  $A$  i przy  $B$  przecinają się w pewnym punkcie  $O$  leżącym wewnątrz trójkąta. Każdy



Rys. 78-10. a) Punkt  $O$  przecięcia się dwóch dwusiecznych jest równoodległy od wszystkich trzech boków trójkąta, b) Punkt  $O$  jest środkiem okręgu wpisanego

punkt dwusiecznej kąta przy  $A$  jest jednakowo odległy od boków  $AB$  i  $AC$ , zaś każdy punkt dwusiecznej kąta przy  $B$  jest jednakowo odległy od boków  $BA$  i  $BC$ . zatem punkt  $O$  jest jednakowo odległy od wszystkich trzech boków trójkąta. Zatem i dwusieczna kąta przy  $C$  musi przechodzić przez punkt  $O$ . Okrąg o środku  $O$  styczny do jednego boku trójkąta jest jednocześnie styczny do pozostałych dwóch boków trójkąta. Jest to okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$ .

**Okrąg dopisany. Definicja 78.13.** *Okręgiem dopisanym do trójkąta* nazywamy okrąg, którego środek jest punktem leżącym zewnątrz trójkąta i który jest styczny do prostych zawierających boki tego trójkąta.

Okrąg dopisany do trójkąta ma punkt wspólny z jednym bokiem trójkąta i po jednym punkcie wspólnym z przedłużeniami pozostałych dwóch boków trójkąta. Środek okręgu dopisanego jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów zewnętrznych przy dwóch wierzchołkach oraz dwusiecznej kąta wewnętrznego przy trzecim wierzchołku.

• Każdy trójkąt ma trzy okręgi dopisane (str. 236).

## 79. Figury przystające

**Cechy przystawiania figur.** Dwie figury nazywamy *przystającymi* (def. 77.7), gdy istnieje izometria przekształcająca jedną figurę w drugą. Przystawianie dwóch figur  $f$  i  $f'$  zapisujemy

$$f \cong f' \quad (79.1)$$

Znak  $\cong$  w odniesieniu do figur oznacza identyczność; ten sam znak w odniesieniu do liczb oznacza równość. Np. zdanie wyrażające, że przystawianie odcinków po- ciąga równość ich długości, zapiszemy:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \Rightarrow AB = A'B'$$

Poniżej wykazemy, że równość odcinków wystarcza na to, aby były one przystające, tj. aby istniała izometria przekształcająca jeden odcinek w drugi.

Własność wystarczającą na to, aby dwie figury należące do pewnej rodziny figur były przystające, nazywamy *cechą przystawiania* figur tej rodziny.

**Cecha przystawiania okręgów. Twierdzenie 79.1.** *Dwa okręgi są przystające, jeśli mają równe promienie.*

**Dowód.** Izometrią przekształcającą jeden z tych okręgów w drugi jest symetria względem symetralnej odcinka łączącego środki tych okręgów.

**Cecha przystawiania odcinków. Twierdzenie 79.2.** *Dwa odcinki są przystające, jeśli mają równe długości:*

$$AB = A'B' \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \quad (79.2)$$

**Dowód.** Z założenia dane są cztery punkty płaszczyzny  $A, B, A', B'$ , spełniające związek

$$AB = A'B' \quad (79.3)$$

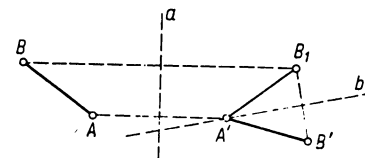
Mamy wskazać izometrię przekształcającą odcinek  $\overline{AB}$  w odcinek  $\overline{A'B'}$ . Wystarczy wskazać izometrię, w której  $A$  przekształca się w  $A'$  oraz  $B$  w  $B'$ .

Przypadek  $A \neq A'$ . Niech  $a$  będzie symetralną odcinka  $\overline{AA'}$  (rys. 79-1). Wtedy

$$S_a(A) = A' \quad S_a(B) = B_1 \quad (79.4)$$

oraz

$$AB = A'B_1 \quad (79.5)$$



Rys. 79-1

Jeśli  $B_1 = B'$ , to  $S_a$  jest już poszukiwaną izometrią. Jeśli  $B_1 \neq B'$ , to niech  $b$  będzie symetralną odcinka  $\overline{B'B_1}$ . Z (79.3) i (79.5) wynika, że punkt  $A'$  jest równoodległy od końców odcinka  $\overline{B'B_1}$ , zatem musi leżeć na  $b$  (tw. 78.3bI). W symetrii  $S_b$  punkt  $A'$  jest niezmienniczy, zaś  $B_1$  przekształca się w  $B'$

$$S_b(A') = A' \quad S_b(B_1) = B' \quad (79.6)$$

Podstawiając (79.4) do lewych stron równości (79.6), otrzymujemy

$$S_b S_a(A) = A' \quad S_b S_a(B) = B'$$

Izometria  $S_b S_a$  przekształca  $A$  w  $A'$  oraz  $B$  w  $B'$ , więc odcinki  $\overline{AB}$  i  $\overline{A'B'}$  są przystające

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

Dowód w przypadku  $A = A'$  pozostawiamy Czytelnikowi.

**Cecha BBB przystawania trójkątów. Twierdzenie 79.3.** Dwa trójkąty są przystające, jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta.

**Dowód.** Z założenia dane są punkty  $A, B, C$ , oraz  $A', B', C'$  takie, że

$$AB = A'B' \quad BC = B'C' \quad CA = C'A' \quad (79.7)$$

Stosujemy izometrię  $S_b S_a$  (zob. dowód poprz. tw.) przekształcającą  $\overline{AB}$  w  $\overline{A'B'}$ . W tej izometrii punkt  $C$  przekształca się w pewien punkt  $K$

$$S_b S_a(A) = A' \quad S_b S_a(B) = B' \quad S_b S_a(C) = K$$

przy czym

$$CA = KA' \quad CB = KB' \quad (79.8)$$

Jeśli  $K = C'$ , to  $S_b S_a$  jest szukaną izometrią. Jeśli zaś  $K \neq C'$ , to niech  $c$  będzie symetralną odcinka  $\overline{KC'}$ . Wobec (79.8) i (79.7) jest

$$KA' = C'A' \quad KB' = C'B'$$

co oznacza, że  $A'$  i  $B'$  są równoodległe od  $K$  i od  $C'$ , a więc leżą na  $c$ . Zastosujmy teraz symetrię  $S_c$ . Symetria ta nakłada  $K$  na  $C'$ , zaś  $A'$  i  $B'$  pozostają niezmiennicze. Mamy

$$S_c S_b S_a(A) = S_c(A') = A' \quad S_c S_b S_a(B) = S_c(B') = B' \quad S_c S_b S_a(C) = S_c(K) = C'$$

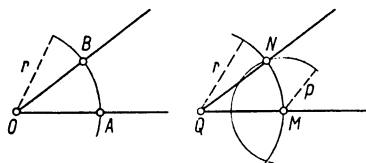
Izometria  $S_c S_b S_a$  przekształca  $\triangle ABC$  w  $\triangle A'B'C'$ .

**Odkładanie kąta przy półprostej. Twierdzenie 79.4.** Jeśli są dane: kąt i półprosta to istnieje półprosta, która ma wspólny początek z daną półprostą i wyznacza z nią kąt przystający do danego kąta.

**Dowód.** Jeśli kąt jest zerowy, pełny lub półpełny, to twierdzenie jest oczywiste. Rozważmy przypadek przeciwny, tj. gdy dany kąt  $\alpha$  o wierzchołku  $O$  ma ramiona nie leżące na jednej prostej. Dana jest półprosta  $OX$ , przy której ma być odłożony kąt  $\alpha$ .

Dowolnym promieniem  $r$  zakreślamy z wierzchołka  $O$  kąta  $\alpha$  okrąg  $o(O, r)$ . Okrąg ten przecina na ramionach kąta  $\alpha$  odcinki (rys. 79-2)

$$OA = OB = r$$



Rys. 79-2

Następnie tym samym promieniem  $r$  zakreślamy z punktu  $Q$  okrąg  $o(Q, r)$ . Okrąg ten przecina półprostą  $OX$  w punkcie  $M$

$$QM = r$$

Teraz promieniem o długości

$$AB = p$$

zakreślamy z punktu  $M$  okrąg  $o(M, p)$ . Okrąg ten ma z okręgiem  $o(Q, r)$  co najmniej jeden punkt wspólny  $N$  i jest

$$QN = r \quad MN = p$$

Z powyższych równości i cechy BBB wynika przystawanie trójkątów  $AOB$  i  $MQN$  a stąd przystawanie kątów  $\sphericalangle AOB$  i  $\sphericalangle MQN$ .

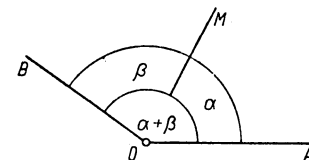
**Uwaga 1.** Jeśli dany kąt jest niezerowy i niepełny, to przy danej półprostej istnieją dwa kąty położone po przeciwnych stronach tej półprostej i przystające do danego kąta.

**Uwaga 2.** Jeśli kąt  $\alpha$  jest prosty, to przystający do niego kąt też jest prosty. Można też udowodnić: Jeśli dwa dane kąty są proste, to są przystające.

**Cecha BKB przystawania trójkątów. Twierdzenie 79.5.** Dwa trójkąty są przystające, jeśli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio przystające do dwóch boków i kąta między tymi bokami w drugim trójkącie.

**Cecha KBK przystawania trójkątów. Twierdzenie 79.6.** Dwa trójkąty są przystające, jeśli jeden bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio przystające do boku i dwóch leżących przy nim kątów w drugim trójkącie.

**Dodawanie kątów. Definicja 79.1.** Dwa kąty nazywamy kolejnymi, gdy mają wspólne ramie i wierzchołek, ale wnętrza ich są rozłączne (rys. 79-3). Mając da-



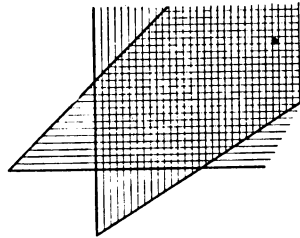
Rys. 79-3. Kąty kolejne  $\sphericalangle AOM = \sphericalangle \alpha$ ,  $\sphericalangle MOB = \sphericalangle \beta$  i ich suma  $\sphericalangle AOB + \sphericalangle MOB = \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta$

ne dwa kąty kolejne, można utworzyć trzeci kąt, którego obszarem jest suma obszarów danych kątów i którego wierzchołkiem jest wspólny wierzchołek tych kątów. Ten kąt, a także każdy kąt przystający do niego, nazywamy sumą geometryczną danych dwóch kątów kolejnych.

Jeśli dane dwa kąty  $\alpha, \beta$  nie są kolejne, to ich sumę geometryczną tworzymy w ten sposób, że przy jednym z ramion kąta  $\alpha$  odkładamy kąt  $\beta'$  i przystający do  $\beta$  i jeśli da się to zrobić tak, aby wnętrza kątów  $\alpha$  i  $\beta'$  były rozłączne, czyli aby  $\alpha$  i  $\beta'$  były kątami kolejnymi, to sumę geometryczną kątów  $\alpha$  i  $\beta'$  uważamy za sumę geometryczną danych dwóch kątów.

Dwa kąty wypukłe można zawsze dodać. Dwóch kątów wklęsłych nie można dodać. Suma dwóch kątów półpełnych jest kątem pełnym. Suma dwóch kątów prostych jest kątem półpełnym.

Sumę kątów nazwaliśmy „geometryczną”; użyliśmy tego słowa, aby zaznaczyć, że chodzi tu o pewien kąt przyporządkowany w określony sposób danym dwóm kątom, a nie o sumę mnogościową obszarów tych kątów. Ta ostatnia istnieje zawsze, ale nie zawsze przedstawia kąt (rys. 79-4). Słowo „geometryczna” będziemy w dalszym ciągu przeważnie opuszczać.



Rys. 79-4. Suma mnogościowa obszarów dwóch kątów może nie być obszarem kąta

**Miara kąta. Definicja 79.2.** Wprowadzenie miary kąta polega na tym, że każdemu kątowi zostaje przyporządkowana pewna liczba nieujemna, zwana jego miarą, przy czym:

- kąt zerowy ma miarę 0, kąt niezerowy ma miarę dodatnią;
- kąty przystające mają miary równe;
- miara sumy kątów równa się sumie miar tych kątów;
- miara kąta prostego jest dowolną, z góry ustaloną liczbą.

Jeśli przyjmiemy, że liczbą tą jest 90, to miarę nazywamy *stopniową*, a kąt jednostkowy, tj. kąt, którego miara równa się 1, nazywamy *stopniem* i oznaczamy

$$1^\circ$$

Zdanie „kąt  $\alpha$  ma  $30^\circ$ ”, które zapisujemy

$$\alpha = 30^\circ$$

oznacza „miarę kąta  $\alpha$  równa się 30, gdy miarę kąta prostego jest 90”.

Miarę kąta  $\angle AOB$  oznaczamy  $|\angle AOB|$ . Miarę kąta  $\alpha$  oznaczamy  $\alpha$ .

Można udowodnić, że każdy kąt ma określoną miarę stopniową i na odwrót: każda liczba dodatnia mniejsza od 360 jest miarą stopniową pewnego kąta.

**Porównywanie kątów. Definicja 79.3.** Kąt  $\alpha$  nazywamy *większym* od kąta  $\beta$ , co zapisujemy

$$\alpha > \beta$$

jeśli istnieje niezerowy kąt  $\gamma$  taki, że  $\alpha = \beta + \gamma$ .

Kąty o równych miarach nazywamy *równymi*. Kąty o nierównych miarach nazywamy *nierównymi*; większy kąt ma większą miarę. Kąt niezerowy, mniejszy od kąta prostego, nazywamy *ostrym*. Kąt wypukły większy od kąta prostego i mniejszy od półpełnego nazywamy *rozwartym*.

## Podział trójkątów ze względu na kąty. Definicja 79.4.

Trójkąt nazywamy:

- *ostrokątnym*, gdy wszystkie jego kąty są ostre,
- *rozwartokątnym*, gdy jeden z jego kątów jest rozwarty,
- *prostokątnym*, gdy jeden z jego kątów jest prosty; bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy *przeciwprostokątną*, a każdy bok leżący przy kącie prostym nazywamy *przyprostokątną*.

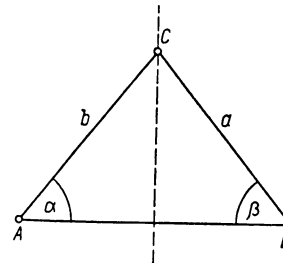
Można udowodnić, że w trójkącie jeśli jeden kąt jest prosty lub rozwarty, to pozostałe kąty muszą być ostre.

**Twierdzenie 79.7** (o bokach i kątach przeciwległych w trójkącie). I — *Jeśli w trójkącie dwa boki są równe, to przeciwległe im kąty są równe. Jeśli w trójkącie dwa boki nie są równe, to II — naprzeciw większego boku leży większy kąt, III — naprzeciw mniejszego boku leży mniejszy kąt.*

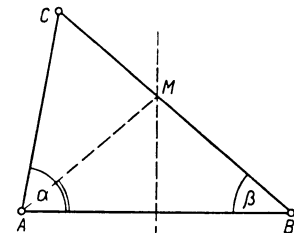
**Dowód.** Wprowadzając standardowe oznaczenie elementów trójkąta  $ABC$

$$AB = c, BC = a, CA = b, \angle ABC = \angle \beta, \angle BCA = \angle \gamma, \angle CAB = \angle \alpha \quad (79.9)$$

założmy najpierw, że  $a = b$ . Wówczas (tw. 78.3b)  $C$  leży na symetralnej boku  $AB$  i z symetrii tej wynika przystawanie kątów  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 79-5), co dowodzi prawdziwości części I twierdzenia.



Rys. 79-5



Rys. 79-6

Założmy teraz:  $a > b$ . Wówczas (tw. 78.3b)  $C$  leży po tej stronie symetralnej boku  $AB$ , co punkt  $A$  (rys. 79-6). Odcinek  $CB$  przecina symetralną w pewnym punkcie  $M$ , półprosta  $AM$  dzieli kąt  $\alpha$  na dwa kąty kolejne, z których jeden, mianowicie  $\angle BAM$  jest na podstawie części I twierdzenia przystający do kąta  $\beta$ . Zatem  $\alpha > \beta$ ; wykazaliśmy prawdziwość II części twierdzenia. Dowód III części analogiczny.

Twierdzenia 79.7 I, II, III tworzą układ zamknięty; twierdzenia odwrotne do nich są prawdziwe.

## Podział trójkątów ze względu na boki. Definicja 79.5.

Trójkąt nazywamy:

- *równobocznym*, gdy wszystkie jego boki są równe;

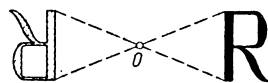
- *równoramiennym*, gdy przynajmniej dwa jego boki są równe; te dwa boki nazywamy *ramionami*, a pozostały bok *podstawą*;
- *różnobocznym*, gdy żadne dwa jego boki nie są równe.

### Pytania

1. Co to znaczy, że dwie figury są przystające?
2. Udowodnić, że dwa odcinki o równych długościach są przystające.
3. Wymienić cechy przystawiania trójkątów.
4. Opisać konstrukcję odkładania danego kąta przy danej półprostej.
5. Przedstawić podział trójkątów ze względu na kąty i ze względu na boki.
6. Udowodnić twierdzenie o bokach i kątach przeciwnych w trójkącie.
7. Opisać dodawanie kątów. Jak porównujemy kąty?

## 80. Symetria środkowa

**Symetria środkowa.** Definicja 80.1. Symetrią środkową względem punktu  $O$  (dowolnie wybranego) nazywamy przekształcenie płaszczyzny polegające na tym, że punkt  $O$  jest niezmienniczy, zaś każdy punkt  $A$ , różny od  $O$ , zostaje przekształcony w taki punkt  $A'$ , że punkt  $O$  jest środkiem odcinka  $AA'$ . Punkt  $O$  nazywamy *środkiem symetrii* (rys. 80-1).



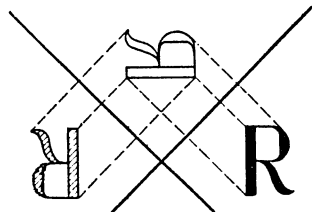
Rys. 80-1. Symetria środkowa

Symetrię środkową względem punktu  $O$  oznaczamy

$$S_O$$

**Twierdzenie 80.1.** Złożenie dwóch symetrii osiowych względem prostych prostopadłych jest symetrią środkową względem punktu przecięcia tych prostych (rys. 80-2).

Wniosek: Symetria środkowa jest izometrią.



Rys. 80-2. Symetria środkowa jest złożeniem dwóch symetrii osiowych o osiach prostopadłych

**Definicja 80.2.** Figurę  $f$  nazywamy *środkowosymetryczną*, jeśli istnieje punkt  $O$  taki, że obrazem tej figury w symetrii środkowej względem punktu  $O$  jest ta sama figura

$$S_O(f) = f$$

Punkt  $O$  nazywamy wtedy *środkiem symetrii figury  $f$* .

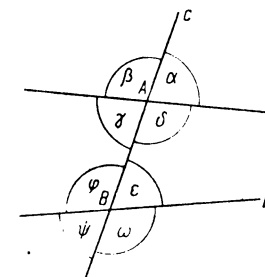
Przykłady figur środkowosymetrycznych:

- okrąg,
- dwie proste przecinające się,
- dwie proste równoległe,
- dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą.

**Twierdzenie 80.2** (o kątach wierzchołkowych). Kąty wierzchołkowe są równe.

Dowód wynika z symetrii środkowej dwóch prostych przecinających się.

Dwie proste przecięte trzecią. Dwie różne proste  $a$ ,  $b$  (równoległe lub nierównoległe) przecięte trzecią prostą  $c$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$  (rys. 80-3) tworzą



Rys. 80-3. Kąty przy dwóch prostych przeciętych trzecią prostą

4 kąty wypukłe o wierzchołku  $A$  i 4 kąty wypukłe o wierzchołku  $B$ . Kąty o wierzchołku  $A$  można w różny sposób kojarzyć w pary z kątami o wierzchołku  $B$ . Parom tym nadajemy nazwy, które wprowadzimy, posługując się rysunkiem 80-3:

- kąty naprzemianległe wewnętrzne:  $(\delta, \varphi)$ ,  $(\gamma, \epsilon)$
- kąty naprzemianległe zewnętrzne:  $(\alpha, \psi)$ ,  $(\beta, \omega)$
- kąty jednostronne wewnętrzne:  $(\delta, \epsilon)$ ,  $(\gamma, \varphi)$
- kąty jednostronne zewnętrzne:  $(\alpha, \omega)$ ,  $(\beta, \psi)$
- kąty odpowiadające:  $(\alpha, \epsilon)$ ,  $(\beta, \varphi)$ ,  $(\gamma, \psi)$ ,  $(\delta, \omega)$

Określenie powyższe, posługujące się rysunkiem, jest wprawdzie pogładowe, ale nie ścisłe. Oto przykład definicji ścisłej (według książki Z. Krygowskiej i J. Maroszkowej Geometria dla kl. I lic. og.).

**Definicja 80.3.** Kąty naprzemianległe wewnętrzne w układzie dwóch prostych  $a$ ,  $b$  przeciętych trzecią prostą  $c$  są to kąty tak dobrane, że

1° jeden jest kątem przecięcia się prostej  $a$  z prostą  $c$ , a ramieniem jego jest półprosta  $AB^-$ ,

2° drugi jest kątem przecięcia się prostej  $b$  z prostą  $c$ , a ramieniem jego jest półprosta  $\overrightarrow{BA}$ ,

3° wnętrza obszarów tych kątów leżą po różnych stronach prostej  $c$ .

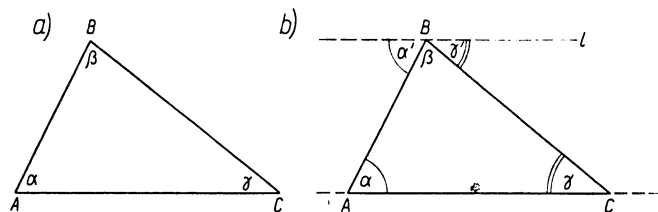
**Twierdzenie 80.3** (o kątach naprzemianległych). *Dwie proste przecięte trzecią są wtedy i tylko wtedy równoległe, gdy utworzone w tym układzie prostych kąty naprzemianległe są równe.*

**Dowód** wynika z symetrii figury utworzonej przez dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą.

**Uwaga do tw. 80.3** (o kątach jednostronnych i odpowiadających). Twierdzenie 80.3 pozostaje prawdziwe, gdy w nim równość kątów naprzemianległych zastąpimy równością kątów dowolnej pary kątów odpowiadających lub uzupełnianiem się do kąta półpełnego kątów dowolnej pary kątów jednostronnych.

**Suma kątów trójkąta. Twierdzenie 80.4.** *Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest kątem półpełnym.*

**Dowód.** Przez wierzchołek  $B$  trójkąta  $ABC$  (rys. 80-4) prowadzimy prostą pomocniczą  $l$  równoległą do  $AC$ . Prosta  $l$  tworzy z bokiem  $BA$  kąt  $\alpha'$  równy kątowi  $\alpha$  i z bokiem  $BC$  kąt  $\gamma'$  równy kątowi  $\gamma$ , bowiem:



Rys. 80-4. a) Dany trójkąt, b) konstrukcja wykazująca, że  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

- $\alpha'$  i  $\alpha$  są kątami naprzemianległymi przy prostych  $l$  i  $AC$  przeciętych prostą  $BA$ ,
- $\gamma'$  i  $\gamma$  są kątami naprzemianległymi przy prostych  $l$  i  $AC$  przeciętych prostą  $BC$ .

Nadto między  $BA$  i  $BC$  występuje wewnętrzny kąt trójkąta  $\beta$ . Suma kątów wewnętrznych trójkąta

$$\alpha + \beta + \gamma$$

jest równa sumie kątów

$$\alpha' + \beta + \gamma'$$

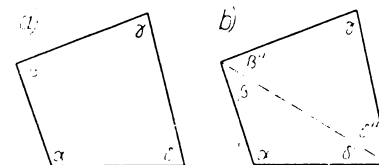
Ta ostatnia suma jest kątem półpełnym, co kończy dowód.

**Suma miar kątów wielokąta.** Suma kątów wewnętrznych czworokąta wypukłego jest kątem pełnym. W przypadku wielokąta o liczbie kątów większej niż 4 nie można już mówić o geometrycznej sumie kątów, gdyż zestawiając te kąty w ciąg kątów kolejnych pokrylibyśmy ich obszarami całą płaszczyznę i obszary te zachodziłyby na siebie. Natomiast można mówić o sumie miar kątów, gdyż miary kątów — to liczby, a liczby można dodawać bez ograniczenia.

**Twierdzenie 80.5.** *Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wypukłego równa się  $360^\circ$ .*

**Dowód.** Niech będzie dany czworokąt (rys. 80-5). Prowadząc przekątną dzielimy go na dwa trójkąty, których kąty albo są kątami czworokąta albo po dodaniu tworzą kąty czworokąta

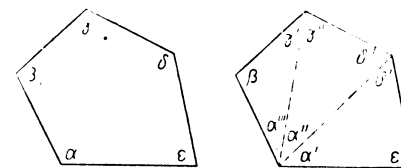
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= \alpha + \beta' + \beta'' + \gamma + \delta' + \delta' = \\ &= \alpha + \beta' + \delta' + \beta'' + \gamma + \delta'' = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ \end{aligned}$$



Rys. 80-5. a) Dany czworokąt, b) Konstrukcja pokazująca, że  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \cdot 180^\circ$

**Twierdzenie 80.6.** *Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego mającego  $n$  wierzchołków równa się  $(n-2) \cdot 180^\circ$ .*

**Dowód** podobny do poprzedniego (rys. 80-6).



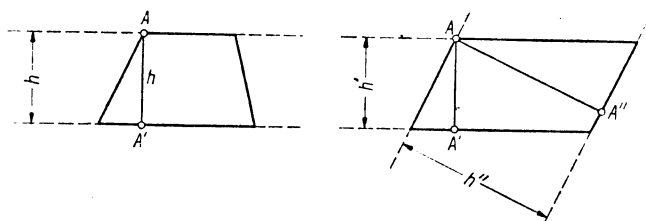
Rys. 80-6. Suma miar kątów wielokąta równa się  $(n-2) \cdot 180^\circ$

**Rodzaje czworokątów.** W dalszym ciągu będziemy zajmować się wyłącznie czworokątami wypukłymi, a nazywać je będziemy krótko: czworokątami.

**Bokami przeciwnymi** czworokąta nazywamy dwa boki nie mające wspólnego końca. **Kątami przeciwnymi** czworokąta nazywamy dwa kąty czworokąta nie mające wspólnego ramienia. Każde dwa kąty czworokąta, których wierzchołki należą do jednego boku, nazywamy kątami przylegającymi do tego boku. Czworokąt (wypukły) ma dwie przekątne, które przecinają się w punkcie wewnętrznym czworokąta.

**Trapezem** nazywamy czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych; równoległe boki trapezu nazywamy *podstawami*; pozostałe dwa boki trapezu mogą być równoległe lub nierównoległe, nazywamy je *ramionami* trapezu; odcinek łączący środki ramion trapezu nazywamy *środkową* trapezu. **Trapezem równoramiennym** nazywamy trapez, w którym ramiona są równe, lecz nierównoległe. **Trapezem prostokątnym** nazywamy trapez, w którym jeden z kątów jest prosty (wówczas jeszcze drugi kąt trapezu musi być prosty). **Wysokością trapezu** nazywa

my odcinek łączący dowolny wierzchołek trapezu z jego rzutem na podstawę nie zawierającą tego wierzchołka (względnie na przedłużenie tej podstawy). Wysokość trapezu jest równa odległości jego podstaw (rys. 80-7).



Rys. 80-7. Wysokość trapezu i dwie wysokości równoległoboku

**Równoległobokiem** nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych. **Wysokością równoległoboku** nazywamy odcinek łączący dowolny wierzchołek równoległoboku z jego rzutem na bok nie zawierający tego wierzchołka (względnie przedłużenie tego boku). Wysokość równoległoboku jest równa odległości jednej lub drugiej pary boków równoległych. O wysokości poprowadzonej prostopadle do pewnego boku mówimy, że *należy* do tego boku.

**Romb** jest to równoległobok, który ma wszystkie boki równe.

**Prostokąt** jest to równoległobok, w którym wszystkie kąty są proste.

**Kwadrat** jest to równoległobok, w którym wszystkie boki są równe, a wszystkie kąty są proste.

**Własności charakterystyczne równoległoboku. Twierdzenie 80.7.** *Równoległobok jest czworokątem, w którym:*

- istnieje środek symetrii,
- przekątne połowią się,
- każde dwa boki przeciwległe są równe,
- każde dwa kąty przeciwległe są równe,
- suma miar każdego dwóch kątów leżących przy tym samym boku równa się  $180^\circ$ ,
- dwa przeciwległe boki są równe i równoległe.

*Na odwrót, każda z wymienionych 6 własności, oddzielnie wzięta, jest warunkiem wystarczającym na to, aby czworokąt był równoległobokiem. Dowody pomijamy.*

**Własności charakterystyczne rombu. Twierdzenie 80.8.** *Romb jest równoległobokiem, w którym:*

- przekątne są prostopadłe,
- proste przekątne są osiami symetrii.

*Na odwrót, każda z tych dwóch własności wystarcza na to, aby równoległobok był rombem. Dowody pomijamy.*

**Własności charakterystyczne prostokąta. Twierdzenie 80.9.** *Prostokąt jest równoległobokiem, w którym:*

- przekątne są równe,
- symetralne boków są osiami symetrii.

*Każda z tych własności wystarcza na to, aby równoległobok był prostokątem. Dowody pomijamy.*

**Własności charakterystyczne kwadratu. Twierdzenie 80.10.** *Kwadrat jest równoległobokiem, w którym:*

- przekątne są równe i prostopadłe,
- proste przekątne oraz symetralne boków są osiami symetrii.

*Każda z tych własności wystarcza na to, aby równoległobok był kwadratem. Dowody pomijamy.*

**Deltoid** jest to czworokąt, którego dwa kolejne boki są równe i dwa pozostałe boki są równe między sobą, ale różne od poprzednich dwóch. **Własności deltoidu:**

- dwa kąty zawarte między parami boków nierównych są równe, pozostałe dwa kąty nie są równe;
- przekątne są prostopadłe;
- jedna z przekątnych jest dwusieczną dwóch kątów i symetralną drugiej przekątnej, ale druga przekątna tych własności nie ma.

## 81. Wektory i translacje

**Wektory. Definicja 81.1.** *Wektorem nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z tych punktów nazywamy początkiem, a drugi — końcem wektora. O wektorze mówimy też, że jest to odcinek skierowany, tj. odcinek, którego jeden koniec został wyróżniony jako początek, a drugi — jako koniec.*

Wektor o początku  $A$  i końcu  $B$  oznaczamy

$$\overrightarrow{AB} \quad (81.1)$$

O wektorze  $\overrightarrow{AB}$  mówimy, że jest *zaczepiony* w punkcie  $A$ . Punkt  $A$  nazywamy *punktem zaczepienia* tego wektora.

Często oznaczamy wektor jedną literą ze strzałką, np.

$$\vec{a} \quad (81.2)$$

Długość odcinka łączącego początek wektora z jego końcem nazywamy *długością* (także: *modulem*) wektora. Długość wektora (81.1) oznaczamy

$$|\overrightarrow{AB}| \quad \text{lub} \quad AB$$

Długość wektora (81.2) oznaczamy

$$|\vec{a}| \quad \text{lub} \quad a$$

**Wektorem zerowym** nazywamy wektor, którego początek i koniec pokrywają się. Wektor zerowy oznaczamy zerem ze strzałką  $\vec{0}$  lub zwykłym zerem  $0$ .

**Kierunkiem** wektora niezerowego nazywamy kierunek prostej, na której ten wektor leży. Dwa wektory niezerowe nazywamy *równoległymi*, jeśli proste, na któ-

rych te wektory leżą, są równoległe. Zgodnie z definicją kierunku (def. 73.3), proste równoległe mają ten sam kierunek, zatem zamiast mówić, że dwa wektory są równoległe, można powiedzieć, że dwa wektory mają ten sam kierunek.

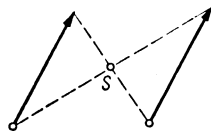
**Zwrot** wektora niezerowego  $\overrightarrow{AB}$  nazywamy zwrot prostej  $AB$ , w którym  $A$  poprzedza  $B$ . Jeśli dwa wektory niezerowe są równoległe, to, zgodnie z aksjomatem VII (str. 25), można zwrot jednego wektora przenieść na prostą, na której leży drugi wektor, i porównać je ze sobą. Jeśli zwroty te są zgodne, to powiemy, że wektory mają ten sam zwrot. Jeśli zwroty są przeciwne, to powiemy, że wektory mają przeciwne zwroty.

Wektorowi zerowemu nie przypisujemy ani kierunku ani zwrotu.

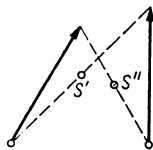
**Równość wektorów. Definicja 81.2.** Dwa wektory niezerowe nazywamy równymi, gdy mają ten sam kierunek, ten sam zwrot i tę samą długość. Odnosnie wektorów zerowych, przyjmujemy, że każde dwa wektory zerowe są równe. Równość wektorów  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  zapisujemy

$$\vec{a} = \vec{b}$$

**Kryterium<sup>1)</sup> równości wektorów. Twierdzenie 81.1.** Dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek łączący początek pierwszego wektora z końcem drugiego wektora i odcinek łączący koniec pierwszego wektora z początkiem drugiego wektora mają środki pokrywające się ze sobą (rys. 81-1 i 81-2). Dowód wynika z tw. 80.7, p. 2.

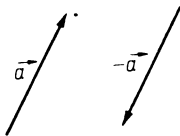


Rys. 81-1. Wektory równe



Rys. 81-2. Wektory nierówne

**Wektory przeciwne. Definicja 81.3.** Dwa wektory, mające tę samą długość i ten sam kierunek, ale zwroty przeciwne, nazywamy wektorami przeciwnymi. Wektorem przeciwnym do wektora zerowego jest wektor zerowy. Wektor przeciwny do wektora  $\vec{a}$  oznaczamy  $-\vec{a}$  (rys. 81-3).



Rys. 81-3. Wektory przeciwne

**Dodawanie wektorów. Definicja 81.4.** Jeśli są dane wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , to sumę ich określamy w następujący sposób (rys. 81-4)

1) Obieramy dowolny punkt  $O$ , jako początkowy punkt konstrukcji;

<sup>1)</sup> Gr. — sprawdzian.

2) w punkcie  $O$  konstruujemy wektor  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  (mówimy też: w punkcie  $O$  zaczepiamy wektor równy wektorowi  $\vec{a}$ );

3) w końcu  $A$  wektora  $\overrightarrow{OA}$  zaczepiamy wektor  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ; wektory  $\overrightarrow{OA}$  i  $\overrightarrow{AB}$  tworzą linię łamaną  $OAB$  o początku  $O$  i końcu  $B$ ; mówimy też, że utworzyliśmy łańcuch wektorów  $\overrightarrow{OA}$  i  $\overrightarrow{AB}$ ;

4) prowadzimy wektor  $\overrightarrow{OB}$  łączący początek łańcucha z jego końcem; tak utworzony wektor  $\overrightarrow{OB}$  nazywamy sumą wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$$

zaczepioną w punkcie  $O$ .

Sumę wektorów nazywamy też sumą geometryczną albo wektorem wypadkowym danych dwóch wektorów. Wektory dodawane nazywamy składowymi wektora będącego ich sumą. Jeśli łańcuch składowych tworzy łamaną zamkniętą, to wektor wypadkowy jest zerowy, np. dla dowolnych punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  jest

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

Można udowodnić, że

— suma wektorów nie zależy od wyboru początkowego punktu konstrukcji, tzn. obierając za początek inny punkt  $O'$  otrzymamy sumę  $\overrightarrow{O'B'}$  zaczepioną w punkcie  $O'$ , ale równą sumie  $\overrightarrow{OB}$  zaczepionej w punkcie  $O$ ;

— dodawanie wektorów jest przemienne tzn. suma wektorów nie zależy od kolejności składowych

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

— dodawanie wektorów jest łączne, tzn.

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

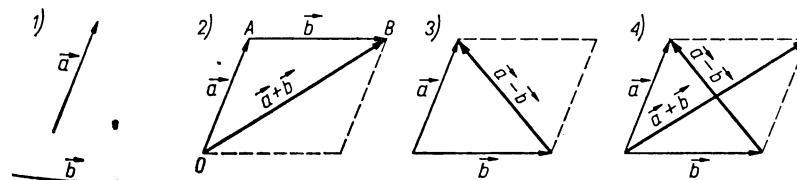
**Odejmowanie wektorów. Definicja 81.5.** Różnicą  $\vec{a} - \vec{b}$  wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nazywamy każdy wektor  $\vec{c}$ , który dodany do  $\vec{b}$  daje jako sumę wektor  $\vec{a}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \quad \text{oznacza, że} \quad \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \quad (81.3)$$

Powyższą definicję można zastąpić inną, równoważną: Różnicą  $\vec{a} - \vec{b}$  nazywamy sumę wektora  $\vec{a}$  i wektora przeciwnego do  $\vec{b}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (81.4)$$

czyli: Odjąć od wektora  $\vec{a}$  wektor  $\vec{b}$  oznacza dodać do wektora  $\vec{a}$  wektor przeciwny do  $\vec{b}$ . Rys. 81-4 pokazuje sumę i różnicę dwóch wektorów.



Rys. 81-4. Suma i różnica wektorów: 1) dane wektory, 2) konstrukcja sumy, 3) konstrukcja różnicy, 4) suma i różnica jako przekątne równoległoboku wystawionego na danych wektorach

**Mnożenie wektora przez liczbę. Definicja 81.6.** Iloczynem wektora  $\vec{a}$  przez liczbę  $k$  (także  $k$ -krotnością wektora  $\vec{a}$ ) nazywamy:

- wektor zerowy, gdy  $k = 0$  lub  $\vec{a} = 0$ ,
- wektor o długości  $|k| \cdot a$  i o kierunku i zwrocie wektora  $\vec{a}$ , gdy  $k > 0$ ,  $a \neq 0$ ,
- wektor o długości  $|k| \cdot a$ , o kierunku wektora  $\vec{a}$  i o zwrocie przeciwnym do zwrotu wektora  $\vec{a}$ , gdy  $k < 0$ ,  $a \neq 0$ .

Iloczyn wektora  $\vec{a}$  przez liczbę  $k$  oznaczamy symbolem  $k\vec{a}$ .

**Długość sumy wektorów. Twierdzenie 81.2.** Jeśli wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  są równoległe i zgodnie skierowane, to długość ich sumy równa się sumie ich długości

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (81.5)$$

Jeśli wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  są równoległe i przeciwnie skierowane, to długość ich sumy równa się bezwzględnej wartości różnicy ich długości

$$|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \quad (81.6)$$

Jeśli wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  są niezerowe i nierównoległe, to zachodzi nierówność zwana „prawem trójkąta”

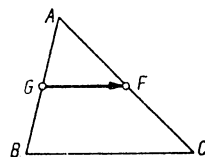
$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (81.7)$$

Dowód tego twierdzenia wynika z definicji dodawania wektorów i z twierdzeń 73.4 i 73.5.

**Zastosowanie wektorów do dowodzenia twierdzeń geometrycznych. Twierdzenie 81.3.** Jeśli punkt  $G$  jest środkiem odcinka  $\overline{AB}$ , to wektory  $\overrightarrow{GA}$  i  $\overrightarrow{GB}$  są wektorami przeciwnymi i ich suma jest wektorem zerowym  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 0$ .

Dowód wynika z definicji 81.3 i 81.4.

**Twierdzenie 81.4.** Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i równa się jego połowie.



Rys. 81-5

**Dowód.** Dany jest trójkąt  $ABC$  (rys. 81-5). Środki boków  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  oznaczamy  $G$  i  $F$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AF} \\ \overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} \\ 2\overrightarrow{GF} &= \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF}}_0 \quad \text{stąd} \quad \overrightarrow{GF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

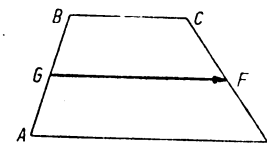
Z ostatniej równości odczytujemy, że  $\overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{BC}$  oraz  $GF = \frac{1}{2} BC$ .

**Twierdzenie 81.5.** Środkowa trapezu jest równoległa do podstaw trapezu i ma długość równą średniej arytmetycznej długości podstaw.

**Dowód.** Oznaczmy podstawy trapezu  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$  (rys. 81-6), zaś środki ramion  $G$  i  $F$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} \\ \overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} \end{aligned}$$

$$2\overrightarrow{GF} = \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}}_0 + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \underbrace{\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CF}}_0 \quad \text{stąd} \quad \overrightarrow{GF} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$$



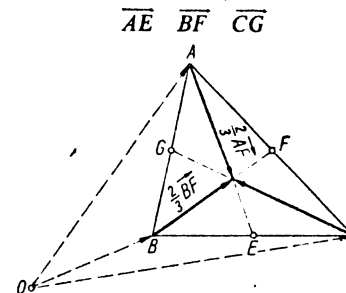
Rys. 81-6

Ponieważ wektory  $\overrightarrow{AD}$  i  $\overrightarrow{BC}$  są równoległe, więc ich suma, a także połowa tej sumy mają ten sam kierunek, stąd  $\overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ . Dalej, ponieważ  $\overrightarrow{AD}$  i  $\overrightarrow{BC}$  są zgodnie skierowane, więc stosując (81.5), mamy  $GF = \frac{AD + BC}{2}$ , c.n.u.

Środkowa boku w trójkącie jest to odcinek łączący środek boku z przeciwległym wierzchołkiem.

**Środek ciężkości trójkąta. Twierdzenie 81.6.** Środkowe trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, zwanym środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1, tzn. odległość tego punktu od wierzchołka jest 2 razy większa od odległości tego punktu od środka przeciwległego boku.

**Dowód.** W trójkącie o wierzchołkach  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (rys. 81-7) oznaczmy środki przeciwległych boków odpowiednio  $E$ ,  $F$ ,  $G$ . Wektory-środkowe (skierowane od wierzchołków do środków przeciwległych boków)



Rys. 81-7

są średnimi arytmetycznymi wektorów-boków wychodzących z tych samych wierzchołków:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} \quad \overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} \quad (81.8)$$

Oto dowód pierwszej z tych równości (pozostałych dowodzimy analogicznie)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \\ \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} \\ \hline 2 \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CE} \\ &\quad \quad \quad 0 \end{aligned} \quad \text{stad} \quad \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

Dla dowodu naszego twierdzenia wystarczy wykazać, że jeśli w wierzchołkach  $A$ ,  $B$ ,  $C$  zaczepimy wektory

$$\frac{2}{3} \overrightarrow{AE} \quad \frac{2}{3} \overrightarrow{BF} \quad \frac{2}{3} \overrightarrow{CG} \quad (81.9)$$

to końce tych wektorów pokryją się. Wyrazimy to w rachunku wektorowym w następujący sposób. Niech  $O$  będzie dowolnym punktem płaszczyzny; wykażemy, że wektory

$$\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AE} \quad \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BF} \quad \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CG}$$

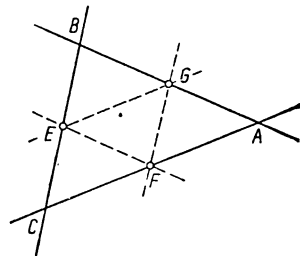
są równe. Wykażemy to dla pierwszych dwóch wektorów, dla dwóch pozostałych dowód jest analogiczny. W tym celu wystarczy wykazać, że różnica

$$\left( \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BF} \right) - \left( \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AE} \right)$$

jest wektorem zerowym, ale to otrzymujemy łatwo, korzystając z (81.8), i z tego, że  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$  (wykonanie rachunku pozostawiamy Czytelnikowi).

**Konstrukcja trójkąta, gdy dane są środki jego boków.** Niech będą dane trzy środki  $E$ ,  $F$ ,  $G$  boków trójkąta. Z tw. 81.4 wynika, że bok którego środkiem jest punkt  $E$  musi być równoległy do odcinka  $\overline{FG}$ . Ponieważ przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danego odcinka (aksjomat Euklidesa), więc prosta na której leży bok szukanego trójkąta jest jednoznacznie określona.

Prowadząc przez każdy z punktów  $E$ ,  $F$ ,  $G$  prostą równoległą do odcinka łączącego pozostałe dwa punkty, otrzymamy trójkąt  $ABC$  (rys. 81-8), dla którego  $E$ ,  $F$ ,  $G$  są środkami boków.

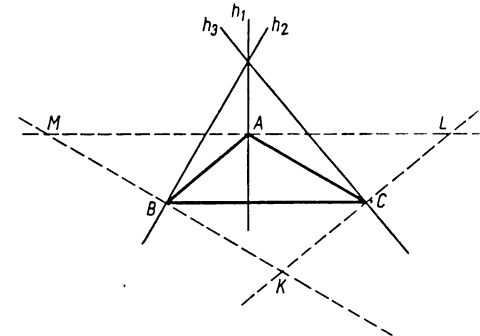


Rys. 81-8

Zauważmy, że symetralne boków trójkąta  $ABC$  są jednocześnie prostymi, na których leżą wysokości trójkąta  $EFG$ .

**Ortocentrum. Twierdzenie 81.7.** Proste, na których leżą wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie (zwanym ortocentrum trójkąta).

**Dowód.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Przez jego wierzchołki kreślimy 3 proste pomocnicze, równoległe do przeciwległych boków i otrzymujemy pomocniczy trójkąt  $KLM$  (rys. 81-9). Symetralne boków tego trójkąta są prostymi, na których leżą wysokości danego trójkąta  $ABC$ . Ale symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie (tw. 78.5), zatem proste  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , na których leżą wysokości trójkąta  $ABC$  przecinają się w jednym punkcie, c.n.u.



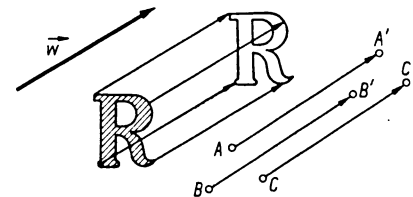
Rys. 81-9

Ortocentrum trójkąta rozwartokątnego leży zewnątrz trójkąta.

Ortocentrum trójkąta prostokątnego leży w wierzchołku kąta prostego.

Ortocentrum trójkąta ostrokątnego leży wewnątrz trójkąta.

**Translacja (przesunięcie równoległe).** Definicja 81.7. Translacją (czyli przesunięciem równoległym) o wektor  $\vec{w}$  nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem dowolnego punktu  $P$  jest taki punkt  $P'$ , że  $\overrightarrow{PP'} = \vec{w}$ . Wektor  $\vec{w}$  nazywamy wektorem translacji (rys. 81-10).



Rys. 81-10. Translacja (przesunięcie równoległe) o wektor  $\vec{w}$

**Twierdzenie 81.8.** Translacja jest izometrią, w której obrazem dowolnego wektora jest równy mu wektor.

**Dowód.** Według definicji dodawania wektorów, dla dowolnych czterech punktów  $A, B, A', B'$  jest

$$\overline{AB} = \overline{AA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'B} \quad (81.10)$$

Jeśli przekształcenie jest translacją, to  $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \vec{w}$ , czyli  $\overline{AA'} + \overline{B'B} = \vec{w} - \vec{w} = 0$  i z równości (81.10) otrzymujemy  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .

Na odwrót, jeśli w przekształceniu jest  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , to z (81.10) otrzymujemy  $\overline{AA'} + \overline{B'B} = 0$  czyli  $\overline{AA'} = \overline{BB'}$  dla dowolnych  $A, B$ , czyli przekształcenie jest translacją.

**Twierdzenie 81.9.** Przekształcenie odwrotne do translacji o wektor  $\vec{w}$  jest translacją o wektor  $-\vec{w}$ .

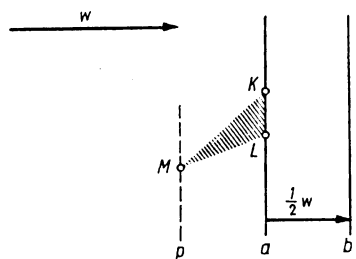
**Twierdzenie 81.10.** Złożenie translacji o wektor  $\vec{w}_1$  i translacji o wektor  $\vec{w}_2$  jest translacją o wektor  $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ .

Składanie przekształceń jest na ogół nieprzemienne, tzn. wynik złożenia dwóch przekształceń na ogół zależy od kolejności wykonywania przekształceń składowych. Jednak składanie translacji jest przemienne, wynika to z przemienności dodawania wektorów.

**Twierdzenie 81.11.** Translację o wektor  $\vec{w}$  można przedstawić jako złożenie dwóch symetrii osiowych, których osie są:

- równoległe między sobą i prostopadłe do wektora translacji,
- odległe od siebie o połowę długości wektora translacji,
- według zwrotu wektora  $\vec{w}$  pierwsza oś poprzedza drugą (zob. df. 74.2).

**Dowód.** Niech będzie dany wektor translacji  $\vec{w}$ . Obieramy proste  $a, b$  równoległe i takie, aby wektor poprowadzony od dowolnego punktu prostej  $a$  do jego rzutu prostokątnego na prostą  $b$  (rys. 81-11) był równy  $\frac{1}{2} \vec{w}$ . Obieramy trzy niewspółliniowe punkty  $K, L, M$  tak aby  $K$  i  $L$  leżały na  $a$ , zaś  $M$  na prostej  $p$  symetrycznej do  $b$  względem  $a$ .



Rys. 81-11

Obrazy punktów  $K, L, M$  w symetrii  $S_a$  oznaczmy  $K', L', M'$  (rys. 81-12). Jest

$$\overline{KK'} = 0 \quad \overline{LL'} = 0 \quad \overline{MM'} = \vec{w} \quad (81.11)$$

Obrazy punktów  $K', L', M'$  w symetrii  $S_b$  oznaczmy  $K'', L'', M''$  (rys. 81-13). Jest

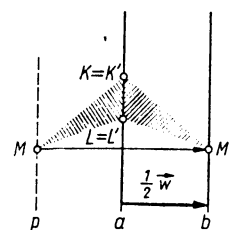
$$\overline{K'K''} = \vec{w} \quad \overline{L'L''} = \vec{w} \quad \overline{M'M''} = 0 \quad (81.12)$$

Dodając do siebie odpowiednio równości (81.11) i (81.12), dostajemy

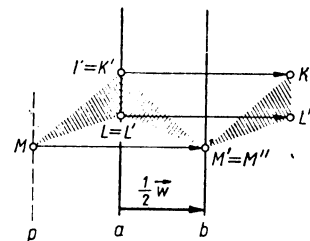
$$\overline{KK''} = \vec{w} \quad \overline{LL''} = \vec{w} \quad \overline{MM''} = \vec{w}$$

co oznacza, że translacja o wektor  $\vec{w}$  i złożenie symetrii  $S_b S_a$  są ze sobą zgodne w trzech niewspółliniowych punktach  $K, L, M$ .

Wobec tw. 77.4 przekształcenia te są identyczne.



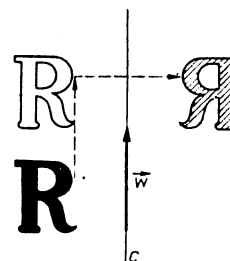
Rys. 81-12



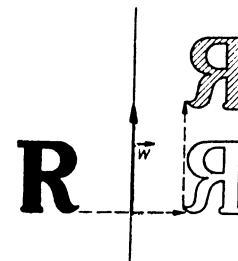
Rys. 81-13

**Symetria z poślizgiem. Definicja 81.8.** Złożenie translacji o wektor  $\vec{w}$  i symetrii względem prostej  $c$  równoległej do wektora  $\vec{w}$  nazywamy symetrią względem osi  $c$  z poślizgiem o wektor  $\vec{w}$ . W przypadku  $\vec{w} = 0$  (poślizg zerowy) oś  $c$  może mieć dowolny kierunek i wtedy mamy zwykłą symetrię osiową.

Można udowodnić, że jeśli  $\vec{w} \parallel c$ , to złożenie translacji o wektor  $\vec{w}$  i symetrii względem  $c$  jest przemienne, tzn. wynik przekształcenia złożonego nie zależy od kolejności wykonywania przekształceń składowych (rys. 81-14 i 81-15).



Rys. 81-14



Rys. 81-15

Symetria z poślizgiem jest izometrią będącą złożeniem trzech symetrii osiowych. Można udowodnić, że złożenie dowolnych trzech symetrii osiowych jest symetrią z poślizgiem.

**Rzut równoległy wektora. Definicja 81.9.** Rzutem danego wektora (w danym układzie rzutowania) nazywamy wektor, którego początkiem jest rzut początku, a końcem — rzut końca danego wektora.

Zgodnie z oznaczeniami na str. 25, rzut wektora  $\vec{u} = \overline{PQ}$  oznaczamy  $\vec{u}' = \overline{P'Q'}$ .

**Twierdzenie 81.12** (o rzucie sumy). Rzut sumy wektorów jest sumą rzutów tych wektorów, co można zapisać w postaci implikacji

$$\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{w}' = \vec{a}' + \vec{b}'$$

(81.13)

(implikacja, odwrotna nie zawsze jest prawdziwa).

Dowód jest łatwy i wynika z definicji 81.9 i 81.4.

**Ruch w fizyce, a przekształcenie w geometrii.** W fizyce rozróżniamy pojęcia: przemieszczenia i ruchu. Przez przemieszczenie punktu materialnego (cząstki) rozumiemy zmianę położenia tej cząstki względem pewnego układu odniesienia. Przemieszczenie  $\overline{AB}$  oznacza, że cząstka, która znajdowała się w punkcie geometrycznym  $A$ , znalazła się następnie w punkcie  $B$ . Na pojęcie przemieszczenia składają się tylko dwie pozycje cząstki: początkowa i końcowa, natomiast droga, po której się odbywał ruch, i czas, w jakim się ten ruch odbywał, nie wchodzi w pojęcie przemieszczenia.

Ruch jest pojęciem bardziej złożonym. W skład pojęcia ruchu wchodzi czas, prędkość (stała lub zmienna) i droga. Każde przemieszczenie jest skutkiem pewnego ruchu, przy czym jedno i to samo przemieszczenie może być skutkiem różnych ruchów.

Pojęcia przemieszczenia i ruchu odnoszą się w fizyce nie tylko do cząstek ale i do ciał rozciągłych, np. do ciała sztywnego. Termin ten oznacza w fizyce ciało, którego każde dwie cząstki zachowują podczas ruchu niezmienną odległość.

Najprostszymi rodzajami ruchu ciała sztywnego są:

- translacja czyli przesunięcie równoległe,
- obrót dookoła osi.

Termin translacja występuje także w geometrii. Oto zestawienie sensu tego terminu w fizyce i w geometrii.

Translacja w fizyce—to ruch ciała sztywnego, w którym wszystkie cząstki ciała zakreślają odcinki równe i równoległe. W wyniku translacji całe ciało zostaje przeniesione z pozycji początkowej do pewnej pozycji końcowej (rys. 81-10).

Translacja w geometrii—to zestawienie pozycji początkowej z końcową; szczegóły ruchu, któremu w fizyce zawdzięczamy takie przemieszczenie, nie interesują nas.

Podobnie ma się rzecz z obrotem, który omówimy poniżej.

**Wektor swobodny.** Równość wektorów jest relacją:

- zwrotną, tzn. dla każdego  $\vec{a}$  jest  $\vec{a} = \vec{a}$ ;
- symetryczną, tzn. jeśli  $\vec{a} = \vec{b}$ , to  $\vec{b} = \vec{a}$ ;
- przechodnią, tzn. jeśli  $\vec{a} = \vec{b}$  i  $\vec{b} = \vec{c}$ , to  $\vec{a} = \vec{c}$ .

Wobec tego wszystkie wektory można podzielić na klasy, zaliczając do tej samej klasy wektory równe między sobą. Reprezentantem takiej klasy może być dowolny wektor należący do tej klasy. O takiej klasie mówimy, że jest to *wektor swobodny*. Obrazem wektora swobodnego jest translacja.

## 82. Obroty i kąty skierowane

**Pojęcie obrotu w fizyce i w geometrii.** Ponieważ geneza pojęć geometrycznych związana jest z doświadczeniami w świecie materialnym, wydaje się celowym na-

wiązanie do niektórych pojęć i wyobrażeń fizycznych. Mówiąc o obrocie, jako o zjawisku fizycznym, mamy zwykle na myśli obrót bryły sztywnej dookoła pewnej prostej w przestrzeni.

**Pojęcie obrotu w fizyce.** Obierzmy w ciele sztywnym pewną płaszczyznę, w tej płaszczyźnie obierzmy pewien punkt i poprowadźmy przezeń prostą prostopadłą do obranej płaszczyzny; oznaczmy tę prostą  $c$ . Ruch ciała sztywnego, w którym obrana płaszczyzna przemieszcza się w sobie, a prosta  $c$  nie zmienia położenia, nazywamy w fizyce *obrotem dookoła prostej  $c$* . Prostą  $c$  nazywamy *osią obrotu*.

Podczas takiego obrotu cząstki ciała leżące na osi obrotu nie zmieniają swego położenia, a pozostałe cząstki poruszają się po okręgach, których środki leżą na osi obrotu, a płaszczyzny są prostopadłe do osi obrotu; cząstki te zakreślają na tych okręgach łuki o jednakowym kącie środkowym  $\varphi$ . Kąt ten nazywamy *kątem obrotu*.

W wyniku takiego ruchu ciało doznaje przemieszczenia od pewnej pozycji początkowej do pewnej pozycji końcowej, ale jedno i to samo przemieszczenie może być otrzymane w wyniku różnych ruchów, z których każdy może być uważany za obrót. Np. może to być ruch, w którym pewna cząstka ciała porusza się:

- po łuku leżącym w obszarze kąta wypukłego lub
- po łuku leżącym w obszarze kąta wklęsłego o tych samych ramionach lub
- cząstka ta może wykonać dowolną liczbę pełnych obiegów po okręgu zanim zatrzyma się w pozycji końcowej (wtedy dany obrót zawiera w sobie pewną liczbę obrotów o kąt pełny).

W fizyce nie jest obojętne ile obrotów o kąt pełny zawiera w sobie dany obrót. Natomiast w geometrii ten szczegół może być pominięty.

**Pojęcie obrotu w geometrii.** W geometrii przez „obróć” rozumiemy pewne przekształcenie płaszczyzny na siebie, w którym punktom  $A, B, C, \dots$  zostają w określony sposób przyporządkowane pewne punkty  $A', B', C', \dots$

Przy formułowaniu definicji w geometrii zwracamy uwagę na to, aby opierać się na pojęciach już uprzednio w geometrii wprowadzonych, a nie korzystać z innych pojęć, np. z pojęć fizyki, choćby pojęcia te wydawały się bardzo oczywiste. Trudności tego rodzaju występują właśnie przy definiowaniu obrotu. Definicja obrotu może być dostosowana do odpowiednich wyobrażeń z fizyki, ale w sformułowaniu swym powinna być od nich niezależna.

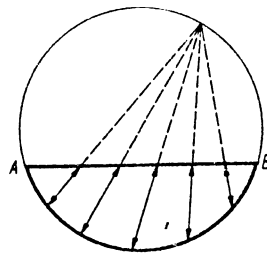
**Łuk skierowany.** Jeśli  $A, B, C$  są trzema różnymi punktami prostej, to tylko jeden z tych punktów leży między pozostałymi dwoma. Jeśli zaś  $A, B, C$  są trzema różnymi punktami okręgu, to punkty te wyznaczają na okręgu:

- dwa łuki  $\overline{AB}$ , z których jeden zawiera punkt  $C$ ,
- dwa łuki  $\overline{BC}$ , z których jeden zawiera punkt  $A$  oraz
- dwa łuki  $\overline{CA}$ , z których jeden zawiera punkt  $B$ .

czyli żaden z tych punktów nie wyróżnia się swym położeniem względem pozostałych dwóch punktów. Relacja „poprzedza” i relacja „leży między” nie znajdują zastosowania w odniesieniu do całego okręgu, jednak można je odnieść do dowolnego łuku okręgu.

Niech będzie dany okrąg i na nim dwa różne punkty  $A, B$ . Punkty te wyznaczają

na okręgu dwa łuki, z których każdy jest wsparty na cięciwie  $\overline{AB}$ . Wybierzmy jeden z tych łuków i umówmy się tylko ten łuk oznaczać  $\overline{AB}$ . Drugi z tych łuków będziemy oznaczać  $\overline{BA}$ . Wybierzmy jeden z dwóch zwrotów cięciwy  $\overline{AB}$ , np. zwrot od  $A$  do  $B$ . Uporządkowanie punktów cięciwy  $\overline{AB}$  wyznaczone przez ten zwrot można przenieść na łuk  $\overline{AB}$ , np. stosując przyporządkowanie pokazane na rys. 82-1.



Rys. 82-1. Wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między punktami łuku i punktami cięciwy

W ten sposób wybrany przez nas łuk  $\overline{AB}$  otrzymuje zwrot od  $A$  do  $B$ , czyli staje się łukiem skierowanym  $\overrightarrow{AB}$ .

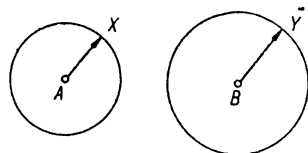
**Obieg okręgu.** Jeśli na okręgu pewien łuk  $\overrightarrow{AB}$  został skierowany, to skierowanie tego łuku może być przedłużone na dowolny łuk tego okręgu, a mianowicie.

- łuk  $\overrightarrow{BA}$  skierujemy od  $B$  do  $A$ ,
  - każdy inny łuk  $l$  danego okręgu skierujemy tak, aby każda część łuku  $l$  zawarta w  $\overrightarrow{AB}$  (o ile taka część istnieje) miała zwrot zgodny ze zwrotem  $\overrightarrow{AB}$ , zaś każda część łuku  $l$  zawarta w  $\overrightarrow{BA}$  (o ile istnieje) miała zwrot zgodny ze zwrotem  $\overrightarrow{BA}$ .
- Można udowodnić, że wówczas cały łuk  $l$  otrzyma określony zwrot.

**Definicja 82.1.** Jeśli każdemu łukowi okręgu został przyporządkowany zwrot i przyporządkowanie to jest takie, że część wspólna dwóch łuków ma na obu łukach zwrot ten sam, to mówimy, że na okręgu został wprowadzony obieg, czyli uporządkowanie cykliczne albo *kolowe*.

Na każdym okręgu istnieją dwa, wzajemnie przeciwne obiegi. Umawiamy się jeden z nich nazywać *obiegiem dodatnim*, a drugi – *obiegiem ujemnym*.

**Płaszczyzna zorientowana.** Jeśli na pewnym okręgu  $o(A, a)$  został wybrany obieg dodatni, to za pomocą wektorów można obieg ten przenieść na dowolny okrąg  $o(B, b)$  tej płaszczyzny. Mianowicie między punktami  $X$  jednego okręgu i punktami  $Y$  drugiego okręgu ustalamy wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość wyznaczoną warunkiem, aby wektory  $\overrightarrow{AX}$  i  $\overrightarrow{BY}$  były równoległe i zgodnie skierowane (rys. 82-2).



Rys. 82-2. Wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między punktami dwóch okręgów

płaszczyzna, na której w ten sposób każdemu okręgowi przyporządkowano obieg dodatni, nazywa się *płaszczyzną zorientowaną*.

Na płaszczyźnie zorientowanej każdy okrąg ma określony obieg dodatni i jeśli jakiegokolwiek łuk okręgu zostanie w jakiś sposób skierowany, to zwrot tego łuku nazwiemy *dodatnim* jeśli okaże się on zgodny z obiegiem dodatnim, zaś nazwiemy go *ujemnym*, jeśli będzie on przeciwny do dodatniego obiegu okręgu.

**Kąt skierowany.** Podobnie, jak z odcinka przez skierowanie (tj. rozróżnienie punktów końcowych odcinka, z których jeden wybieramy za początek, a drugi za koniec) powstaje wektor, tak i przez skierowanie kąta (rozróżnienie jego ramion, z których jedno wybieramy jako początkowe, a drugie jako końcowe) powstaje kąt skierowany. Kąt skierowany odgrywa przy obrocie płaszczyzny taką rolę, jak wektor przy translacji.

**Definicja 82.2.** Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. Pierwszą z nich nazywamy *ramieniem początkowym*, a drugą – *ramieniem końcowym*. Wspólny początek obu ramion kąta nazywamy *wierzchołkiem* kąta. Kąt skierowany o ramionach  $OA$  i  $OB$  będziemy oznaczać  $\angle AOB$ . Dla oznaczenia kątów skierowanych używamy też symboli  $\alpha, \beta$  itp.

Kąt skierowany nazywamy *zerowym*, gdy jego ramiona pokrywają się, zaś *półpełnym*, gdy jego ramiona są wzajemnymi przedłużeniami.

**Rozwartością kąta skierowanego** nazywamy miarę kąta wypukłego, którego ramionami są ramiona kąta skierowanego. Rozwartością kąta zerowego jest 0. Rozwartością kąta skierowanego *półpełnego* jest  $180^\circ$ . Kąt skierowany nazywamy *prostym*, gdy ma rozwartość równą  $90^\circ$ .

**Zwrot kąta skierowanego.** Niech będzie dany na płaszczyźnie zorientowanej dowolny kąt skierowany niezerowy i niepółpełny  $\angle AOB$ ,  $OA = OB = r$ . Punkty  $A, B$  wyznaczają na okręgu  $o(O, r)$  dwa łuki, z których jeden leży w obszarze wypukłego kąta  $\angle AOB$ . Łuk ten oznaczamy  $\overrightarrow{AB}$  i skierujemy od  $A$  do  $B$ , tj. tak, aby łuk ten prowadził od początkowego ramienia kąta skierowanego przez obszar kąta wypukłego do końcowego ramienia. Jeśli zwrot tego łuku jest dodatni (zgodny z dodatnim obiegiem na płaszczyźnie zorientowanej), to mówimy, że kąt skierowany  $\angle AOB$  ma zwrot *dodatni*. W przeciwnym razie kątowi  $\angle AOB$  przypisujemy zwrot *ujemny*.

O każdych dwóch kątach skierowanych, niezerowych i niepółpełnych możemy rozstrzygnąć, czy mają zwroty zgodne, czy przeciwne. Dla kątów zerowych i półpełnych nie określamy zwrotu.

**Równość kątów skierowanych.** Dwa kąty skierowane, niezerowe i niepółpełne, nazywamy *równymi*, jeśli mają:

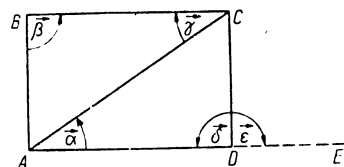
- rozwartości równe oraz
- zwroty zgodne.

Każde dwa kąty skierowane zerowe są równe. Każde dwa kąty skierowane półpełne są równe.

**Kąty przeciwne.** Kątem *przeciwnym* do kąta  $\angle AOB$  nazywamy kąt  $\angle BOA$  i każdy kąt równy kątowi  $\angle BOA$ .

Kąty wzajemnie przeciwnie mają rozwartości równe, a jeśli są to kąty niezerowe i niepółpełne, to ich zwroty są przeciwnie.

Kąt przeciwny do zerowego jest zerowy; kąt przeciwny do półpełnego jest półpełny. Kąty wzajemnie przeciwnie, niezerowe i niepółpełne, nie są równe. Kąt przeciwny do kąta  $\vec{\alpha}$  oznaczamy  $-\vec{\alpha}$  (rys. 82-3).



Rys. 82-3. Kąty skierowane w prostokącie  $ABCD$ :  $\vec{\alpha} = -\vec{\gamma}$ ,  $\vec{\beta} = \vec{\delta} = -\vec{\epsilon}$

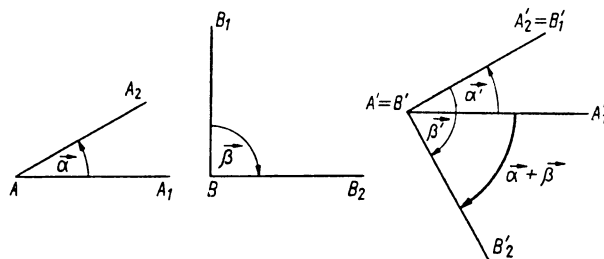
**Kąt skierowany swobodny.** Równość kątów skierowanych jest relacją:

- zwrotną, tzn. dla każdego  $\vec{\alpha}$  jest  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ ,
- symetryczną, tzn. jeśli  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ , to  $\vec{\beta} = \vec{\alpha}$ ,
- przechodnią, tzn. jeśli  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$  i  $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ , to  $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ .

Wobec tego wszystkie kąty skierowane na danej płaszczyźnie można podzielić na klasy, zaliczając do tej samej klasy kąty równe między sobą. Reprezentantem takiej klasy może być dowolny kąt należący do tej klasy. O klasie takiej mówimy, że jest to *kąt skierowany swobodny*.

**Dodawanie kątów skierowanych.** Aby dodać dwa kąty skierowane  $\vec{\alpha}$  i  $\vec{\beta}$ , leżące w płaszczyźnie zorientowanej  $\Sigma$ ,

- obieramy na  $\Sigma$  dowolną półprostą (na rys. 82-4 półprosta  $A'A'_1$ ),
- konstruujemy przy niej kąt  $\vec{\alpha}'$  równy kątowi  $\vec{\alpha}$  w ten sposób, aby ta półprosta była jego pierwszym ramieniem,
- konstruujemy kąt  $\vec{\beta}'$  równy kątowi  $\vec{\beta}$  w ten sposób, aby drugie ramię kąta  $\vec{\alpha}'$  było pierwszym ramieniem kąta  $\vec{\beta}'$  (rys. 82-4).



Rys. 82-4. Dodawanie kątów skierowanych

Kąt skierowany, którego początkowym ramieniem jest pierwsze ramię kąta  $\vec{\alpha}'$ , a końcowym ramieniem — drugie ramię kąta  $\vec{\beta}'$ , nazywamy *sumą kątów skierowanych*  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  i oznaczamy

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

Rozwartość sumy dwóch kątów skierowanych nie musi być sumą rozwartości tych kątów (na rys. 82-4 jest ich różnica). Dwa kąty skierowane o zwrotach dodatnich mogą mieć sumę o zwrocie ujemnym. Suma dwóch kątów wzajemnie przeciwnych jest kątem zerowym.

**Odejmowanie kątów skierowanych.** Różnicą  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  dwóch kątów skierowanych  $\vec{\alpha}$  i  $\vec{\beta}$  nazywamy taki kąt skierowany  $\vec{\epsilon}$ , że suma  $\vec{\epsilon} + \vec{\beta}$  równa się  $\vec{\alpha}$ . Różnicę  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  otrzymamy dodając do kąta  $\vec{\alpha}$  kąt przeciwny kątowi  $\vec{\beta}$ .

**Mnożenie kąta skierowanego przez liczbę naturalną.** Iloczynem  $n \cdot \vec{\alpha}$  kąta skierowanego  $\vec{\alpha}$  przez liczbę naturalną  $n$  nazywamy sumę  $n$  kątów równych  $\vec{\alpha}$ .

Przykład. Jeśli  $\vec{\alpha}$  jest kątem skierowanym o rozwartości  $60^\circ$ , to  $3\vec{\alpha}$  jest kątem półpełnym, a  $6\vec{\alpha}$  kątem zerowym.

**Dzielenie kąta skierowanego  $\vec{\alpha}$  przez liczbę naturalną  $n$**  jest to wyznaczenie kąta skierowanego  $\vec{\beta}$  spełniającego równanie

$$n \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}$$

Równanie to ma zawsze  $n$  rozwiązań. Dzielenie kąta skierowanego przez liczbę naturalną jest więc działaniem wieloznacznym.

Przykład. Rozwiązaniami równania

$$5 \cdot \vec{\beta} = 0$$

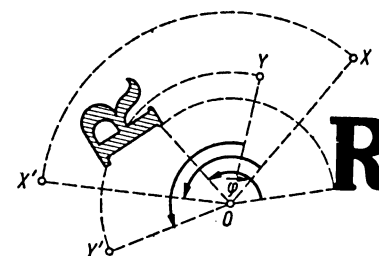
gdzie 0 oznacza kąt zerowy, są następujące kąty: kąt zerowy, dwa kąty wzajemnie przeciwnie o rozwartości  $72^\circ$  i dwa kąty wzajemnie przeciwnie o rozwartości  $144^\circ$ . Sprawdź na rysunku.

**Obrót jako przekształcenie płaszczyzny.** Definicja 82.3. *Obrotem płaszczyzny* *dokoła punktu O o kąt skierowany  $\vec{\varphi}$*  nazywamy przekształcenie płaszczyzny przy-  
porządkowujące:

- punktowi  $O$  punkt  $O$ ,
- punktowi  $X$ , różnemu od  $O$ , taki punkt  $X'$ , że

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX'} \quad \text{oraz} \quad \angle XOX' = \vec{\varphi}$$

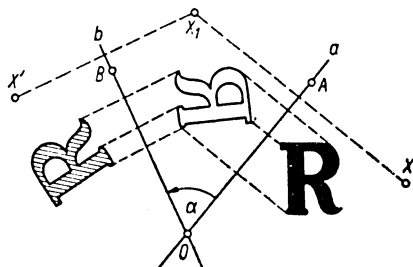
Punkt  $O$  nazywamy *środkiem obrotu*, a kąt  $\vec{\varphi}$  *kątem obrotu* (rys. 82-5).



Rys. 82-5. Obrót płaszczyzny dokoła punktu  $O$  o kąt  $\vec{\varphi}$

Ograniczając się do obrotów, których środkiem jest pewien ustalony punkt  $O$ , możemy powiedzieć, że każdy kąt skierowany wyznacza pewien obrót. Złożenie dwóch obrotów dookoła tego samego środka, mianowicie: obrotu o kąt  $\vec{\alpha}$  i obrotu o kąt  $\vec{\beta}$  jest obrotem dookoła tego samego środka o kąt  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ . Ponieważ dodawanie kątów skierowanych jest przemienne, więc i składanie obrotów o tym samym środku jest przemienne. Obrót płaszczyzny jest izometrią, co wynika z następującego twierdzenia.

**Obrót płaszczyzny jako złożenie dwóch symetrii osiowych. Twierdzenie 82.1.** Złożenie  $S_b, S_a$  dwóch symetrii osiowych względem prostych  $a, b$  przecinających się w punkcie  $O$  pod kątem  $\vec{\alpha} = \angle(a, b)^1$  jest obrotem płaszczyzny dookoła punktu  $O$  o kąt  $\vec{\varphi} = 2\vec{\alpha}$  (rys. 82-6).



Rys. 82-6 Obrót płaszczyzny jako złożenie dwóch symetrii osiowych

**Dowód.** Mamy wykazać, że dla dowolnego punktu  $X$ ,  $X \neq O$ , jest

$$OX = OX' \quad \text{oraz} \quad \angle XOX' = \vec{\varphi} = 2\vec{\alpha}$$

Przekształcenie  $S_b, S_a$  jest izometrią z punktem stałym  $O$ , więc  $OX = OX'$ . Niech  $A, B$  będą punktami różnymi od  $O$  i leżącymi odpowiednio na prostych  $a, b$ . Niech  $X_1$  będzie obrazem punktu  $X$  w symetrii  $S_a$ . Jest

$$\angle XOX_1 = \angle XOA + \angle AOX_1, \quad \angle XOA = \angle AOX_1, \quad \text{stąd} \quad \angle XOX_1 = 2\angle AOX_1$$

Obrazem punktu  $X_1$  w symetrii  $S_b$  jest punkt  $X'$ . Mamy

$$\angle X_1OX' = \angle X_1OB + \angle BOX', \quad \angle X_1OB = \angle BOX', \quad \text{stąd} \quad \angle X_1OX' = 2\angle X_1OB$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \angle XOX' &= \angle XOX_1 + \angle X_1OX' = 2\angle AOX_1 + 2\angle X_1OB = \\ &= 2(\angle AOX_1 + \angle X_1OB) = 2\angle AOB = 2\vec{\alpha} \end{aligned}$$

**Wielokąt foremny i ich symetrie.** Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, którego boki są równe i którego kąty wewnętrzne są równe. Wielokąt foremny o trzech kątach – to trójkąt równoboczny. Czworokąt foremny – to kwadrat. Osiami sy-

<sup>1)</sup> Jest to kąt skierowany, którego wierzchołek jest punktem  $O$ , pierwsze ramie leży na  $a$ , drugie – na  $b$ ; są dwa takie kąty, oba wyznaczają ten sam obrót.

metrii wielokąta foremnego są symetralne wszystkich boków i proste dwusieczne wszystkich kątów (razem jest ich tyle, ile wierzchołków ma wielokąt).

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. W każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg. Okręgi te są współśrodkowe.

Symetrią figury nazywamy każdą izometrię, która przekształca figurę na tę samą figurę. Symetrami wielokąta foremnego są:

- symetrie osiowe (względem symetralnych boków i dwusiecznych kątów),
- obroty dookoła środka okręgu opisanego o  $\frac{1}{n}$  kąta pełnego, gdzie  $n$  jest liczbą boków wielokąta, oraz o każdą wielokrotność tego kąta,
- symetria środkowa (względem środka okręgu opisanego), jeśli  $n$  jest liczbą parzystą.

### Pytania

1. Jaka jest różnica między pojęciami obrotu w fizyce i w geometrii?
2. Co to jest: łuk skierowany, obieg okręgu, płaszczyzna zorientowana, kąt skierowany, rozwartość i zwrot kąta skierowanego?
3. Kiedy dwa kąty skierowane są równe, a kiedy przeciwne?
4. Jak dodajemy kąty skierowane?
5. Na płaszczyźnie dany jest punkt  $O$  i punkty  $A, B, C, D$  różne od  $O$ . Wykazać, że według definicji dodawania kątów skierowanych, bez względu na położenie punktów  $A, B, C, D$  na płaszczyźnie zachodzi równość

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COB + \angle DOA = 0$$

6. Jak określamy: odejmowanie kątów skierowanych, mnożenie kąta skierowanego przez liczbę, dzielenie kąta skierowanego przez liczbę naturalną?
7. Podać określenie obrotu płaszczyzny: a) za pomocą środka obrotu i kąta obrotu; b) jako złożenie dwóch symetrii osiowych.
8. Co to jest wielokąt foremny i jakie są jego symetrie?

## 83. Rodzaje izometrii

**Rozkład izometrii na symetrie osiowe. Twierdzenie 83.1.** Każda izometria jest:

- symetrią osiową lub
- złożeniem dwóch symetrii osiowych lub
- złożeniem trzech symetrii osiowych.

**Dowód.** Niech będzie dana dowolna izometria  $T$ . Obierzmy trzy niewspółliniowe punkty  $A, B, C$ . Obrazami tych punktów w izometrii  $T$  są pewne punkty  $A', B', C'$ . Zachodzą związki

$$T(A) = A' \quad T(B) = B' \quad T(C) = C' \quad (83.1)$$

Do punktów  $A, B, C$  i  $A', B', C'$  można zastosować tw. 79.3. Z dowodu tego twierdzenia wiemy, że istnieje izometria złożona z trzech co najwyżej symetrii osiowych przekształcająca punkty  $A, B, C$  odpowiednio w punkty  $A', B', C'$ . Oznaczmy tę izometrię  $S$ . Jest

$$S(A) = A' \quad S(B) = B' \quad S(C) = C' \quad (83.2)$$

Z równości (83.1) i (83.2) widać, że izometrie  $T$  i  $S$  są zgodne w punktach niewspółliniowych  $A, B, C$ . Wobec tw. 77.4 są one zgodne na całej płaszczyźnie, czyli  $T = S$ . Ale izometria  $S$  (str. 60) jest złożeniem co najwyżej 3 symetrii osiowych, c. n. u.

**Rodzaje izometrii.** Twierdzenie 83.1 pozwala dokonać przeglądu izometrii ze względu na to ile symetrii osiowych wchodzi w skład danej izometrii:

Rodzaj I — izometrie będące symetriasiami osiowymi

$$S_a$$

Rodzaj II — izometrie będące złożeniami dwóch symetrii osiowych

$$S_b S_a$$

Izometrie te można podzielić ze względu na wzajemne położenie osi  $a, b$  symetrii składowych na następujące podrodzaje:

$II_1$  — osie  $a, b$  pokrywają się, izometria taka jest tożsamością;

$II_2$  — osie  $a, b$  są równoległe i nie pokrywają się; izometria taka jest translacją o wektor prostopadły do prostych  $a, b$  i mający długość równą podwójnej odległości tych prostych;

$II_3$  — osie  $a, b$  przecinają się; izometria taka jest obrotem dookoła punktu przecięcia się prostych  $a, b$  o podwójny kąt zawarty między tymi prostymi.

Rodzaj III — izometrie będące złożeniami trzech symetrii osiowych

$$S_c S_b S_a$$

Każda izometria złożona z trzech symetrii osiowych jest symetrią z poślizgiem; w szczególnym przypadku, gdy osie  $a, b, c$  są równoległe lub przechodzą przez jeden punkt, izometria jest symetrią osiową (poślizg jest zerowy).

Oczywiście istnieją izometrie będące złożeniami czterech, pięciu lub większej liczby symetrii osiowych. Jednak każda z takich izometrii może być przedstawiona jako wynik złożenia pewnych symetrii osiowych w liczbie nie większej niż 3.

Wszystkie izometrie dzielimy na parzyste i nieparzyste, zależnie od liczby symetrii osiowych wchodzących w skład danej izometrii. Podział ten jest uzasadniony faktem, że żadna izometria parzysta nie jest identyczna z żadną izometrią nieparzystą. Każda izometria parzysta da się sprowadzić do postaci II rodzaju, a każda izometria nieparzysta do postaci I lub III rodzaju.

Podział izometrii

Izometrie parzyste: izometria tożsamościowa  
translacja  
obrót

Izometrie nieparzyste: symetria osiowa  
symetria osiowa z poślizgiem

Izometrię tożsamościową można uważać za translację zerową lub za obrót zerowy. Symetrię osiową można uważać za symetrię z poślizgiem zerowym.

**Figury przystające wprost i odwrotnie.** Dwie figury nazywamy:

- przystającymi wprost, jeśli jedną figurę można otrzymać z drugiej przez izometrię parzystą (tj. przez translację lub obrót),
- przystającymi odwrotnie, jeśli jedna figura jest obrazem drugiej w izometrii nieparzystej (tj. w symetrii osiowej z poślizgiem).

**Grupa izometrii.** Zbiór wszystkich izometrii ma następujące trzy własności:

- 1 — złożenie dwóch izometrii jest izometrią,
- 2 — przekształcenie odwrotne do izometrii jest izometrią,
- 3 — przekształcenie tożsamościowe jest izometrią.

Te własności zbioru izometrii wyrażamy, mówiąc, że zbiór izometrii tworzy grupę przekształceń.

Zbiór izometrii parzystych również tworzy grupę; mówimy, że jest to podgrupa grupy izometrii. Inne podgrupy — to grupa translacji i grupa obrotów.

**Ogólne określenie grupy.** Jeśli w zbiorze  $Z$  elementów  $x, y, z, \dots$  zostało określone działanie  $\bullet$  na elementach tego zbioru i działanie to:

— jest nieograniczenie wykonalne (tzn. jest wykonalne na dowolnych dwóch elementach zbioru  $Z$ ),

— jest wewnętrzne (tzn. wynik tego działania na dowolnych dwóch elementach zbioru  $Z$  jest elementem zbioru  $Z$ ),

— jest łączne (tzn. dla dowolnych elementów  $x, y, z$  zbioru  $Z$  zachodzi równość  $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ ),

— posiada element neutralny (czyli obojętny, tj. taki element zbioru  $Z$ , który podany temu działaniu wraz z dowolnym elementem  $x$  zbioru  $Z$  daje na wynik element  $x$ ),

— wyznacza elementy przeciwne (tzn. wyznacza dla każdego elementu  $x$  zbioru  $Z$  pewien element  $y$  zbioru  $Z$  taki, że wynik działania  $\bullet$  na elementach  $x$  i  $y$  jest elementem neutralnym), to mówimy, że zbiór  $Z$  wraz z działaniem  $\bullet$  tworzy grupę.

Jeśli nadto działanie  $\bullet$  jest przemienne (tzn.  $x \bullet y = y \bullet x$ ), to mówimy, że grupa jest przemienna.

Przykłady grup przemiennych:

- zbiór kątów skierowanych swobodnych z działaniem dodawania,
- zbiór wektorów swobodnych z działaniem dodawania.

## Rozdział XIII

### WŁASNOŚCI MIAROWE FIGUR PŁASKICH

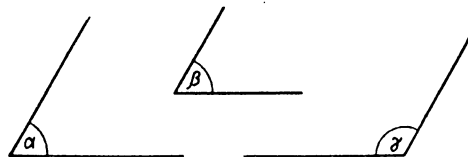
#### 84. Twierdzenie Talesa

Przez słowo „kąt” będziemy w tym rozdziale rozumieli kąt zwykły (nieskierowany), różny od zerowego, półpełnego i pełnego.

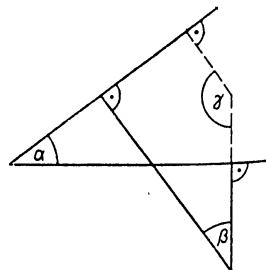
**Kąty o ramionach odpowiednio równoległych.** Twierdzenie 84.1. *Kąty wypukłe o ramionach odpowiednio równoległych są równe lub uzupełniają się do kąta półpełnego<sup>1)</sup> (rys. 84-1).*

**Dowód.** Przedłużamy jedno ramię kąta  $\beta$  i stosujemy tw. 80.3.

**Uwaga.** Słowo „odpowiednio” ma tu następujący sens: pewne ramię kąta  $\alpha$  i pewne ramię kąta  $\beta$  są równoległe oraz pozostałe ramiona tych kątów są równoległe. Twierdzenie 84.1 można wzmocnić: *Kąty wypukłe o ramionach odpowiednio równoległych i zgodnie skierowanych są równe.*



Rys. 84-1



Rys. 84-2

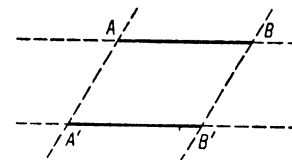
**Kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych.** Twierdzenie 84.2. *Kąty wypukłe o ramionach odpowiednio prostopadłych są równe lub uzupełniają się do kąta półpełnego (rys. 84-2).*

**Dowód.** W dowodzie korzystamy z tw. o sumie kątów trójkąta lub czworokąta.

<sup>1)</sup> Tzn. ich suma jest kątem półpełnym.

**Odcinki równoległe między równoległymi.** Twierdzenie 84.3. *Odcinki wyznaczone na prostych równoległych przez dwie proste równoległe są równe (rys. 84-3), czyli*

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \quad \overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \Rightarrow AB = A'B' \quad AA' = BB'$$

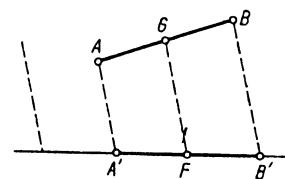


Rys. 84-3

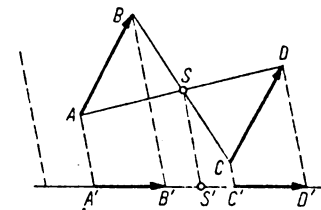
**Dowód.** Twierdzenie jest wnioskiem z trzeciej własności w tw. 80.7.

**Rzuty odcinków równych i równoległych.** Twierdzenie 84.4. *W rzucie równoległym rzut środka odcinka jest środkiem rzutu tego odcinka.*

**Dowód.** Oznaczmy przez  $G$  środek odcinka  $\overline{AB}$  (rys. 84-4) i przez  $F$  środek rzutu  $\overline{A'B'}$  tego odcinka.  $\overline{GF}$  jako środkowa trapezu (por. rys. 81-6) jest równoległa do  $\overline{AA'}$ , czyli do kierunku rzutu, a więc jest rzutującą punktu  $G$  i  $F$  jest rzutem  $G$ .



Rys. 84-4



Rys. 84-5

**Twierdzenie 84.5.** W rzucie równoległym:

- rzuty wektorów równych są wektorami równymi;
- rzuty odcinków równych i równoległych są odcinkami równymi.

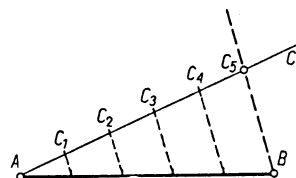
**Dowód.** Założmy, że  $\overline{AB} = \overline{CD}$  (rys. 84-5). Wtedy (tw. 81.1) odcinki  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$  mają wspólny środek  $S$ . Wobec tw. 84.4 także rzuty tych odcinków mają wspólny środek, a stąd (tw. 81.1)  $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$ . Udowodniliśmy pierwszą część tezy; stąd już wynika druga część tezy.

**Podział odcinka na dowolną liczbę równych części.** Twierdzenie 84.6. *Każdy odcinek można podzielić na dowolną liczbę równych części, posługując się cyrklem i liniałem<sup>1)</sup>.*

**Dowód.** Aby podzielić dany odcinek  $\overline{AB}$  na  $n$  równych części (na rys. 84-6 jest  $n = 5$ ), kreślimy półprostą  $AC''$ , nie zawierającą się w prostej  $AB$ , i na niej odkładamy kolejno  $n$  równych odcinków (dowolnej długości)  $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 =$

<sup>1)</sup> Cyrklem kreślimy okręgi i odkładamy odcinki, liniałem kreślimy proste wyznaczone przez dwa punkty.

$= \dots = C_{n-1} C_n$ . Końiec  $C_n$  ostatniego z nich łączymy z końcem  $B$  odcinka  $\overline{AB}$  i otrzymujemy prostą  $C_n B$ , która wyznacza kierunek rzutu. Następnie w tym kierunku rzutujemy punkty  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  na odcinek  $\overline{AB}$ . Rzuty  $C'_1, C'_2, \dots, C'_{n-1}$  dzielą odcinek  $\overline{AB}$  na  $n$  równych części.



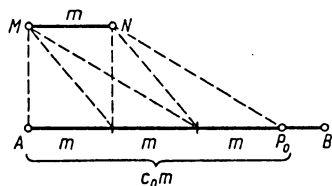
Rys. 84-6. Podział odcinka na 5 równych części

**Stosunek odcinków.** Niech będą dane dwa odcinki:

- odcinek  $\overline{AB}$ , którego długość ma być wyznaczona oraz
- odcinek  $\overline{MN}$  o znanej długości  $m \neq 0$

Na odcinku  $\overline{AB}$ , poczynając od punktu  $A$ , zgodnie z aksjomatem VI, odkładamy odcinek  $\overline{MN}$  kolejno tyle razy, ile to jest możliwe (rys. 84-7), powiedzmy:  $c_0$  razy i znajdujemy na odcinku  $\overline{AB}$  punkt  $P_0$  taki, że

$$AP_0 + P_0 B = AB, \quad AP_0 = c_0 m, \quad 0 \leq P_0 B < m$$



Rys. 84-7. Odkładanie odcinka o długości  $m$  na odcinku  $\overline{AB}$

Istnieje więc nieujemna całkowita liczba  $c_0$  taka, że

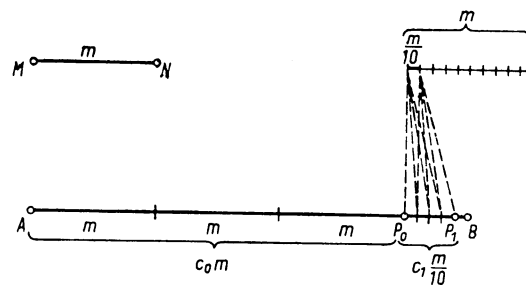
$$c_0 m \leq a < (c_0 + 1)m$$

Jeśli  $P_0 = B$ , pomiar jest skończony,  $c_0 m = a$ , liczbę  $c_0 = \frac{a}{m}$  nazywamy stosunkiem odcinka  $\overline{AB}$  do odcinka  $\overline{MN}$ . Jeśli  $P_0 \neq B$ , to na odcinku  $\overline{P_0 B}$  odkładamy (rys. 84-8) odcinek będący dziesiątą częścią odcinka  $\overline{MN}$ , wyznaczając punkt  $P_1$  taki, że

$$AP_0 + P_0 P_1 + P_1 B = AB, \quad P_0 P_1 = c_1 \frac{m}{10}, \quad 0 \leq P_1 B < \frac{m}{10}$$

Istnieje więc następna całkowita nieujemna liczba  $c_1$  taka, że

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right)m \leq a < \left(c_0 + \frac{c_1 + 1}{10}\right)m$$



Rys. 84-8. Odkładanie odcinka o długości  $\frac{m}{10}$  na odcinku  $\overline{P_0 B}$

Powtarzając to postępowanie, otrzymamy kolejno

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100}\right)m \leq a < \left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2 + 1}{100}\right)m$$

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \frac{c_3}{1000}\right)m \leq a < \left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \frac{c_3 + 1}{1000}\right)m$$

I tak, dla dowolnego naturalnego  $n$  mamy

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n}\right)m \leq a < \left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n + 1}{10^n}\right)m$$

Dzieląc tę nierówność przez  $m$ , dostajemy

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n}{10^n} \leq \frac{a}{m} < c_0 + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_n + 1}{10^n}$$

Lewa i prawa strona powyższej nierówności — to *przybliżenia dziesiętne* stosunku  $\frac{a}{m}$  (dolne i górne), różniące się o  $1/10^n$ , a więc dowolnie mało. Przy  $n$  rosnącym nieograniczenie ciąg przybliżeń dolnych i ciąg przybliżeń górnych dążą do wspólnej granicy

$$c = \frac{a}{m} = \frac{AB}{MN}$$

(jest to liczba wymierna albo niewymierna), którą nazywamy *stosunkiem odcinka  $\overline{AB}$  do odcinka  $\overline{MN}$* . Liczba  $c$  jest długością odcinka  $\overline{AB}$  przy użyciu odcinka  $\overline{MN}$  jako jednostki długości, bowiem jest

$$AB = c MN$$

Wprowadzenie nowej jednostki długości  $\overline{PQ}$ , takiej że  $MN = k PQ$ , powoduje zastąpienie liczby  $c$  liczbą  $ck$ , bowiem

$$AB = c MN = c \cdot k PQ$$

Występujący tu mnożnik  $k$  nazywamy *zamiennikiem* jednostki  $MN$  na jednostkę  $PQ$ . *Zamiennikiem starej jednostki na nową jest długość starej jednostki przy nowej jednostce.* Wprowadzenie nowej jednostki nie zmienia stosunku danych dwóch odcinków

$$\frac{AB}{MN} = \frac{c \cdot k \cdot PQ}{k \cdot PQ} = c$$

**Proporcja odcinkowa.** Mówimy, że cztery odcinki niezerowe o długościach  $a, b, c, d$

tworzą *proporcję*, jeśli stosunek dwóch pierwszych jest równy stosunkowi dwóch pozostałych

$$a : b = c : d \quad (84.1)$$

W stosunku  $a : b$  wyraz  $a$  nazywamy *poprzednikiem*, a wyraz  $b$  *następnikiem* stosunku; podobnie w stosunku  $c : d$  wyraz  $c$  jest poprzednikiem, a wyraz  $d$  następnikiem. W proporcji (84.1)

- wyrazy  $a, d$  nazywamy *skrajnymi*;
- wyrazy  $b, c$  nazywamy *środkowymi*;
- wyrazy  $a, b$  nazywamy *proporcjonalnymi do  $c, d$* ;
- wyraz  $d$  nazywamy *czwartym proporcjonalnym* do wyrazów  $a, b, c$

Jeśli są dane trzy odcinki niezerowe, to zawsze można wyznaczyć czwarty proporcjonalny do nich. Jeśli w proporcji powtarza się pewien wyraz, występując jako środkowy i jako skrajny, np.

$$a : x = x : d$$

to nazywamy go *średnim proporcjonalnym* (inaczej: *średnią geometryczną*) pozostałych dwóch wyrazów

$$x = \sqrt{ad}$$

**Przekształcenie proporcji.** Jeśli prawdziwą jest proporcja (84.1), to prawdziwe są też proporcje otrzymane z niej w wyniku następujących przekształceń:

1 — przestawienie w każdym stosunku poprzednika z następnikiem

$$b : a = d : c$$

2 — przestawienie wyrazów skrajnych

$$a : c = b : d$$

3 — przestawienie wyrazów środkowych

$$d : b = c : a$$

4 — zastąpienie w każdym stosunku poprzednika sumą poprzednika i następnika

$$(a+b) : b = (c+d) : d$$

5 — zastąpienie w każdym stosunku następnika różnicą poprzednika i następnika (jeśli różnice te są różne od zera)

$$a : (a-b) = c : (c-d)$$

6 — zastąpienie w każdym stosunku poprzednika sumą, a następnika różnicą poprzednika i następnika (jeśli różnice te są różne od zera)

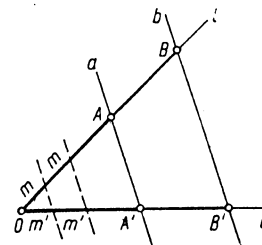
$$(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)$$

oraz przekształcenia otrzymane w wyniku kolejnego zastosowania kilku powyższych przekształceń. Nadto, prawdziwość proporcji pociąga równość iloczynu wyrazów skrajnych i iloczynu wyrazów środkowych

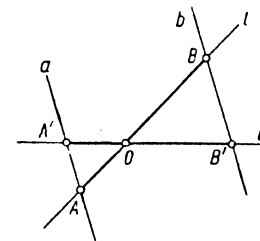
$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

**Twierdzenie Talesa. Twierdzenie 84.7.** Jeśli dwie proste  $l, l'$ , przecinające się w punkcie  $O$  zostaną przecięte dwiema prostymi  $a, b$  nie przechodzącymi przez punkt  $O$  i równoległymi (rys. 84-9 i 84-10)

$$a \parallel b \quad (84.2)$$



Rys. 84-9



Rys. 84-10

to odcinki wyznaczone przez punkt  $O$  i proste  $a, b$  na prostej  $l$  są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez punkt  $O$  i proste  $a, b$  na prostej  $l'$ , a mianowicie

$$OA : OB = OA' : OB' \quad (84.3)$$

**Dowód.** Przypadek, gdy  $\overline{OA}$  i  $\overline{OB}$  są *współmierne*, tzn. gdy istnieje odcinek  $\overline{m}$  oraz liczby naturalne  $a, b$  takie, że

$$OA = am \quad OB = bm$$

Odkładając od punktu  $O$  na prostej  $l$  odcinek  $\overline{m}$  i rzutując go w kierunku prostych  $a, b$ , otrzymamy na  $l'$  odcinek  $\overline{m'}$  (zob. rys. 84-9). Równe odcinki na  $l$  mają równe rzuty na  $l'$ , więc

$$OA' = am' \quad OB' = bm'$$

i prawdziwość proporcji (84.3) jest widoczna.

Przypadek, gdy  $\overline{OA}$  i  $\overline{OB}$  są *niewspółmierne*, tzn. gdy nie istnieje odcinek mieszczący się w danych odcinkach całkowitą liczbę razy. Wykonujemy czynności prowadzące do wyznaczenia stosunku  $OA : OB$  (opisane na str. 90). Otrzymane wówczas na prostej  $l$  punkty podziału  $P_0, P_1, \dots$  rzutują się w kierunku  $a, b$  na prostą  $l'$  jako analogiczne punkty podziału prowadzące do wyznaczenia stosunku  $OA' : OB'$ . Dla obu tych stosunków otrzymujemy te same ułamki dziesiętne jako przybliżenia.

Dwie liczby rzeczywiste mające przy dowolnej dokładności te same przybliżenia dziesiętne — są równe. Proporcja (84.3) została dowiedziona.

**Twierdzenie 84.8** (odwrotne do tw. 84.7). *Jeśli proste  $l, l'$  przecinające się w punkcie  $O$  zostaną przecięte dwiema prostymi  $a, b$  nie przechodzącymi przez  $O$  i odcinki wyznaczone przez  $O, a, b$  na prostej  $l$  są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez  $O, a, b$  na prostej  $l'$*

$$OA : OB = OA' : OB' \quad (84.4)$$

i jeśli punkt  $O$  albo leży na obu odcinkach  $\overline{AB}, \overline{A'B'}$  albo nie leży na żadnym z nich, to proste  $a, b$  są równoległe

$$a \parallel b \quad (84.5)$$

**Dowód.** Prowadząc przez  $B$  prostą  $b_1$  równoległą do  $a$

$$a \parallel b_1$$

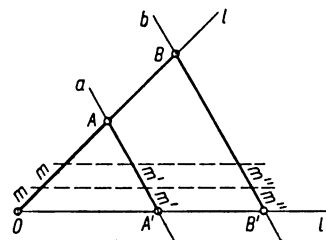
otrzymujemy na  $l'$  punkt  $B_1$  spełniający proporcję

$$OA : OB = OA' : OB_1$$

Wobec założenia (84.4) punkty  $B_1, B'$  pokrywają się i proste  $b_1, b$  pokrywają się, zatem wobec równoległości  $a \parallel b_1$  prosta  $b$  jest równoległa do  $a$ .

**Rozszerzenie twierdzenia Talesa na odcinki poprzeczne.** Rzutując punkty podziału odcinków  $\overline{OA}, \overline{OB}$  w kierunku prostej  $l'$  na odcinki  $\overline{AA'}, \overline{BB'}$  (rys. 84-11), spostrzegamy, że z równoległości prostych  $a, b$  wynika także proporcja:

$$OA : OB = AA' : BB' \quad (84.6)$$



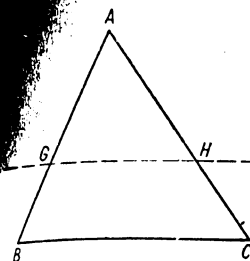
Rys. 84-11

**Wnioski z twierdzenia Talesa. Twierdzenie 84.9** (o prostej równoległej do boku trójkąta). *Prosta równoległa do jednego boku trójkąta i przecinająca pozostałe dwa boki tego trójkąta odcina z tego trójkąta trójkąt o bokach proporcjonalnych do boków danego trójkąta* (rys. 84-12)

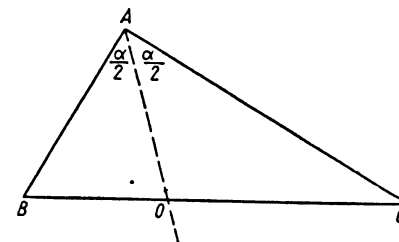
$$\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{GH}{BC} \quad (84.7)$$

**Twierdzenie 84.10** (o podziale boku trójkąta dwusieczną kąta wewnętrznego). *W trójkącie dwusieczna kąta wewnętrznego dzieli bok przeciwny na odcinki proporcjonalne do boków przyległych* (rys. 84-13)

$$OB : OC = AB : AC \quad (84.8)$$



Rys. 84-12



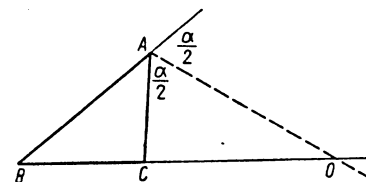
Rys. 84-13

**Dowód.** Kreśląc pomocniczą prostą przez  $C$  równoległą do  $\overline{AB}$  (narysuj), otrzymujemy w przecięciu z prostą dwusieczną kąta przy  $A$  punkt  $D$  i trójkąt  $ACD$  równoramienny, gdyż kąty  $ODC$  i  $OAB$  jako naprzemianległe wewnętrzne są równe, a kąty  $OAB$  i  $OAC$  z założenia są równe. Zatem  $CD = AC$ . Z rozszerzonego tw. Talesa  $OB : OC = AB : CD$ , stąd  $OB : OC = AB : AC$ .

**Podział wewnętrzny i podział zewnętrzny. Definicja 84.1.** Podział odcinka  $\overline{a}$  na części  $x, y$  nazywamy *wewnętrznym*, gdy części są takie, że  $\overline{a}$  jest ich sumą, zaś — *zewnętrznym*, gdy części są takie, że  $\overline{a}$  jest ich różnicą.

**Twierdzenie 84.11** (o podziale zewnętrznym boku trójkąta dwusieczną kąta zewnętrznego). *W trójkącie dwusieczna kąta zewnętrznego, o ile nie jest równoległa do boku przeciwnego, to dzieli go zewnętrznym na odcinki proporcjonalne do boków przyległych* (rys. 84-14)

$$OB : OC = AB : AC \quad (84.9)$$



Rys. 84-14

**Dowód** podobny do poprzedniego; należy poprowadzić przez  $C$  równoległą do  $\overline{AB}$ .

**Zastosowanie twierdzenia Talesa do rzutu wektora**

**Twierdzenie 84.12.** *W danym układzie rzutowania rzut iloczynu wektora przez liczbę równa się iloczynowi rzutu tego wektora przez tę liczbę, co można wyrazić w postaci implikacji*

$$\vec{w} = k\vec{v} \Rightarrow \vec{w}' = k\vec{v}'$$

(implikacja odwrotna nie zawsze jest prawdziwa).

**Pytania i zadania**

1. Udowodnić twierdzenie o odcinkach równoległych między równoległymi.
2. Udowodnić twierdzenie o rzutach odcinków równych i równoległych.

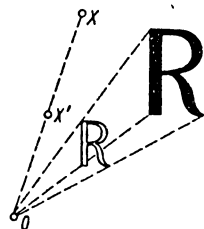
- Opisać i uzasadnić konstrukcję podziału odcinka na  $n$  części.
- Jak wyznacza się stosunek dwóch odcinków?
- Udowodnić twierdzenie Talesa.
- W trapezie o podstawach  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  i ramionach  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  przedłużenia ramion, przecinając się, tworzą wraz z krótszą podstawą  $\bar{b}$  trapezu trójkąt. Obliczyć obwód tego trójkąta.
- Udowodnić twierdzenie o podziale boku trójkąta dwusieczną kąta.
- W trójkącie o bokach  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  bok  $\bar{c}$  został podzielony dwusieczną przeciwległego kąta na dwie części. Wyznaczyć te części.
- W trójkącie boki mają długości 7, 4,  $x$ . Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku przeciwnym bokowi o długości  $x$  odcina na przedłużeniu tego boku odcinek długości 5. Obliczyć  $x$ .

## 85. Jednokładność

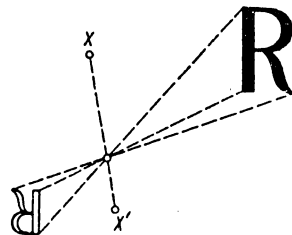
**Jednokładność (czyli homotetia).** Definicja 85.1. *Jednokładnością o środku  $O$  i skali  $s \neq 0$  nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które dowolnemu punktowi  $X$  przyporządkowuje punkt  $X'$  taki, że*

$$\overrightarrow{OX'} = s \cdot \overrightarrow{OX}$$

(rys. 85-1 i 85-2) przedstawiają jednokładności o skalach  $1/2$  i  $-1/2$ .



Rys. 85-1



Rys. 85-2

**Własności jednokładności.** Twierdzenie 85.1. *Jednokładność o skali  $s = 1$  jest przekształceniem tożsamościowym, a jednokładność o skali  $s = -1$  jest symetrią środkową. Jeśli ograniczymy się do jednokładności o tym samym środku, to:*

- przekształcenie odwrotne do jednokładności o skali  $s$  jest jednokładnością o skali  $1/s$ ;
- złożenie dwóch jednokładności o skalach  $s_1$ ,  $s_2$  jest jednokładnością o skali  $s_1 s_2$ , (a zatem przekształcenie złożone nie zależy tu od kolejności wykonywania przekształceń składowych);
- obrazem wektora  $\bar{a}$  w jednokładności o skali  $s$  jest wektor równy wektorowi  $s\bar{a}$ ;
- jednokładność zachowuje współliniowość i uporządkowanie punktów (obraz odcinka jest odcinkiem);
- jednokładność zachowuje równoległość prostych;

- 6 — jednokładność przekształca kąt w kąt przystający do danego kąta oraz kąt skierowany w równy mu kąt skierowany;
- 7 — jednokładność zmienia odległość punktów w stosunku  $|s|$  (nie zawsze jest izometrią), ale zachowuje stosunek odcinków; w szczególności obrazem środka odcinka jest środek obrazu tego odcinka;
- 8 — jednokładność przekształca okrąg w okrąg;
- 9 — zbiór wszystkich jednokładności o środku  $O$  stanowi przemienną grupę przekształceń.

**Figury jednokładne.** Definicja 85.2. *Figury  $F$  i  $F'$  nazywamy jednokładnymi, gdy istnieje jednokładność przekształcająca jedną z tych figur na drugą.*

**Przykład.** Na rysunkach 84-9 i 84-10 prosta  $a$  i odcinek  $\overline{AA'}$  są obrazami prostej  $b$  i odcinka  $\overline{BB'}$  w jednokładności o środku  $O$  i skali  $\frac{OA}{OB}$ .

## Pytania

- Co to jest jednokładność?
- Kiedy jednokładność jest: izometrią, przekształceniem tożsamościowym, symetrią środkową?
- Co to znaczy, że zbiór jednokładności o wspólnym środku jest grupą przekształceń?
- Co to znaczy, że dwie figury są jednokładne?
- Kiedy jednokładne są: dwa okręgi, dwa pierścienie kołowe, dwa kwadraty, dwa odcinki, dwa wektory?

## 86. Figury podobne

**Podobieństwo.** Definicja 86.1. *Podobieństwem w skali  $s$  ( $s > 0$ ) nazywamy przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę zmieniające odległość każdych dwóch punktów w stosunku  $s$*

$$X'Y' = sXY$$

**Własności podobieństwa.** Twierdzenie 86.1.

- Podobieństwo w skali  $s = 1$  jest izometrią.
- Przekształcenie tożsamościowe jest podobieństwem w skali  $s = 1$ .
- Przekształcenie odwrotne do podobieństwa w skali  $s$  jest podobieństwem w skali  $1/s$ .
- Złożenie dwóch podobieństw w skalach  $s_1$  i  $s_2$  jest podobieństwem w skali  $s_1 s_2$ .
- Każde podobieństwo jest złożeniem pewnej jednokładności z pewną izometrią i na odwrót złożenie dowolnej jednokładności z dowolną izometrią jest podobieństwem.

6 — Jeśli są dane trzy niewspółliniowe punkty  $A, B, C$  oraz trzy punkty  $A', B', C'$  takie, że

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

to istnieje dokładnie jedno podobieństwo, w którym punkty  $A', B', C'$  są obrazami punktów  $A, B, C$ .

- 7 — Podobieństwo zachowuje współliniowość i uporządkowanie punktów.
- 8 — Podobieństwo zachowuje stosunek odcinków.
- 9 — Podobieństwo przekształca kąt w kąt przystający.
- 10 — Podobieństwo zachowuje rozwartość kąta skierowanego ale może zmienić jego zwrot.
- 11 — Zbiór wszystkich podobieństw tworzy grupę przekształceń.

**Figury podobne. Definicja 86.2.** Dwie figury  $F$  i  $F'$  nazywamy *podobnymi*, co zapisujemy

$$F \sim F'$$

gdy istnieje podobieństwo przekształcające jedną figurę w drugą.

**Własności figur podobnych. Twierdzenie 86.2.** Wieloboki podobne mają boki proporcjonalne, a kąty odpowiednio równe.

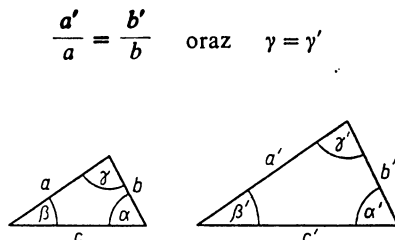
Figury mogą być podobne *wprost* lub *odwrotnie* w zależności od tego czy podobieństwo przekształcające jedną z tych figur w drugą składa się z jednokładności i izometrii parzystej czy też z jednokładności i izometrii nieparzystej.

**Cechy podobieństwa trójkątów. Twierdzenie 86.3.** Dwa trójkąty są podobne, jeśli spełniony jest którykolwiek z poniższych warunków:

**cecha BBB** — trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, co przy oznaczeniach standardowych (rys. 86-1) można zapisać

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

**cecha BKB** — dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe.



Rys. 86-1. Trójkąty podobne mają boki proporcjonalne, a kąty odpowiednio równe

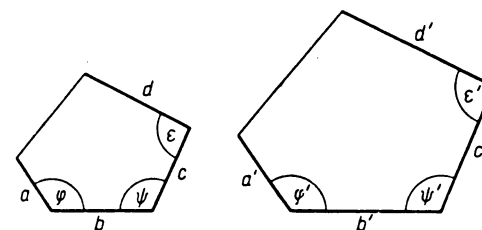
**cecha KK** — dwa kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwom kątom drugiego trójkąta

$$\alpha = \alpha' \quad \text{oraz} \quad \beta = \beta'$$

(wówczas musi być  $\gamma = \gamma'$ , gdyż  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$ ).

**Cecha podobieństwa wielokątów. Twierdzenie 86.4.** Dwa  $n$ -kąty wypukłe są podobne, jeśli wierzchołki jednego z nich można przyporządkować wierzchołkom drugiego w taki sposób, że  $n-1$  kolejnych boków w jednym wielokącie i  $n-1$  kolejnych boków w drugim wielokącie są proporcjonalne, zaś  $n-2$  kolejnych kątów zawartych między tymi bokami w jednym wielokącie i odpowiadające im kąty w drugim wielokącie są parami równe, co w przypadku pięciokątów na rys. 86-2 można zapisać

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} \quad \text{oraz} \quad \varphi = \varphi' \quad \psi = \psi' \quad \varepsilon = \varepsilon'$$



Rys. 86-2. Cecha podobieństwa wielokątów

Wielokąty foremne o tej samej liczbie boków są podobne. Dwa kwadraty są zawsze podobne. Dwa prostokąty nie muszą być podobne. Dwa koła są zawsze podobne. Dwa wycinki kołowe nie zawsze są podobne.

## Pytania

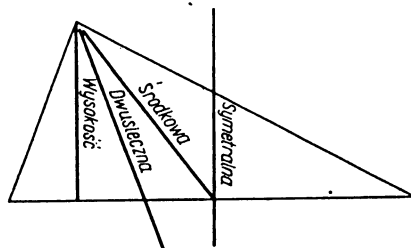
1. Co to jest podobieństwo?
2. Kiedy podobieństwo jest izometrią?
3. Udowodnić, że podobieństwo zachowuje współliniowość.
4. Co to znaczy, że podobieństwa tworzą grupę przekształceń?
5. Co to znaczy, że dwie figury są podobne?
6. Wymienić własności figur podobnych.
7. Wymienić cechy podobieństwa trójkątów.
8. Podać warunki wystarczające dla podobieństwa dwóch czworokątów.
9. Kiedy podobne są: dwa wycinki kołowe? Dwa pierścienie kołowe?
10. Kiedy podobne są: dwa odcinki kołowe? Dwa wycinki pierścieni kołowych?
11. Kiedy podobne są: dwa odcinki, dwie półpłaszczyzny, dwa pasy?
12. Kiedy podobne są dwa kąty (dokładniej mówiąc: obszary dwóch kątów)?

## 87. Twierdzenia o trójkącie

**Punkty szczególne trójkąta.** W każdym trójkącie:

- trzy symetralne boków przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego;
- trzy dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego;
- dwusieczne kątów zewnętrznych przy dwóch wierzchołkach i dwusieczna kąta wewnętrznego przy trzecim wierzchołku przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu dopisanego; każdy trójkąt ma trzy okręgi dopisane (str. 236);
- trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie zwanym środkiem ciężkości trójkąta (punkt ten jest środkiem ciężkości trójkąta wyciętego z jednorodnej blachy); punkt ten dzieli każdą ze środkowych na 2 części, z których jedna jest 2 razy dłuższa od drugiej;
- trzy proste, na których leżą wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie zwanym ortocentrum trójkąta.

W trójkącie równoramiennym: symetralne podstawy, środkowa podstawy, dwusieczna kąta przeciwnego do podstawy i wysokość opuszczona z wierzchołka tego kąta na podstawę – pokrywają się. Analogiczne cztery linie należące do ramienia trójkąta nie muszą się pokrywać. W trójkącie różnobocznym żadne dwie z tych linii nie pokrywają się (rys. 87-1). W trójkącie równobocznym każda symetralna



Rys. 87-1

jest zarazem środkową, dwusieczną i wysokością, skąd wynika, że promień  $r$  koła wpisanego jest równy  $1/3$  wysokości, a promień  $R$  koła opisanego jest równy  $2/3$  wysokości.

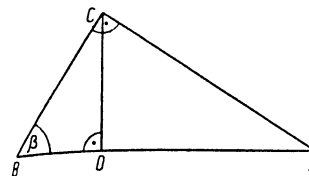
**Własności trójkąta prostokątnego. Twierdzenie 87.1.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  wysokość  $CD$  opuszczona z wierzchołka kąta prostego  $C$  na przeciwprostokątną  $AB$  dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne  $ACD$  i  $CBD$  podobne jeden do drugiego i oba podobne do trójkąta  $ABC$  (rys. 87-2).

**Dowód.** Kąt  $\beta$  jest wspólny trójkątom  $CBD$  i  $ABC$ , nadto trójkąty te mają po jednym kącie prostym, zatem według cechy  $KK$  są podobne.

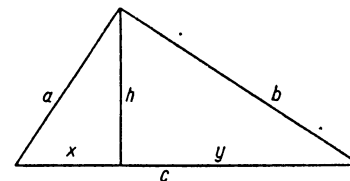
Tak samo wykazuje się podobieństwo trójkątów  $ACD$  i  $ABC$ .

**Uwaga.** W zapisie symbolicznym przystawiania i podobieństwa trójkątów zwracamy uwagę na to, aby wierzchołki trójkątów wymieniać w kolejności zgodnej

z ich wzajemną odpowiednością, tzn. jeśli wierzchołki jednego trójkąta wymienimy w kolejności np. od najmniejszego kąta do największego, to i w drugim trójkącie należy wierzchołki wymieniać w takiej kolejności.



Rys. 87-2



Rys. 87-3

Zgodnie z tą uwagą zapiszemy tezę twierdzenia 87.1

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD \quad (87.1)$$

W trójkątach podobnych boki są proporcjonalne. Jeśli w zapisie podobieństwa dwóch trójkątów przestrzegano właściwej kolejności wierzchołków, to aby poprawnie zapisać proporcjonalność boków, wystarczy skorzystać z odpowiedniości liter w zapisie (87.1)

$$AB : BC = CB : BD = AC : CD \quad (87.2)$$

Zapisy wielu twierdzeń o własnościach miarowych stają się bardziej przejrzyste, gdy wprowadzimy do nich jednolite oznaczenia długości odcinków i miar kątów. Wprowadzwszy takie oznaczenia (rys. 87-3), zapiszemy proporcję (87.2) w postaci

$$c : a = a : x = b : h \quad (87.3)$$

**Twierdzenie 87.2.** W trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest średnią geometryczną przeciwprostokątnej i swego rzutu na przeciwprostokątną.

**Dowód.** Z proporcji (87.3) bierzemy część  $c : a = a : x$ , skąd  $a^2 = cx$ ,  $a = \sqrt{cx}$  czyli  $a$  jest średnią geometryczną  $c$  i  $x$ .

Zamieniając ze sobą przyprostokątne  $a$ ,  $b$  oraz zamieniając ze sobą ich rzuty,  $x$ ,  $y$  otrzymujemy z równości (87.3) równość

$$c : b = b : y = a : h \quad (87.4)$$

skąd otrzymujemy  $b^2 = cy$ , czyli  $b = \sqrt{cy}$ , c.n.u.

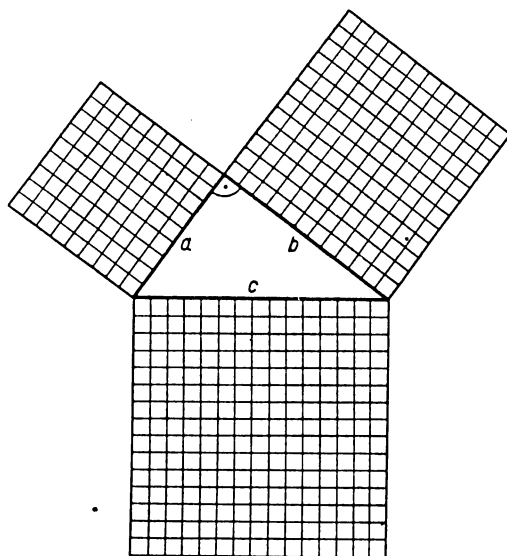
**Twierdzenie 87.3.** (o wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną). W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną dzieli ją na dwie części w taki sposób, że jest dla tych części średnią geometryczną, co przy oznaczeniach rys. 87-3 zapisuje się

$$h = \sqrt{x \cdot y} \quad (87.5)$$

**Twierdzenie Pitagorasa. Tw. 87.4.** W trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (87.6)$$

Też twierdzenia Pitagorasa można rozumieć jako związek między liczbami  $a, b, c$  stanowiącymi długości boków, ale można też rozumieć jako równość między polem kwadratu wystawionego na przeciwprostokątnej i sumy pól kwadratów wystawionych na przyprostokątnych (rys. 87-4).



Rys. 87-4. Twierdzenie Pitagorasa:  $a^2 + b^2 = c^2$

**Dowód.** Z twierdzenia 87.2 mamy  $a^2 = cx$  oraz  $b^2 = cy$ . Dodając stronami, otrzymujemy  $a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y) = c^2$ .

**Uwaga.** Uogólnienie tw. Pitagorasa (tw. cosinusów) jest w rozdz. XVI.

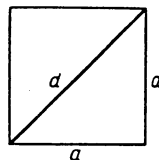
**Zastosowania twierdzenia Pitagorasa.** Mając daną figurę, która nie jest trójkątem prostokątnym, prowadzimy w niej linie pomocnicze takie, aby otrzymać trójkąty prostokątne. Znając dwa boki trójkąta prostokątnego, możemy wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa trzeci bok tego trójkąta. Często twierdzenie Pitagorasa dostarcza nam jednego z równań potrzebnych do wyznaczenia niewiadomych.

**Przekątna kwadratu o boku  $a$  ma długość**

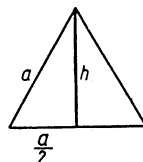
$$d = a\sqrt{2}$$

(87.7)

**Dowód** (rys. 87-5).  $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ ,  $d = a\sqrt{2}$ .



Rys. 87-5



Rys. 87-6

**Wysokość trójkąta równobocznego o boku  $a$  wynosi**

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad (87.8)$$

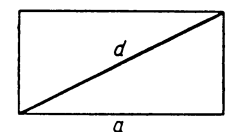
**Dowód** (rys. 87-6).  $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$ ,  $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

**Promień okręgu wpisanego, promień okręgu opisanego i pole trójkąta równobocznego wyrażają się wzorami**

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{3} \quad R = \frac{a}{3}\sqrt{3} \quad S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \quad (87.9)$$

**Przekątna prostokąta o bokach  $a, b$  ma długość** (rys. 87-7)

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (87.10)$$

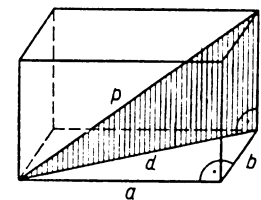


Rys. 87-7

**Przekątna prostopadłościanu o krawędziach  $a, b, c$  ma długość**

$$p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (87.11)$$

**Dowód** (rys. 87-8).  $p^2 = d^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + c^2$



Rys. 87-8

Stąd wynika, że **przekątna sześcianu o krawędzi  $a$  ma długość**

$$p = a\sqrt{3} \quad (87.12)$$

**Inne twierdzenia o trójkącie**

**Twierdzenie 87.5** (Menelaosa i Cevy). Jeśli na prostych  $a, b, c$  przecinających się parami w punktach

$$A = b \cap c \quad B = c \cap a \quad C = a \cap b$$

obrane zostały punkty  $A', B', C'$  w ten sposób, że

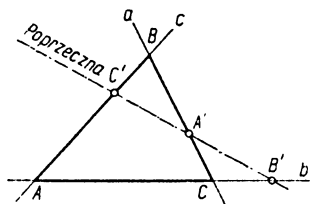
$$A' \in a \quad B' \in b \quad C' \in c$$

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = A'B \cdot B'C \cdot C'A$$

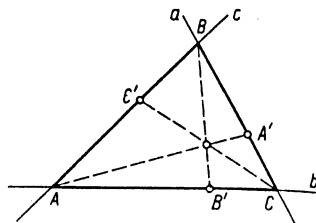
(87.13)

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby:

— punkty  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  należały do jednej prostej, zwanej *poprzeczną* w trójkącie  $ABC$ , w przypadku, gdy do boków trójkąta  $ABC$  należą dokładnie dwa z tych punktów lub żaden (twierdzenie Menelaosa, rys. 87-9);



Rys. 87-9



Rys. 87-10

— proste  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  należały do jednego pęku w przypadku, gdy do boków trójkąta  $ABC$  należą wszystkie trzy lub tylko jeden z punktów  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  (twierdzenie Cevy, rys. 87-10).

**Twierdzenie 87.6.** W dowolnym trójkącie trzy proste poprowadzone z wierzchołków do punktów styczności okręgu wpisanego z bokami przeciwnymi przecinają się w jednym punkcie. Jest to piąty punkt szczególny trójkąta, zwany *punktem Gergonne'a*.

**Twierdzenie 87.7.** W dowolnym trójkącie środek ciężkości, środek okręgu opisanego, środek okręgu przechodzącego przez środki boków i ortocentrum są współliniowe.

**Twierdzenie 87.8** (o okręgu 9 punktów). W dowolnym trójkącie środki boków, spodki wysokości i środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami leżą na jednym okręgu, zwanym *okręgiem dziewięciu punktów* czyli *okręgiem Eulera*.

**Wielokąty foremne.** Zagadnienie: znając długość  $a$  boku  $n$ -kąta foremnego obliczyć długości:

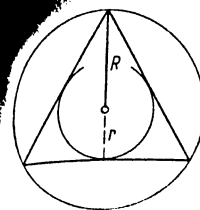
- $r$  promienia koła wpisanego i
- $R$  promienia koła opisanego.

Rozwiązanie za pomocą trygonometrii przy dowolnej liczbie  $n$  boków podajemy w rozdz. XIVp.94. Rozwiązanie konstrukcyjne (cyrklem i liniałem) względnie rachunkowe (za pomocą równań algebraicznych) jest możliwe, jak to udowodnił Gauss w 1801 r., tylko dla pewnych wartości  $n$ , mianowicie dla

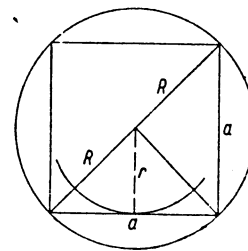
$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, \dots$$

W trójkącie (rys. 87-11) jest

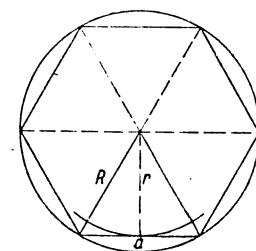
$$r = \frac{h}{3} = \frac{a}{6} \sqrt{3} \quad R = \frac{2}{3} h = \frac{a}{3} \sqrt{3} \quad (87.14)$$



Rys. 87-11



Rys. 87-12



Rys. 87-13

W kwadracie (rys. 87-12) jest (zob. wzór (87.7))

$$r = \frac{a}{2} \quad R = \frac{d}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{2} \quad (87.15)$$

Przypadek pięciokąta i dziesięciokąta omawiamy poniżej.

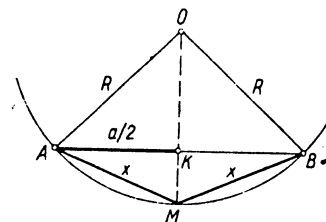
W sześciokącie (rys. 87-13) jest

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{3} \quad R = a \quad (87.16)$$

**Problem podwojenia liczby boków** jest to następujące zadanie: Mając daną długość  $R$  promienia koła i długość  $a = AB$  boku wielokąta foremnego wpisanego, obliczyć długość  $x$  boku wielokąta foremnego o dwa razy większej liczbie boków wpisanego w to samo koło.

**Rozwiązanie** (rys. 87-14). Z trójkąta prostokątnego  $AKM$  mamy

$$KM = \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad OK = OM - KM = R - \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$



Rys. 87-14

Z trójkąta prostokątnego  $AKO$  mamy  $AK^2 + KO^2 = AO^2$ , czyli

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(R - \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2 = R^2$$

stąd

$$x = R \sqrt{2 \pm 2 \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2}} \quad (87.17)$$



- 2 — kąt prosty w jednym trójkącie jest położony względem boków  $a, b$  tak samo jak kąt prosty względem boków  $a', b'$  w drugim trójkącie, to trójkąty te są podobne.

Dowód analogiczny do poprzedniego.

**Czwarta cecha przystawania i podobieństwa trójkątów.** Jeśli dwa boki i kąt położony naprzeciwko większego z tych boków w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwom bokom i kątowi położonemu naprzeciwko większego z tych boków w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli dwa boki w jednym trójkącie są proporcjonalne do dwóch boków w drugim trójkącie i jeśli kąt leżący naprzeciwko większego z tych boków w jednym trójkącie jest równy kątowi leżącemu naprzeciwko większego boku w drugim trójkącie, to trójkąty te są podobne.

### Pytania

1. Wymienić punkty szczególne trójkąta i ich własności.
2. Jakie proporcje zachodzą między bokami trójkąta prostokątnego i rzutami przyprostokątnych na przeciwprostokątną?
3. Wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie Pitagorasa.
4. Wyprowadzić wzory na wysokość, promień okręgu wpisanego i promień okręgu opisanego dla trójkąta równobocznego o boku  $a$ .
5. Obliczyć długość przekątnej kwadratu, prostokąta i prostopadłościanu, których boki (względnie krawędzie) są dane.
6. Rozwiązać problem podwojenia liczby boków wielokąta foremnego.
7. Obliczyć bok 10-kąta foremnego i bok 5-kąta foremnego wpisanych w koło o promieniu  $R$ .
8. Wypowiedzieć cechy przystawania i podobieństwa trójkątów prostokątnych.

## 88. Twierdzenia o okręgu

**Twierdzenie 88.1** (o cięciwach i odpowiadających im kątach środkowych). *W tym samym okręgu (lub w dwóch okręgach o takim samym promieniu):*

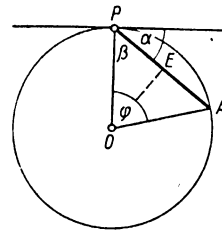
- równym kątom środkowym wypukłym odpowiadają równe cięciwy;
- większemu z dwóch kątów wypukłych środkowych odpowiada dłuższa cięciwa.

**Twierdzenie 88.2** (o cięciwach i ich odległościach od środka okręgu). *W tym samym okręgu (lub w dwóch okręgach o takim samym promieniu):*

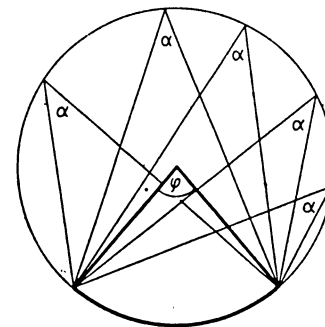
- równe cięciwy są jednakowo odległe od środka;
- dłuższa cięciwa jest bliżej środka.

**Twierdzenie 88.3** (o kącie między cięciwą i styczną). *Kąt ostry między cięciwą i styczną przechodzącą przez koniec cięciwy jest równy połowie kąta środkowego odpowiadającego cięciwie.*

**Dowód** (rys. 88-1). Prowadząc dwusieczną kąta środkowego, otrzymujemy trójkąty przystające  $\triangle POE = \triangle AOE$  (według cechy  $KBK$ , gdyż  $OP = OA$ ,  $OE = OE$ ,  $\sphericalangle POE = \sphericalangle AOE$ ), zatem  $\sphericalangle PEO = \sphericalangle AEO = 90^\circ$ . Suma kątów w trójkącie  $PEO = \frac{\varphi}{2} + \beta + 90^\circ = 180^\circ$ , stąd  $\frac{\varphi}{2} + \beta = 90^\circ$ . Także  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Zatem  $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ .

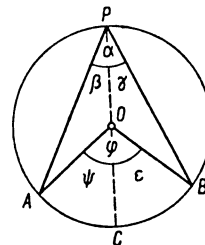


Rys. 88-1. Kąt  $\alpha$  jest równy połowie kąta  $\varphi$

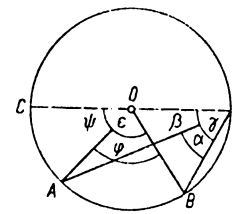


Rys. 88-2. Każdy z kątów  $\alpha$  jest równy połowie kąta  $\varphi$

**Twierdzenie 88.4** (o kącie środkowym i kątach wpisanych opartych na tym samym łuku). *Wszystkie kąty wpisane w dany okrąg i oparte na tym samym łuku są równe między sobą i równe połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku* (rys. 88-2).



Rys. 88-3

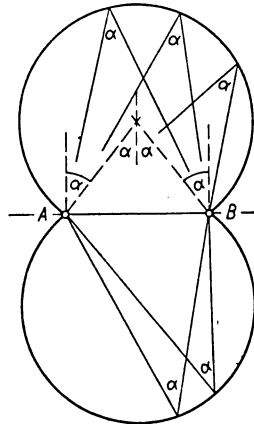


Rys. 88-4

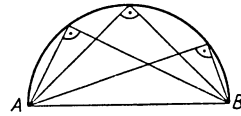
**Dowód.** Wystarczy udowodnić, że każdy z kątów wpisanych opartych na łuku  $AB$  jest równy połowie kąta środkowego  $\varphi$  opartego na tym łuku. Prowadząc przez wierzchołek  $P$  kąta wpisanego średnicę  $PC$  możemy mieć przypadek jak na rys. 88-3. Trójkąt  $OAP$  jest równoramienny, więc  $\sphericalangle OAP = \sphericalangle APO = \beta$  i kąt zewnętrzny  $\psi = 2\beta$ . Podobnie  $\varepsilon = 2\gamma$ . Zatem  $\varphi = \psi + \varepsilon = 2\beta + 2\gamma = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$ . W przypadku, jak na rys. 88-4,  $\varphi = \varepsilon - \psi = 2\gamma - 2\beta = 2(\gamma - \beta) = 2\alpha$ .

Z twierdzenia 88.4 wynika, że zbiór wszystkich punktów, z których dany odcinek  $AB$  widać pod danym kątem  $\alpha$ , jest sumą dwóch łuków okręgów symetrycznych względem prostej  $AB$  (rys. 88-5) z odrzuceniem samych punktów  $A, B$ . Aby znaleźć środek jednego z tych okręgów, należy poprowadzić z punktów  $A, B$  proste odchylone o kąt  $\alpha$  od prostopadłych do  $AB$ .

**Twierdzenie 88.5** (o kącie w półkolu). Kąt wpisany w półkole i oparty na średnicy jest prosty. Miejscem geometrycznym<sup>1)</sup> punktów, z których widać odcinek  $\overline{AB}$  pod kątem prostym, jest okrąg o średnicy  $\overline{AB}$  z odrzuceniem samych punktów  $A, B$  (rys. 88-6).



Rys. 88-5

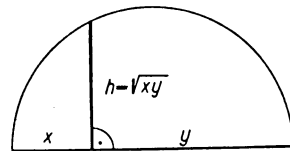


Rys. 88-6

**Dowód.** Jest to wniosek z tw. 88.4.

**Twierdzenie 88.6** (o odcinku prostym do średnicy półkolu). Odcinek prostopadły opuszczonej z dowolnego punktu okręgu na średnicę jest średnią geometryczną odcinków, na które ta prostopadła dzieli średnicę (rys. 88-7)

$$h = \sqrt{xy} \quad (88.1)$$



Rys. 88-7

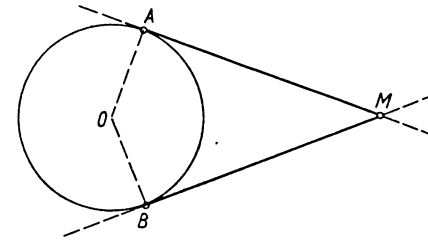
**Dowód.** Jest to wniosek z tw. 88.5 i tw. 87.3.

**Twierdzenie 88.7** (o odcinkach stycznych do okręgu). Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z danego punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równe (rys. 88-8)

$$MA = MB \quad (88.2)$$

**Dowód.** Trójkąty  $\triangle MOA$  i  $\triangle MOB$  są przystające, gdyż  $MO = MO$ ,  $AO = BO$ ,  $\angle A = \angle B = 90^\circ$  (zob. tw. 78.11 i tw. 87.9), zatem  $MA = MB$ .

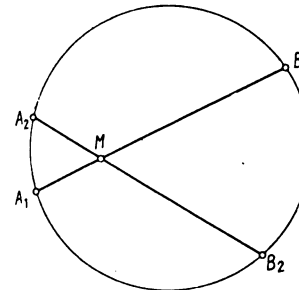
<sup>1)</sup> Zbiór wszystkich punktów spełniających dany warunek jest nazywany *miejszem geometrycznym* punktów spełniających dany warunek.



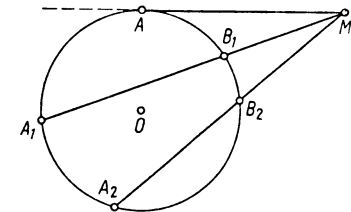
Rys. 88-8

**Twierdzenie 88.8** (o odcinkach siecznych). Jeśli dwie sieczne przecinają się w pewnym punkcie  $M$ , to iloczyn odległości punktu  $M$  od punktów  $A_1, B_1$ , w których jedna sieczna przecina okrąg, jest równy iloczynowi odległości punktu  $M$  od punktów  $A_2, B_2$ , w których druga sieczna przecina okrąg (rys. 88-9 i 88-10)

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 \quad (88.3)$$



Rys. 88-9



Rys. 88-10

W przypadku, gdy punkt  $M$  leży zewnątrz okręgu, iloczyn ten jest równy kwadratowi długości odcinka stycznej

$$MA^2 = d^2 - r^2 \quad (88.4)$$

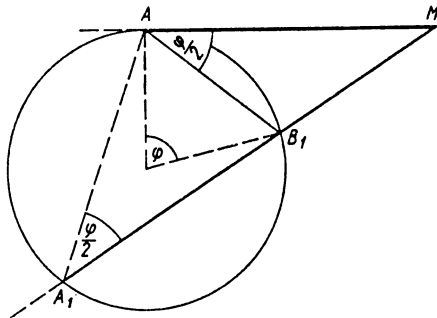
gdzie  $d$  jest odległością punktu  $M$  od środka okręgu, a  $r$  jest długością promienia okręgu.

**Dowód.** Trójkąty  $\triangle MA_1B_2$  i  $\triangle MA_2B_1$  są podobne, gdyż  $\angle A_1MB_2 = \angle A_2MB_1$  oraz  $\angle MA_1B_2 = \angle MA_2B_1$  jako kąty wsparte na tym samym łuku  $B_1B_2$ . Stąd  $MA_1 : MB_2 = MA_2 : MB_1$ , a stąd równość (88.3).

Jeśli  $M$  leży zewnątrz okręgu (rys. 88-10), to obracając sieczną  $MA_1$  dookoła punktu  $M$  ku stycznej  $MA$ , widzimy, że  $MA_1 \rightarrow MA$ ,  $MB_1 \rightarrow MA$ , więc  $MA_1 \cdot MB_1 \rightarrow MA^2$ , ale podczas tego obrotu  $MA_1 \cdot MB_1 = \text{const}$ , więc  $MA_1 \cdot MB_1 = MA^2$ . Inny dowód tej równości opiera się na podobieństwie trójkątów  $\triangle MAB_1$  i  $\triangle MA_1A$  (rys. 88-11).

Równość (88.4) wynika z tw. Pitagorasa zastosowanego do  $\triangle MAO$ .

**Potęga punktu względem okręgu. Definicja 88.1.** Liczbę  $d^2 - r^2$ , gdzie  $d$  jest odległością punktu od środka okręgu, a  $r$  jest długością promienia okręgu, nazywamy *potęgą punktu względem okręgu*. *Linia potęgowa dwóch okręgów* (niewspółśrodkowych) nazywamy miejsce geometryczne punktów mających równe potęgi wzglę-



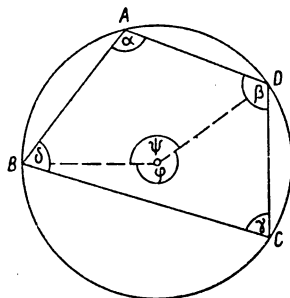
Rys. 88-11

dem obu danych okręgów (udowadnia się, że jest to prosta prostopadła do odcinka łączącego środki danych okręgów i przechodząca przez ich punkty wspólne, jeśli okręgi się przecinają, względnie przez punkt styczności, jeśli okręgi są styczne, względnie przechodząca między okręgami, jeśli okręgi nie mają punktów wspólnych).

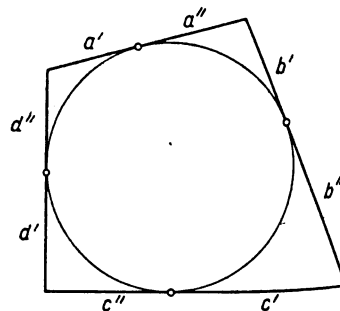
**Czworokąt wpisany w okrąg. Twierdzenie 88.9.** Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wierzchołki czworokąta leżały na okręgu jest aby *sumy przeciwległych kątów były równe*.

**Dowód.** Wykażemy, że warunek ten jest konieczny. Jeśli czworokąt jest wpisany w okrąg (rys. 88-12), to  $\alpha = \frac{1}{2} \varphi$ ,  $\gamma = \frac{1}{2} \psi$ , stąd  $\alpha + \gamma = \frac{1}{2} (\varphi + \psi) = 180^\circ$  oraz  $\beta + \delta = 360^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ$ . Zatem  $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ . Dowód, że warunek ten jest wystarczający, pomijamy.

**Czworokąt opisany na okręgu. Twierdzenie 88.10.** Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby w czworokąt można było wpisać okrąg, jest aby *sumy długości przeciwległych boków były równe*.



Rys. 88-12



Rys. 88-13

**Dowód** (rys. 88-13). Jeśli czworokąt jest opisany na okręgu, to każdy bok jest sumą dwóch odcinków stycznych i wobec tw. 88.7

$$\begin{aligned} a' &= d'' \\ a'' &= b' \\ c' &= d'' \\ c'' &= b' \end{aligned}$$


---


$$a' + a'' + c' + c'' = b' + b'' + d' + d''$$

$$a + c = b + d$$

Wykazaliśmy, że warunek jest konieczny. Dowód, że warunek ten jest wystarczający, pomijamy.

### Pytania i zadania

1. Wypowiedzieć związek między długością cięciwy, jej odległością od środka i kątem środkowym w okręgu o danym promieniu.
2. Wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie:
  - o kącie między cięciwą i styczną,
  - o kącie środkowym i kącie wpisanym opartych na tym samym łuku,
  - o kącie w półkoło,
  - o odcinkach stycznych,
  - o odcinkach siecznych.
3. Udowodnić, że kąt ostry między cięciwą okręgu i styczną do okręgu przechodzącą przez koniec cięciwy jest równy ostremu kątowi wpisanemu w okrąg i opartemu na tej cięciwie. Wsk.: Tw. 88.3 i Tw. 88.4.
4. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości: 15 i 20. Na krótszej przyprostokątnej, jako na średnicy, zbudowano okrąg. Obliczyć długości odcinków, na jakie ten okrąg podzielił przeciwprostokątną. Wsk.: Tw. 87.4, Tw. 88.5 i Tw. 88.6.
5. Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości: 12 i 16. Obliczyć średnicę okręgu przechodzącego przez środek krótszej przyprostokątnej i stycznego do przeciwprostokątnej w jej środku. Wsk.: Tw. 87.4, 84.8, 88.3, 88.4 i 86.3.
6. Jaką własność ma czworokąt wpisany w okrąg?
7. Jaką własność ma czworokąt opisany na okręgu?

### 89. Pole figury i długość krzywej

**Ogólne określenie pola.** Niech będzie dany pewien zbiór figur płaskich. Polem figury nazywamy funkcję, która każdej figurze  $f$  należącej do danego zbioru figur przyporządkowuje liczbę nieujemną

$$m(f)$$

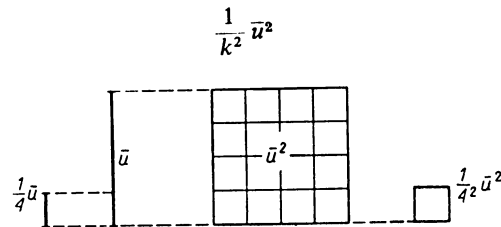
zwaną polem figury  $f$ , w taki sposób, aby spełnione były warunki:

- 1 — figury przystające mają pola równe,
- 2 — figura będąca sumą dwóch figur nie mających wspólnych punktów wewnętrznych ma pole równe sumie pól figur składowych.

Są to ogólne własności pola figury. W ramach tych warunków można sformułować taką lub inną definicję pola. Podamy definicję pochodzącą od Jordana<sup>1)</sup>. Jeśli przez figurę będziemy rozumieć dowolny zbiór punktów, to istnieją figury, dla których pole w sensie Jordana nie istnieje.

**Jednostka pola.** Jeśli odcinek  $\bar{u}$  jest jednostką długości, to kwadrat o boku  $\bar{u}$  nazywamy kwadratem jednostkowym albo jednostką pola i oznaczamy  $\bar{u}^2$ .

Jeśli każdy bok kwadratu jednostkowego podzielimy na  $k$  równych części i przez punkty przedziału poprowadzimy odcinki równoległe do boków kwadratu, to podzielimy go na  $k^2$  przystających kwadratów i, zgodnie z warunkiem 2 wymienionym na wstępie, każdemu z nich przypiszemy pole równe  $1/k^2$  (rys. 89-1) i powiemy, że kwadrat o boku równym  $1/k \bar{u}$  ma pole



Rys. 89-1

(w tym wyrażeniu  $1/k^2$  jest liczbą wymiarową pola, a  $\bar{u}^2$  jest jednostką pola, której odpowiada dana liczba wymiarowa). Kwadrat ten jest jednostką pola pochodzącą od jednostki podstawowej  $\bar{u}^2$ . Z kolei dzieląc bok tego kwadratu na  $k$  części otrzymamy następną jednostkę pola

$$\frac{1}{k^4} \bar{u}^2$$

pochodzącą od jednostki podstawowej  $\bar{u}^2$ . W systemie metrycznym przyjmuje się  $k = 10$  i mamy  $\text{cm}^2, \text{mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2$ , itd.

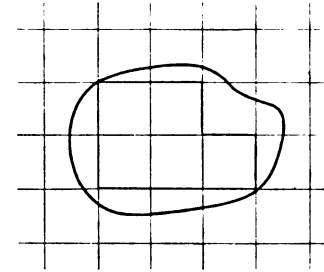
**Pole dowolnej figury.** Niech będzie dana ograniczona figura płaska  $f$ . Nakładamy na nią sieć kwadratową o odstępach  $\bar{u}$  (rys. 89-2), nazwiemy ją *siecią wyjściową*, i wyznaczamy:

- liczbę  $w_0$  kwadratów tej sieci zawartych w figurze  $f$ ,
- liczbę  $z_0$  kwadratów tej sieci *pokrywających* figurę  $f$ ,

tj. kwadratów zawierających co najmniej jeden punkt wewnętrzny lub brzegowy figury  $f$ . Zawsze musi być  $w_0 < z_0$  (na rys. 89-2 jest  $w_0 = 5, z_0 = 18$ ). Liczby  $w_0, z_0$  są określone dla każdej figury i dla każdej sieci, aczkolwiek zastrzegamy się:

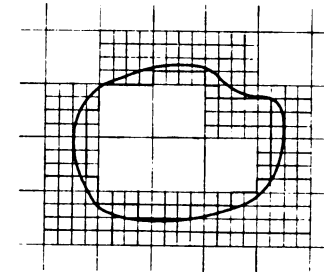
<sup>1)</sup> Camille Jordan, matematyk francuski 1838-1922.

nie dla każdej figury pole musi istnieć. Liczby te możemy nazwać przybliżeniem dolnym i przybliżeniem górnym pola.



Rys. 89-2

Na sieć wyjściową nakładamy sieć kwadratową o odstępach  $1/k \bar{u}$  (na rys. 89-3 jest  $k = 4$ ) i wyznaczamy analogiczne do poprzednich, ale dokładniejsze, przybliżenia pola figury  $f$ :



Rys. 89-3

— liczbę  $w_1$  wyrażającą w jednostkach  $\bar{u}^2$  łączne pole kwadratów tej sieci zawartych w figurze  $f$ ,

— liczbę  $z_1$  wyrażającą w jednostkach  $\bar{u}^2$  łączne pole kwadratów tej sieci *pokrywających* figurę  $f$ . Jest

$$w_0 \leq w_1 < z_1 \leq z_0$$

Kolejno nakładamy na figurę  $f$  sieci kwadratowe o odstępach  $\frac{1}{k^n} \bar{u}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) i otrzymujemy dwa ciągi liczb  $w_n$  i  $z_n$

$$w_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n < z_n \leq \dots \leq z_2 \leq z_1 \leq z_0$$

Ciągi te są monotoniczne i ograniczone, a więc zbieżne

$$\lim w_n = w(f) \quad \lim z_n = z(f)$$

Granice te istnieją zawsze, mają nazwy:

$w(f)$  — *wewnętrzna miara pola* figury  $f$

$z(f)$  — *zewnętrzna miara pola* figury  $f$

i spełniają nierówność  $w(f) \leq z(f)$ . Jeśli jest  $w(f) = z(f)$ , to wspólną ich wartość

$$m(f) = \lim w_n = \lim z_n$$

nazywamy *miarą połową* lub *polem figury*  $f$ , a figurę  $f$  nazywamy *mierzalną*.

W przypadku  $k = 10$  liczby  $w_n$  i  $z_n$  są dziesiętnymi przybliżeniami pola figury przy jednostce  $\bar{u}^2$ .

**Własności pola. Twierdzenie 89.1.** Udowadnia się, że tak określone pole:

- 1 — nie zależy od położenia sieci wyjściowej,
- 2 — spełnia ogólne własności 1 i 2 pola, wymienione na wstępie,
- 3 — przy zastąpieniu jednostki  $\bar{u}$  jednostką  $\bar{v}$  mniejszą  $s$  razy,  $\bar{u} = s\bar{v}$ , pole figury zwiększa się  $s^2$  razy, np.  $2 \text{ cm}^2 = 200 \text{ mm}^2$ ; inaczej mówiąc: jeśli zamiennikiem długości jest liczba  $s$ , to zamiennikiem pola jest liczba  $s^2$ ;
- 4 — pole prostokąta o bokach długości  $a, b$  jest równe  $ab$ ,
- 5 — jeśli figury  $f$  i  $f'$  mają pola i  $f \subset f'$ , to  $m(f) \leq m(f')$ ,
- 6 — każda figura zawarta w odcinku ma pole 0,
- 7 — każda łamana ma pole 0,
- 8 — każdy łuk okręgu ma pole 0,
- 9 — jeśli brzeg figury  $f$  ma pole 0, to figura  $f$  ma pole  $m(f)$ ,
- 10 — każda figura ograniczona, której brzeg składa się ze skończenie wielu odcinków lub łuków, ma pole,
- 11 — trójkąt o podstawie  $a$  i wysokości  $h$  ma pole  $\frac{1}{2} ah$ ,
- 12 — równoległobok o podstawie  $a$  i wysokości  $h$  ma pole  $ah$ ,
- 13 — trapez o podstawach  $a, b$  i wysokości  $h$  ma pole  $\frac{a+b}{2} h$ , czyli ma pole równe iloczynowi długości środkowej i wysokości,
- 14 — pole czworokąta o przekątnych wzajemnie prostopadłych (romb lub deltoid) równa się połowie iloczynu długości przekątnych,
- 15 — pole wielokąta obliczamy dzieląc go na trójkąty i dodając pola tych trójkątów,
- 16 — jeśli figura  $f$  ma pole, a figura  $f'$  jest podobna do  $f$  w skali  $s$ , to

$$m(f') = s^2 m(f) \quad (89.1)$$

inaczej mówiąc: podobieństwo w skali  $s$  zmienia pole figury w stosunku  $s^2$ ;

17 — pole wielokąta opisanego na kole jest równe połowie iloczynu obwodu wielokąta przez długość promienia koła,

18 — pole  $2n$ -kąta foremnego wpisanego w koło jest równe połowie iloczynu obwodu  $n$ -kąta foremnego wpisanego w to samo koło przez długość promienia koła.

**Liczba  $\pi$  jako stosunek długości okręgu do średnicy.** Wiemy co to jest obwód wielokąta i jak się go oblicza, natomiast nie zdefiniowaliśmy dotąd długości linii krzywej. Rozumowanie, które tu w skrócie przedstawiamy, będzie jednocześnie definicją długości okręgu i wyznaczeniem liczby  $\pi$ .

Rozważmy okrąg o promieniu  $r$  i wielokąty foremne o liczbie boków  $n$ , wpisane i opisane na tym okręgu, o obwodach  $p_n$  i  $P_n$ . Można udowodnić, że przy  $n$  rosnącym nieograniczenie ciąg  $p_n$  jest rosnący, ciąg  $P_n$  malejący i że oba te ciągi mają wspólną granicę. Granicę tę nazywamy *długością okręgu*

$$C = \lim p_n = \lim P_n \quad (89.2)$$

A stosunek długości okręgu do jego średnicy (stosunek ten jest dla wszystkich okręgów taki sam) nazywamy liczbą  $\pi$

$$\pi = \frac{C}{2r} = \lim \frac{p_n}{2r} = \lim \frac{P_n}{2r} \quad (89.3)$$

Stosunki  $\frac{p_n}{2r}$ ,  $\frac{P_n}{2r}$  są przybliżeniami liczby  $\pi$ , dolnym i górnym

$$\frac{p_n}{2r} < \pi < \frac{P_n}{2r}$$

Wychodząc od sześcioboków  $n = 6$  i podwajając liczbę boków, otrzymujemy, przy  $n = 1536$

$$3,14159 < \pi < 3,14160$$

W takim ujęciu tego zagadnienia wzór na długość okręgu  $C = 2\pi r$  jest natychmiastową konsekwencją definicji liczby  $\pi$ , zaś wzór na pole koła  $S = \pi r^2$  wymaga dłuższego dowodu. Można jednak zagadnienie to przedstawić inaczej, wówczas wzory te pojawiają się w przeciwnej kolejności: rozumowanie takie, wzorując się na książce Zofii Krygowskiej GEOMETRIA dla klasy II lic. przedstawimy poniżej.

**Liczba  $\pi$  jako pole koła jednostkowego**

**Definicja 89.1.** Pole koła o promieniu długości 1 (czyli koła jednostkowego) jest liczbą, którą oznaczamy  $\pi$ .

**Twierdzenie 89.2.** Koło o promieniu długości  $r$  ma pole równe

$$S = \pi r^2 \quad (89.4)$$

**Dowód.** Koło o promieniu  $r$  jest podobne do koła o promieniu 1 w skali  $r$ ; zgodnie z (89.1) koło to ma pole  $r^2 \pi$ .

**Wyznaczenie liczby  $\pi$ .** Dla wyznaczenia liczby  $\pi$  można posłużyć się: 1 — ciągiem  $s_n$  pól wielokątów foremnych wpisanych w koło jednostkowe (ciąg przybliżeń dolnych), 2 — ciągiem  $S_n$  pól wielokątów foremnych opisanych na kole jednostkowym (ciąg przybliżeń górnych)

$$s_n < \pi < S_n$$

Miedzy przybliżeniami  $s_n$ ,  $S_n$  pola koła jednostkowego a przybliżeniami  $p_n$ ,  $P_n$  długości obwodu koła jednostkowego ( $r = 1$ ) zachodzą związki

$$s_{2n} = \frac{p_n}{2} \quad S_n = \frac{P_n}{2} \quad (r = 1)$$

skąd wynika, że wzór (89.3) wyznacza tę samą liczbę  $\pi$ , co definicja 89.1.

**Pojęcie krzywej.** Intuicyjne pojęcie linii krzywej (krótko: krzywej), którą wyobrażamy sobie jako ślad poruszającego się punktu, wymaga w geometrii sprecyzowania. Ponieważ w definicji krzywej wystąpi pojęcie przekształcenia ciągłego, trzeba zacząć od następującej definicji.

**Definicja 89.2** (przekształcenia ciągłego). Przekształcenie figury  $f$  na figurę  $f'$  nazywamy *ciągłym w punkcie  $X_0$  figury  $f$* , jeśli do dowolnej dodatniej liczby  $\varepsilon$  można dobrać dodatnią liczbę  $\delta$  taką, że każdy punkt  $X$  figury  $f$  odległy od punktu  $X_0$  mniej niż  $\delta$  ma obraz  $X'$  odległy od obrazu  $X'_0$  punktu  $X_0$  mniej niż  $\varepsilon$ .

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{X \in f} (XX_0 < \delta \Rightarrow X'X'_0 < \varepsilon) \quad (89.5)$$

Przekształcenie może być ciągle w jednym punkcie, a nieciągle w innym punkcie. Przekształcenie ciągle w każdym punkcie nazywamy *ciągłym*.

Dowolna izometria, jednokładność, podobieństwo i wiele innych przekształceń są ciągłe. Przykładem przekształcenia nieciągłego może być przekształcenie, które ustalonemu punktowi  $O$  przyporządkowuje ten sam punkt  $O$ , zaś każdemu punktowi  $P$  różnemu od  $O$  przyporządkowuje punkt  $P'$  taki, że

$$\overline{OP'} = \frac{1}{\overline{OP}^2} \overline{OP}$$

Przekształcenie to jest wzajemnie jednoznaczne na całej płaszczyźnie, ale nieciągle w punkcie  $O$ .

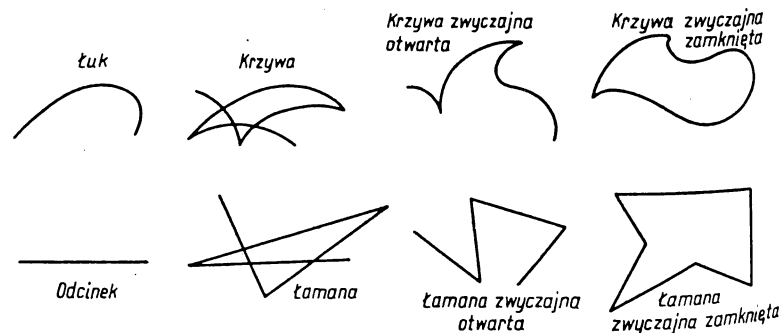
**Definicja 89.3** (łuku, krzywej i krzywej zwyczajnej)

**Łuk** jest to figura, którą można otrzymać przez wzajemnie jednoznaczne i ciągłe przekształcenie odcinka.

**Krzywa** jest to figura, którą można otrzymać przez wzajemnie jednoznaczne i ciągłe przekształcenie łamanej. Krzywa nazywa się:

- *zwyczajną*, jeśli ta łamana jest zwyczajna,
- *zwyczajną zamkniętą*, jeśli ta łamana jest zwyczajna zamknięta,
- *zwyczajną otwartą*, jeśli ta łamana jest zwyczajna otwarta.

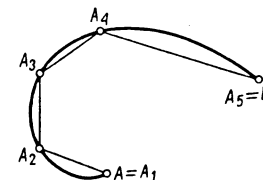
Rysunek 89.4 jest ilustracją tej definicji. Odcinek jest szczególnym przypadkiem łuku. Łuk jest szczególnym przypadkiem krzywej otwartej.



Rys. 89-4

Na każdym łuku istnieją dwa, wzajemnie przeciwne, zwroty odpowiadające dwóm zwrotom odcinka. Również na każdej krzywej zwyczajnej, otwartej lub zamkniętej, można wyróżnić dwa, wzajemnie przeciwne zwroty (por. def. 82.1).

**Definicja 89.4** (łamanej wpisanej w krzywą). Niech będzie dana krzywa zwyczajna  $\tilde{L}$ , otwarta, o początku  $A$  i końcu  $B$ . Łamana  $A_1 A_2 \dots A_n$  o wierzchołkach leżących na krzywej  $\tilde{L}$  w taki sposób, że  $A_1 = A$ ,  $A_n = B$  oraz  $A_k$  poprzedza  $A_{k+1}$  (dla  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) w zwrocie krzywej od  $A$  do  $B$ , nazywa się *łamaną wpisaną w krzywą  $\tilde{L}$*  (rys. 89-5).



Rys. 89-5

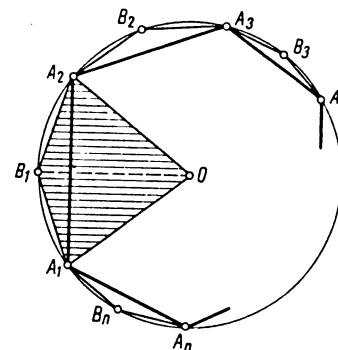
Jeśli krzywa zwyczajna  $\tilde{L}$  jest zamknięta, to *łamaną wpisaną w krzywą  $\tilde{L}$*  nazywamy łamaną zamkniętą  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$  o wierzchołkach położonych na  $\tilde{L}$  w taki sposób, aby kolejność  $A_1, A_2, \dots, A_n$  była zgodna z obiegiem krzywej  $\tilde{L}$ .

**Definicja 89.5** (długości krzywej). Załóżmy, że została ustalona jednostka długości. *Długością krzywej zwyczajnej* nazywamy kres górny zbioru długości łamanych wpisanych w tę krzywą.

**Twierdzenie 89.3.** Jeśli krzywa  $\tilde{L}$  ma długość  $L$ , zaś krzywa  $\tilde{L}'$  jest podobna do  $\tilde{L}$  w skali  $s$ , to krzywa  $\tilde{L}'$  ma długość  $L'$  równą

$$L' = sL \quad (89.6)$$

**Długość okręgu.** Niech będzie dany okrąg o promieniu  $r$ . Wpiszmy w ten okrąg łamaną zamkniętą  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ ; łamana ta ma pewną długość  $u$  i jest brzegiem pewnego wielokąta wypukłego. Utwórzmy łamaną  $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 \dots A_n B_n A_1$  (rys. 89-6), gdzie  $B_1, B_2, \dots, B_n$  są punktami połowiącymi łuki  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$ .



Rys. 89-6

Łamana ta jest brzegiem wielokąta wpisanego, który jest sumą deltoidów o przekątnych:  $\overline{A_1A_2}, \overline{OB_1}; \overline{A_2A_3}, \overline{OB_2}; \dots$  parami prostopadłych, więc pole tego wielokąta, równe sumie pól deltoidów, jest równe  $\frac{1}{2}ur$  i jest oczywiście mniejsze od pola koła

$$\frac{1}{2}ur < \pi r^2 \quad \text{stąd} \quad u < 2\pi r$$

Każda łamana wpisana w okrąg ma, jak widać, długość mniejszą od  $2\pi r$ . Kres górny zbioru tych długości istnieje — jest to długość okręgu, oznaczmy ją  $C$  i jest

$$u \leq C \leq 2\pi r \quad (89.7)$$

Pozostaje wykazać, że  $C = 2\pi r$ . Z nierówności (89.7) wynika

$$0 \leq 2\pi r - C \leq 2\pi r - u$$

Mnożąc przez  $\frac{r}{2}$ , otrzymujemy

$$0 \leq (2\pi r - C) \frac{r}{2} \leq \pi r^2 - \frac{1}{2}ur$$

Prawa strona przedstawia różnicę pól koła i wielokąta wpisanego w to koło. Różnica ta może być mniejsza od dowolnie małej liczby, jeśli liczba boków wielokąta będzie dość duża. Stąd wynika, że różnica  $2\pi r - C$  może być mniejsza od dowolnie małej liczby dodatniej, a więc musi być zerem. Wykazaliśmy, że *okrąg o promieniu  $r$  ma długość*

$$C = 2\pi r \quad (89.8)$$

Długość łuku okręgu o kącie środkowym  $\varphi^\circ$  i promieniu  $r$  jest równa

$$\frac{\varphi}{360} 2\pi r \quad (89.9)$$

co wynika z proporcji

$$\frac{\text{długość łuku}}{\text{długość okręgu}} = \frac{\text{miara kąta środkowego}}{\text{miara kąta pełnego}}$$

Pole wycinka kołowego o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\varphi^\circ$  jest równe

$$\frac{\varphi}{360} \pi r^2 \quad (89.10)$$

co wynika z proporcji (rys. 89-7)

$$\frac{\text{pole wycinka}}{\text{pole koła}} = \frac{\text{miara kąta środkowego}}{\text{miara kąta pełnego}}$$

Pole pierścienia kołowego o promieniu małym  $a$  i promieniu dużym  $b$  jest różnicą pól kół o tych promieniach

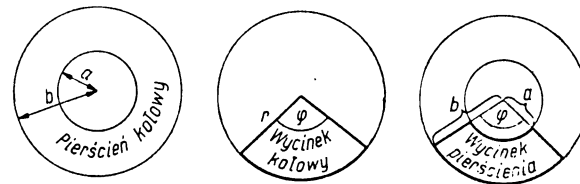
$$\pi(b^2 - a^2) \quad (89.11)$$

Pole wycinka pierścienia kołowego o promieniu małym  $a$ , dużym  $b$  i kącie środkowym  $\varphi^\circ$  jest równe

$$\frac{\varphi}{360} \pi(b^2 - a^2) \quad (89.12)$$

co wynika z proporcji

$$\frac{\text{pole wycinka pierścienia}}{\text{pole pierścienia}} = \frac{\text{miara kąta środkowego}}{\text{miara kąta pełnego}}$$



Rys. 89-7

Wyrażenie pól pierścienia i wycinków za pomocą łuku średniego. Pole wycinka kołowego dane wzorem (89.10) można wyrazić następująco

$$\frac{\varphi}{360} \pi r^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi}{360} 2\pi r \right) r = \boxed{\text{połowa łuku}} \cdot \boxed{\text{promień}} \quad (89.13)$$

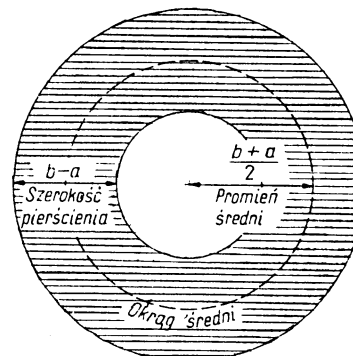
Pole pierścienia kołowego dane wzorem (89.11) można przekształcić

$$\pi(b^2 - a^2) = \pi(b+a)(b-a) = 2\pi \frac{b+a}{2} (b-a)$$

Różnicę  $b-a$  nazywamy *szerokością* pierścienia. Średnią arytmetyczną  $\frac{a+b}{2}$  obu promieni nazwiemy *promieniem średnim*; jest to promień okręgu *średniego* przebiegającego w połowie szerokości pierścienia (rys. 89-8),  $2\pi \frac{b+a}{2}$  jest długością tego okręgu.

Stąd

$$\boxed{\text{Pole pierścienia}} = \boxed{\text{długość okręgu średniego}} \cdot \boxed{\text{szerokość}} \quad (89.14)$$



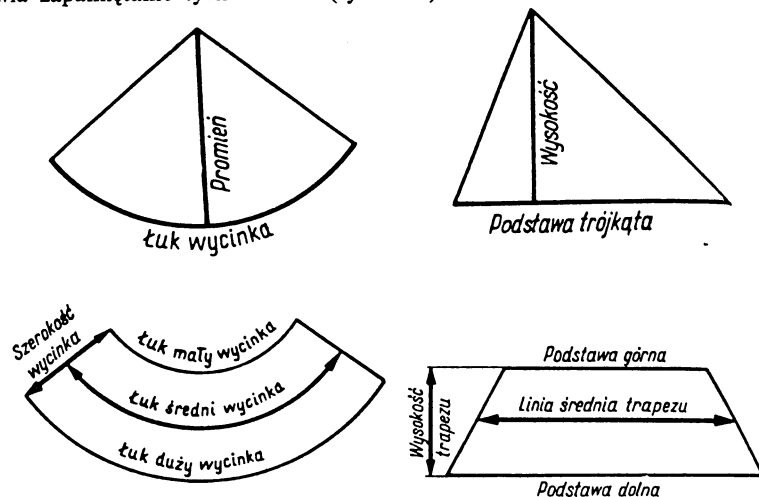
Rys. 89-8

Pole wycinka pierścienia kołowego dane wzorem (89.12) wyraża się

$$\frac{\varphi}{360} \pi (b^2 - a^2) = \frac{\varphi}{360} 2\pi \frac{b+a}{2} (b-a) =$$

$$= \boxed{\text{długość łuku średniego}} \cdot \boxed{\text{szerokość}} \quad (89.15)$$

Analogia wzorów (89.13), (89.14) i (89.15) do wzorów na pole trójkąta i trapezu ułatwia zapamiętanie tych wzorów (rys. 89-9).



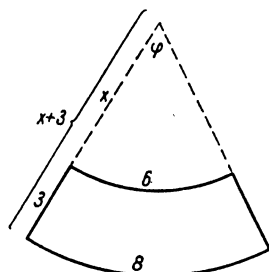
Rys. 89-9. Analogia między wycinkiem koła i trójkątem oraz między pierścieniem i trapezem

**Przykład.** Obliczyć pole wycinka pierścienia kołowego o łuku większym 8 cm, łuku mniejszym 6 cm i szerokości 3 cm.

$$\text{Odp. } \frac{8+6}{2} \cdot 3 = 21 \text{ cm}^2$$

**Przykład.** Obliczyć promień i kąt środkowy wycinka z poprzedniego przykładu.

**Rozwiązanie.** Szkicujemy wycinek pierścienia (rys. 89-10). Ponieważ przy tym samym kącie środkowym długość łuku jest proporcjonalna do promienia tego łuku,



Rys. 89-10

wieć „łuk mniejszy ma się tak do łuku większego jak się ma promień mniejszy do promienia większego”

$$6 : 8 = x : (x+3)$$

$$8x = 6(x+3)$$

$$8x = 6x + 18$$

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

Promień mniejszy  $x = 9$ , promień większy  $x+3 = 12$ .

Aby wyznaczyć kąt środkowy  $\varphi$ , układamy następującą proporcję: „kąt środkowy ma się tak do  $360^\circ$ , jak ma się łuk do całego okręgu”, przy czym weźmiemy tu pod uwagę łuk mniejszy = 6 i okrąg mniejszy =  $2\pi r = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$ . Proporcja przybiera postać

$$\varphi : 360 = 6 : 18\pi$$

i obliczamy z niej

$$\varphi = \frac{6 \cdot 360}{18\pi} = \frac{120}{\pi} \approx 38,2^\circ = 38^\circ 12'$$

### Pytania

1. Wymienić ogólne własności pola.
2. Co to jest jednostka pola?
3. Jak za pomocą sieci kwadratowej konstruujemy przybliżenie dolne i przybliżenie górne pola dowolnej figury? Jak tworzymy ciąg przybliżeń górnych i ciąg przybliżeń dolnych pola? Kiedy istnieje pole?
4. Jak zmienia się pole przy zastąpieniu jednostki długości inną jednostką  $s$  razy krótszą?
5. Jak zmienia się pole, jeśli figura zostanie powiększona  $s$  razy (przekształcona przez podobieństwo w skali  $s$ )?
6. Aby obliczyć pole często dzielimy daną figurę na części i korzystając z ogólnych własności pola, poddajemy te części translacjom, obrotom i symetriom tak, aby złożyć z nich inną figurę, której pole już umiemy obliczyć, a która jest równoważna danej figurze (tzn. ma to samo pole, co dana figura). Stosując takie postępowanie, udowodnić wzory na pole: trójkąta, równoległoboku, trapezu, deltoidu.
7. Udowodnić, że pole wielokąta opisanego na kole jest równe iloczynowi połowy obwodu przez długość promienia koła.
8. Mając dany dowolny wielokąt wpisany w koło, tworzymy nowy wielokąt o podwójnej liczbie wierzchołków, dołączając do danych wierzchołków punkty połowiące łuki okręgu zawarte między kolejnymi wierzchołkami danego wielokąta. Udowodnić, że pole nowego wielokąta jest równe połowie iloczynu obwodu danego wielokąta przez długość promienia koła.

9. Jak definiujemy liczbę  $\pi$ ? Jaki jest wzór na pole koła?
10. Podać definicję łuku, krzywej i krzywej zwyczajnej.
11. Jak definiujemy długość krzywej zwyczajnej?
12. Wyprowadzić wzór na długość okręgu.
13. Wyprowadzić wzory na długość łuku okręgu i na pole: wycinka kołowego, pierścienia kołowego i wycinka pierścienia kołowego.

## 90. Zadania konstrukcyjne

Kreślenie figur geometrycznych jest jedną z praktycznych czynności związanych z geometrią. Zasadami praktycznego kreślenia zajmuje się odrębny przedmiot szkolny, zwany *rysunkiem technicznym*. Przy praktycznym kreśleniu posługujemy się różnymi przyrządami, jak: liniał, cyrkiel, ekierka, kątomierz, krzywka, elipsograf i inne, a ostatecznym celem jest sporządzenie prawidłowego i estetycznego rysunku.

**Zadania konstrukcyjne**, wchodzące w zakres geometrii jako nauki, stanowią wraz z całą geometrią teoretyczne podstawy rysunku technicznego, ale różnią się od nich celem i metodami. Rozwiązać zadanie konstrukcyjne oznacza:

- wskazać sposób, w jaki można nakreślić żadaną figurę (*konstrukcja*),
- udowodnić, że sposób ten istotnie prowadzi do figury o żądanych własnościach (*dowód*),
- wyjaśnić, czy uzyskane rozwiązanie jest jedyne, czy też istnieją jeszcze inne rozwiązania (*dyskusja*).

Ponieważ na ogół trudno jest od razu wskazać sposób kreślenia żądanej figury, czyli jej konstrukcję, przeto przy trudniejszych zadaniach konstrukcyjnych zaczyna się od tzw. *analizy*. Analiza polega na odręcznym naszkicowaniu figury i wyszukaniu (drogą rozumową) tych jej własności, które pozwolą narysować ją (dokładnie). Tak więc rozwiązanie zadania konstrukcyjnego składa się z następujących czterech etapów: 1 — analiza, 2 — konstrukcja, 3 — dowód, 4 — dyskusja.

Stąd już widać, że samo przedłożenie gotowego rysunku jeszcze nie jest rozwiązaniem zadania konstrukcyjnego. Zadania konstrukcyjne z geometrii a rysowanie — to dwie różne rzeczy. Wyjaśnimy to na przykładach.

Praktyczny sposób połowienia odcinka. Dany jest odcinek  $\overline{AB}$ . Aby wyznaczyć jego środek, obieramy „na oko” jakiś punkt  $C$ , jako pierwsze przybliżenie środka. W punkt  $C$  wbijamy ostrze cyrkla, drugą nóżkę cyrkla nastawiamy na punkt  $A$ , po czym obracając cyrkiel dookoła ostrza wbitego w punkt  $C$  przenosimy tę nóżkę z punktu  $A$  ku punktowi  $B$ , aby porównać odległości  $CA$  i  $CB$ . Jeśli się zdarzy, że różnica między  $CA$  i  $CB$  jest niedostrzegalna, to możemy punkt  $C'$  uważać za środek odcinka  $\overline{AB}$ . Jeśli zaś  $CA$  i  $CB$  różnią się o pewien odcinek  $\overline{d}$ , to przesuwamy ostrze cyrkla o odcinek równy „na oko” połowie odcinka  $\overline{d}$  do nowego punktu  $C'$ , który będzie drugim, lepszym przybliżeniem szukanego środka.

Teraz w punkt  $C'$  wbijamy ostrze cyrkla, aby porównać odległości punktu  $C'$  od  $A$  i od  $B$ . Jeśli odległości te różnią się o pewną wielkość  $d'$ , to przesuwamy ostrze

cyrkla o  $\frac{1}{2}d'$  do nowego punktu  $C''$ , który jest zazwyczaj wystarczająco dobrym przybliżeniem szukanego środka.

Praktyczne kreślenie prostych równoległych. Dana jest prosta  $AB$  i punkt  $C$  nie leżący na niej; należy nakreślić prostą równoległą do  $AB$  i przechodzącą przez punkt  $C$ .

Do prostej  $AB$  przykładamy jedną krawędź ekierki, a do drugiej krawędzi ekierki przykładamy liniał (lub drugą ekierkę). Następnie, trzymając mocno liniał, przesuwamy ekierkę poślizgiem wzdłuż liniału aż do położenia, w którym ekierka dotknie punktu  $C$  tą samą krawędzią, którą poprzednio przylegała do prostej  $AB$ . Wówczas, wzdłuż tej krawędzi ekierki kreślimy prostą i ta prosta jest rozwiązaniem zadania.

Jeśli podczas tych czynności nie poruszaliśmy liniału, to można ekierkę przesuwając poślizgiem do kilku nowych położów i nakreślić kilka prostych równoległych.

Podamy jeszcze jeden drastyczny przykład różnicy między praktycznym rysunkiem a konstrukcją geometryczną. Aby narysować styczną do dwóch danych okręgów, można „od ręki” przyłożyć liniał stycznie do tych okręgów (uwzględniając ewentualnie grubość ołówka) i pociągnąć kreskę. Taki sposób nie jest konstrukcją geometryczną, mimo iż może dać zadowalający efekt. Poniżej podamy konstrukcję stycznych do dwóch okręgów.

**Metoda konstrukcji geometrycznych** odpowiada dedukcyjnej budowie geometrii. Aksjomat II mówi, że przez dwa różne punkty przechodzi jedna linia prosta. Zatem prosta jest wyznaczona, jeśli wskaże się dwa punkty, przez które ma ona przechodzić (np. aby wyznaczyć styczną do dwóch okręgów, trzeba najpierw znaleźć punkty styczności). Dla narysowania prostej posługujemy się liniałem. Aksjomat VI mówi o odkładaniu odcinka; do odkładania odcinków i kreślenia okręgów służy cyrkiel.

Te dwa narzędzie: liniał i cyrkiel, są klasycznymi narzędziami przy zadaniach konstrukcyjnych w geometrii. Żadnych innych narzędzi w zasadzie nie uznajemy. Poniżej pokażemy, jak przy pomocy liniału i cyrkla (bez ekierki) konstruuje się środek odcinka, prostą równoległą, prostą prostopadłą itp.

Kiedy już nauczymy się tych podstawowych konstrukcji i przejdziemy do zadań bardziej złożonych, wtedy zgodzimy się na korzystanie z ekierki, ale tylko dla przyspieszenia podstawowych czynności składowych.

Poniżej przedstawiamy najważniejsze zadania konstrukcyjne. Opis konstrukcji dajemy przy każdym zadaniu, natomiast rysunek — nie zawsze. Wykonanie konstrukcji pozostawiamy Czytelnikowi, który czytając opis konstrukcji powinien jednocześnie kreślić odpowiednie rysunki. Pozostałe części zadania konstrukcyjnego, tj. analizę, dowód i dyskusję, będziemy niekiedy opuszczać.

## Konstrukcje podstawowe

1. **Konstrukcja trójkąta o danych długościach boków.** Dane są trzy liczby dodatnie  $a, b, c$ . Przy danej półprostej  $p$  o początku  $A$  zbudować trójkąt  $ABC$  o bokach:  $AB = c, BC = a, CA = b$ .

## Konstrukcja

| Czynność wykonywana                                                                                                                                                                                                               | Wynik tej czynności                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Obieramy półprostą $p$ o początku $A$<br>Na półprostej $p$ od punktu $A$ odkładamy odcinek $AB = c$<br>Z punktu $A$ zakreślamy okrąg promieniem $b$ i z punktu $B$ okrąg promieniem $a$<br>Punkt $C$ łączymy z punktami $A$ i $B$ | Wierzchołek $A$ i kierunek boku $AB$<br>Wierzchołek $B$<br><br>W przecięciu tych okręgów mamy wierzchołek $C$<br><br>Trójkąt $ABC$ |

Dyskusja. Możliwość konstrukcji: Konstrukcja jest możliwa, jeżeli  $|a-b| < c < a+b$ .

Jednoznaczność konstrukcji: po ustaleniu na płaszczyźnie położenia wierzchołków  $A$  i  $B$  możliwe są dwa położenia trzeciego wierzchołka  $C$  i  $C'$ , symetryczne względem prostej  $AB$ ; trójkąty  $ABC$  i  $ABC'$  są przystające (odwrotnie).

2. Przenoszenie trójkąta. Dany jest trójkąt  $KLM$ . Przy półprostej  $p$  o początku  $A$  zbudować trójkąt  $ABC$  przystający do trójkąta  $KLM$ .

Rozwiązanie. Stosujemy poprzednią konstrukcję. Trójkąty  $ABC$  i  $KLM$  są przystające na podstawie cechy „ $BBB$ ”. Kąty odpowiadające sobie w tych trójkątach są równe.

3. Odkładanie kąta – zob. twierdzenie 79.4.

4. Podział odcinka na połowy – konstrukcja symetralnej odcinka (zob. tw. 77.1). Dany jest odcinek  $AB$ . Szukamy na nim punktu  $O$  takiego, aby  $AO = BO$ .

### Konstrukcja

| Czynność wykonywana                                                                                                                                       | Wynik tej czynności                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Z punktu $A$ promieniem $AB$ zakreślamy okrąg<br>Z punktu $B$ tym samym promieniem $AB$ zakreślamy okrąg<br>Przez punkty $C$ i $D$ prowadzimy prostą $CD$ | W przecięciu tych okręgów mamy punkty $C$ i $D$<br>W przecięciu prostych $CD$ i $AB$ leży szukany środek $O$ |

5. Podział kąta na połowy – zob. rys. 78-8.

6. Wystawianie prostopadłej. Dana jest prosta  $p$  i na niej punkt  $C$ . Wystawić w punkcie  $C$  prostopadłą do  $p$ .

## Konstrukcja

| Czynność wykonywana                                                                                                                                                                                              | Wynik tej czynności                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Na prostej $p$ odkładamy z punktu $C$ w dwóch zwrotach równe odcinki<br>Promieniem większym od $AC$ zakreślamy okrąg z punktu $A$ i tym samym promieniem zakreślamy okrąg z punktu $B$<br>Prowadzimy prostą $CD$ | Otrzymujemy punkty $A$ i $B$ równoodległe od $C$<br>W przecięciu tych okręgów otrzymujemy dwa punkty, z których jeden oznaczamy $D$<br><br>Prosta $CD$ jest prostopadła do $p$ |

Dowód. Trójkąty  $DCA$  i  $DCB$  są przystające (cecha „ $BBB$ ”), zatem kąty  $DCA$  i  $DCB$  są równe, a jako przyległe muszą być proste.

7. Opuszczanie prostopadłej. Dana jest prosta  $p$  i punkt  $C$  nie leżący na niej. Prowadzić z punktu  $C$  prostą prostopadłą do prostej  $p$ .

### Konstrukcja

| Czynność wykonywana                                                                                                                                                                                       | Wynik tej czynności                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Z punktu $C$ zakreślamy okrąg o promieniu $r$ na tyle dużym, aby okrąg ten przeciął się z prostą $p$<br>Tym samym promieniem zakreślamy dwa okręgi: z punktu $A$ i z punktu $B$<br>Prowadzimy prostą $CD$ | W przecięciu okręgu z prostą $p$ otrzymujemy punkty $A$ i $B$<br><br>W przecięciu ich leży punkt $D$<br><br>Prosta $CD$ jest prostopadła do $p$ |

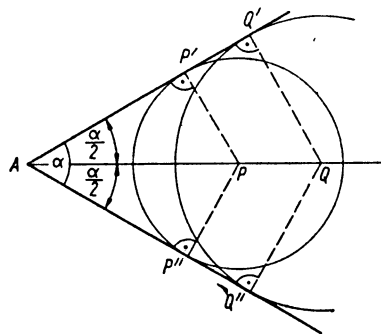
8. Kreślenie równoległej. Dana jest prosta  $p$  i punkt  $A$  nie leżący na niej. Przez punkt  $A$  przeprowadzić prostą równoległą do prostej  $p$ .

Rozwiązanie (za pomocą rombu). Na prostej  $p$  obieramy dowolny punkt  $B$ . Obieramy  $AB = r$  jako promień i zakreślamy pierwszy okrąg z punktu  $B$ , w wyniku czego otrzymujemy na prostej  $p$  punkt  $C$ . Dalsze dwa okręgi zakreślamy tym samym promieniem z punktów  $A$  i  $C$ . Punkt  $D$  przecięcia tych dwóch okręgów wyznacza kierunek szukanej równoległej. Prosta  $AD$  jest równoległa do prostej  $p$ .

Dowód. Trójkąty  $ACB$  i  $ACD$  są przystające, gdyż mają wspólną podstawę  $AC$  i wszystkie pozostałe boki równe  $r$ . Są więc równoramienne. Kąty  $CAD$  i  $ACB$  są równe. Ale to są kąty naprzemianległe wewnętrzne, zatem proste  $AD$  i  $BC$  są równoległe.

9. Konstrukcja okręgu opisanego na trójkącie, czyli konstrukcja okręgu przechodzącego przez trzy dane punkty nie leżące na jednej prostej. Środek okręgu opisanego na trójkącie leży w punkcie przecięcia się trzech symetralnych boków (zob. 78.5). Promieniem tego okręgu jest odcinek o długości równej odległości środka od dowolnego wierzchołka trójkąta.

10. Konstrukcja okręgów wpisanych w kąt. Każdy punkt dwusiecznej kąta wypukłego niepełnego jest środkiem pewnego okręgu stycznego do ramion tego kąta (rys. 90-1). Aby jeden z takich okręgów narysować, trzeba wybrać jakiś punkt  $P$  jako



Rys. 90-1. Każdy punkt dwusiecznej kąta np.  $P$ , jest równoodległy od obu ramion tego kąta

środek. Długością promienia jest odległość punktu  $P$  od jego rzutu prostokątnego np.  $P''$  na jedno z ramion kąta. Okrąg  $\alpha(P, PP'')$  jest styczny do obu ramion kąta, czyli jest okręgiem wpisanym w kąt.

Jeśli ktoś wbije ostrze cyrkla w punkt  $P$ , a drugi koniec nastawi od ręki tak, aby narysowany okrąg wydawał się styczny, to rysunek może być dla oka zupełnie zadowalający, ale takie postępowanie jest niezgodne z zasadami konstrukcji geometrycznej. Cyrkiel jest narzędziem do odmierzania odległości punktu od punktu, ale nie punktu od prostej.

11. Konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt. Środkiem tego okręgu jest punkt  $W$  przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych. Długość promienia równa się odległości punktu  $W$  od jego rzutu na dowolny z boków.

12. Konstrukcja stycznej do okręgu w danym punkcie styczności. Dany jest okrąg i punkt  $P$  na okręgu. Nakreślić styczną w punkcie  $P$ .

Rozwiązanie. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia w punkcie styczności. Wystarczy więc wystawić w punkcie  $P$  prostą do promienia  $PO$  łączącego punkt  $P$  ze środkiem  $O$  okręgu (konstrukcja 6).

Uwaga. Może się zdarzyć, że jest dany okrąg, a nie znamy jego środka. Otóż obracając na tym okręgu trzy dowolne punkty możemy wyznaczyć środek okręgu według konstrukcji 9.

13. Miejsce geometryczne punktów, z których dany odcinek widać pod danym kątem. Zob. rys. 88-5.

14. Miejsce geometryczne punktów, z których dany odcinek widać pod kątem prostym. Jest to szczególny przypadek poprzedniego zadania (zob. rys. 88-6). Szukane miejsce geometryczne leży na okręgu, dla którego dany odcinek jest średnicą.

15. Konstrukcja stycznej do okręgu z punktu zewnętrznego. Dany jest okrąg

o środku  $O$  i promieniu  $r$  oraz punkt  $M$  poza okręgiem. Przeprowadzić z punktu  $M$  styczną do okręgu.

Analiza. Szkicując odręcznie rysunek taki jak rys. 88-8, spostrzegamy, że istnieją dwie styczne  $MA$  i  $MB$  i że są one prostopadłe do promieni  $OA$  i  $OB$  w punktach styczności. Punkty  $A$  i  $B$  są punktami, z których widać odcinek  $OM$  pod kątem prostym. Zatem, zgodnie z twierdzeniem 88.5, muszą one leżeć na okręgu, dla którego  $OM$  jest średnicą. Stąd wynika, że punkty  $A$  i  $B$  można znaleźć jako punkty przecięcia danego okręgu z okręgiem pomocniczym o średnicy  $OM$ .

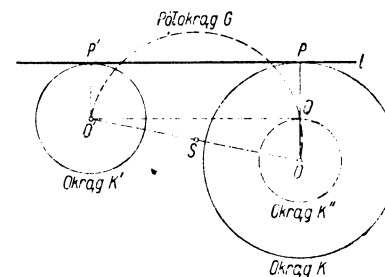
### Konstrukcja

| Czynność wykonywana                                                                            | Wynik tej czynności                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wyznaczamy środek $S$ odcinka $OM$ . Promieniem $SO$ zakreślamy z punktu $S$ okrąg pomocniczy. | Przecinając okrąg dany okręgiem pomocniczym, otrzymujemy dwa punkty $A$ i $B$ . Są to punkty styczności szukanych stycznych. |
| Kreślimy proste $MA$ i $MB$ .                                                                  | Proste $MA$ i $MB$ są szukаныmi stycznymi.                                                                                   |

16. Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch danych okręgów. Dany jest okrąg  $K$  o środku  $O$  i promieniu  $r$  oraz drugi okrąg  $K'$  o środku  $O'$  i promieniu  $r'$ . Znaleźć wspólną styczną do tych dwóch okręgów.

Analiza. Szkicujemy prostą  $l$  i dwa styczne do niej okręgi  $K$  i  $K'$  o promieniach  $r$  i  $r'$  ośrodkach  $O$  i  $O'$  (rys. 90-2). Zakładamy, że  $r > r'$ . Promienie tych okręgów w punktach styczności  $OP$  i  $O'P'$  są prostopadłe do wspólnej stycznej  $l$ . Przez  $O'$  prowadzimy prostą równoległą do  $l$ . Prosta ta przecina promień  $OP$  w punkcie  $Q$  pod kątem prostym. Z punktu  $O$  jako środka zakreślamy promieniem  $r'' = OQ = r - r'$  pomocniczy okrąg  $K''$ . Jest on styczny do  $O'Q$  w punkcie  $Q$ . Wobec tego punkt  $Q$  leży na półokręgu  $G$  o średnicy  $OO'$  (por. tw. 88.5).

Wyobraźmy sobie teraz, że na rys. 90-2 są dane tylko okręgi  $K$  i  $K'$  o ośrodkach  $O$  i  $O'$ . W jakiej kolejności można kreślić poszczególne linie, aby odtworzyć cały rysunek? Odpowiedź na to pytanie jest właśnie szukaną konstrukcją.

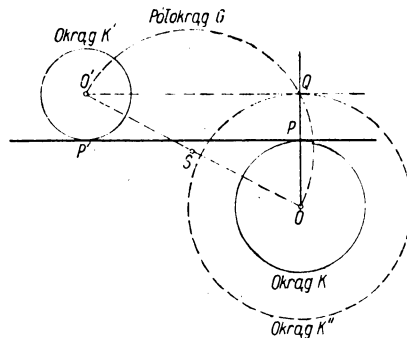


Rys. 90-2. Wspólna styczna zewnętrzna do dwóch okręgów

| Czynność wykonywana                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Wynik tej czynności                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Z punktu <math>O</math> promieniem <math>r'' = r - r'</math> kreślimy okrąg <math>K''</math></p> <p>Na odcinku <math>OO'</math> jako na średnicy wystawiamy półokrąg <math>G</math></p> <p>Odcinek <math>OQ</math> przedłużamy aż do przecięcia się z okręgiem <math>K</math> w punkcie, który oznaczamy <math>P</math></p> <p>W punkcie <math>P</math> wystawiamy prostopadłą do <math>OP</math> i oznaczamy ją <math>l</math></p> | <p>Okrąg <math>K''</math> i półokrąg <math>G</math> w przecięciu dają punkt <math>Q</math></p> <p>Punkt <math>P</math> jest punktem styczności szukanej stycznej <math>l</math></p> <p>Prosta <math>l</math> jest szukaną styczną</p> |

Jeśli  $r = r'$ , konstrukcja jest znacznie prostsza.

Dyskusja. Oprócz stycznej / pokazanej na rys. 90-2 istnieje jeszcze druga wspólna styczna. Jeśli półokrąg  $G$  uzupełnimy do całego okręgu, to w przecięciu z okręgiem  $K''$  dostaniemy punkt  $T$ , a w przedłużeniu  $OT$  dostaniemy na okręgu  $K$  punkt  $U$  i prosta prostopadła w punkcie  $U$  do promienia  $OU$  będzie drugą wspólną styczną. Powyższa konstrukcja wyznacza dwie styczne zewnętrzne do okręgów  $K$  i  $K'$ . Oprócz nich istnieją jeszcze dwie styczne wewnętrzne, których konstrukcja jest podobna, z tym że posługujemy się pomocniczym okręgiem  $K''$  o promieniu  $r'' = r + r'$  (rys. 90-3).



**Rys. 90-3. Wspólna styczna wewnętrzna do dwóch okręgów**

**17. Podział odcinka na dowolną liczbę równych części – zob. tw. 84.6.**

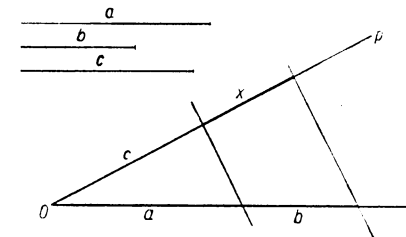
18. Konstrukcja odcinka czwartego proporcjonalnego do trzech danych. Dane są trzy odcinki  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Znaleźć czwarty odcinek  $x$  spełniający proporcję

$$a : b = c : x$$

**Analiza.** Skorzystamy z twierdzenia Talesa.

Konstrukcja (rys. 90-4). Kreślimy dowolny kąt o wierzchołku  $O$  i ramionach  $l$  i  $p$ . Na ramieniu  $l$ , od punktu  $O$  poczynając, odkładamy odcinek  $a$ , a potem ko-

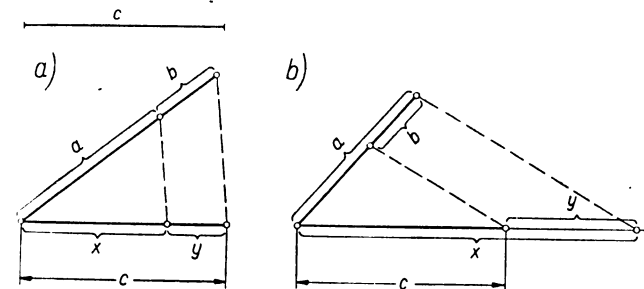
Przez końce odcinków  $a$  i  $c$  prowadzimy prostą, a potem przez koniec odcinka  $b$  prowadzimy drugą prostą równoległą do poprzedniej. Ta druga prosta wyznacza na ramieniu  $p$  punkt ograniczający szukany odcinek  $x$ .



Rys. 90-4. Konstrukcja odcinka  $x$  czwartego proporcjonalnego do trzech danych odcinków  $a, b, c$ , czyli rozwiązanie proporcji  $a : b = c : x$

19. Podział odcinka na części proporcjonalne do dwóch danych odcinków. Dany odcinek  $c$  podzielić na części  $x$  i  $y$  proporcjonalne do dwóch odcinków  $a$  i  $b$ .

Rozwiązanie tego zadania opiera się na twierdzeniu Talesa i jest pewną odmianą poprzedniej konstrukcji. Rozwiązanie to jest pokazane na rys. 90-5.



Rys. 90-5. Podział odcinka w stosunku  $a:b : a$ ) podział wewnętrzny, b) podział zewnętrzny

20. Konstrukcja średniej proporcjonalnej (czyli geometrycznej) dwóch danych odcinków. Dane są dwa odcinki  $x$  i  $y$ ; wyznaczyć odcinek  $h$  będący ich średnią geometryczną, tj. spełniający proporcję

$$x:h = h:y, \quad \text{czyli} \quad h = \sqrt{xy}$$

Analiza. Korzystamy z rys. 88-7.

Konstrukcja. Budujemy półkole o średnicy  $x+y$  i w punkcie dzielącym średnicę na części  $x$  i  $y$  wystawiamy prostopadłą. Odcinek  $h$  tej prostopadłej zawarty w półkolu jest szukaną średnią geometryczną.

## Zadania

(Wskazówki są podane na końcu tego paragrafu)

1. Zbudować trójkąt, mając dane:
  - a) dwa boki i środkową jednego z tych boków;
  - b) bok, kąt do niego przyległy i dwusieczną tego kąta;
  - c) bok, środkową tego boku i kąt przeciwny.
2. Zbudować trójkąt równoramienny, mając dane:
  - a) kąt przy wierzchołku i dwusieczną tego kąta;
  - b) kąt przy podstawie i dwusieczną tego kąta;
  - c) podstawę i wysokość należącą do ramienia;
  - d) kąt przy podstawie i wysokość należącą do ramienia;
  - e) kąt przy podstawie i rzut podstawy na ramię.
3. Zbudować trójkąt, mając dane:
  - a) dwa boki i wysokość odpowiadającą trzeciemu bokowi;
  - b) rzuty dwóch boków na trzeci bok i wysokość odpowiadającą trzeciemu bokowi;
  - c) bok, kąt przeciwny i wysokość odpowiadającą jednemu z pozostałych boków;
  - d) dwa kąty i wysokość;
  - e) bok, kąt przyległy i wysokość opuszczoną z wierzchołka tego kąta;
  - f) bok, kąt przyległy i sumę dwóch pozostałych boków;
  - g) bok, kąt przyległy i różnicę dwóch pozostałych boków.
4. Dana jest prosta  $l$  i punkt  $A$ ,  $B$  leżące po jednej stronie tej prostej. Wyznaczyć na prostej  $l$  punkt  $M$  taki, aby suma odległości  $AM + MB$  była najmniejsza.
5. Dana jest prosta  $l$  i punkty  $A$ ,  $B$  leżące po różnych jej stronach. Wyznaczyć na prostej  $l$  punkt  $K$  taki, aby  $l$  była dwusieczną kąta  $AKB$ .
6. Dany jest trójkąt różnoboczny  $ABC$ . Na wysokości odpowiadającej bokowi  $BC$  wyznaczyć punkt równoodległy od boków  $AB$  i  $BC$ .
7. W danym trójkącie  $ABC$  znaleźć punkt  $P$  taki, żeby  $PB = PC$  oraz żeby punkt  $P$  był jednakowo odległy od boków  $AB$  i  $BC$ .
8. Zbudować trapez, mając dane:
  - a) podstawę, dwa kąty przy podstawie i jedno ramię;
  - b) obie podstawy, jedno ramię i kąt przy tym ramieniu;
  - c) obie podstawy, jedno ramię i kąt przy niewiadomym ramieniu;
  - d) obie podstawy, jedno ramię i wysokość;
  - e) obie podstawy, wysokość i jeden z kątów przy podstawie;
  - f) wszystkie cztery boki trapezu;
  - g) obie podstawy i obie przekątne;
  - h) obie podstawy i oba kąty przy podstawie.
9. Dane są dwie proste przecinające się. Narysować okrąg o promieniu  $r = 3$  cm, styczny do tych prostych.

10. Dane są dwa punkty odległe o 4 cm. Narysować okrąg o promieniu  $r = 3$  cm, przechodzący przez te punkty.
11. W dany kąt wpisać okrąg o danym promieniu.
12. Dany jest okrąg. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których widać ten okrąg pod danym kątem (kąt widzenia okręgu jest to kąt między stycznymi poprowadzonymi z danego punktu do tego okręgu).
13. Narysować trzy okręgi o danych promieniach  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , z których każde dwa są styczne zewnętrznie.
14. Wewnątrz kąta o wierzchołku  $W$  leży punkt  $A$ . Znaleźć okrąg przechodzący przez punkt  $A$  i styczny do ramion tego kąta.
15. Nakreślić dwa okręgi, styczne zewnętrznie i dwie proste styczne zewnętrznie do obu tych okręgów w ten sposób, aby cięciwy łączące punkty styczności tych prostych z okręgami były równe 5 cm i 3 cm.
16. Dane są dwa odcinki  $a$  i  $b$ . Zbudować odcinki równe:
  - a)  $\frac{a+b}{2}$     b)  $\sqrt{a \cdot b}$     c)  $\frac{b}{a} \sqrt{a \cdot b}$     d)  $\sqrt{a^2 + b^2}$     e)  $\sqrt{a^2 - b^2}$
17. Zbudować kwadrat równoważny danemu prostokątowi, tj. kwadrat, którego pole jest równe polu prostokąta.
18. Zbudować kwadrat równoważny danemu trójkątowi.
19. Zbudować prostokąt o danej podstawie, równoważny danemu prostokątowi.
20. Zbudować trójkąt o danej podstawie, równoważny danemu trójkątowi.
21. Zbudować romb o danych dwóch przekątnych.
22. Zbudować romb o danej przekątnej, równoważny danemu prostokątowi.
23. Zbudować romb o danym boku, równoważny połowie kwadratu o takim samym boku.
24. Zbudować koło równoważne sumie dwóch danych kół.
25. Zbudować koło równoważne danemu pierścieniowi.
26. Dane koło podzielić okręgiem współśrodkowym na dwie części o równych polach.
27. Przeprowadzić prostą równoodległą od trzech zadanych punktów.
28. Przeprowadzić okrąg przechodzący przez trzy zadane punkty.
29. Wyznaczyć punkt, z którego dany odcinek i dany okrąg są widziane pod danymi dwoma kątami.
30. W dany okrąg wpisać trójkąt podobny do danego trójkąta.

## Pytania

1. Z jakich etapów składa się rozwiązanie zadania konstrukcyjnego?
2. Jaka jest różnica między konstrukcją geometryczną, a kreśleniem praktycznym?
3. Co to jest miejsce geometryczne? Na czym polega zastosowanie miejsc geometrycznych w konstrukcjach geometrycznych?

1. a) Kreślimy dany bok. Z jego środka promieniem, równym danej środkowej, zataczamy okrąg. Drugi okrąg zataczamy z końca tego boku promieniem równym drugiemu danemu bokowi. W przecięciu tych okręgów leży trzeci wierzchołek trójkąta. b) Kreślimy dany bok, kąt, dwusieczną, odkładamy daną długość dwusiecznej i otrzymujemy punkt, przez który ma przejść trzeci bok trójkąta. c) Trzeci wierzchołek trójkąta leży na przecięciu się dwóch okręgów, z których jeden ma środek w środku danego boku i promień równy danej środkowej, a drugi jest miejscem geometrycznym punktów, z których widać dany odcinek pod danym kątem (zob. tw. 88.5).
2. d) Poprowadzić prostą przebiegającą równoległe do kierunku ramienia w odległości równej wysokości.
3. c) Nakreślić dany bok oraz miejsce geometryczne punktów, z których widać ten bok pod danym kątem. Z końca danego boku zatoczyć daną wysokością okrąg. Z drugiego końca tego boku poprowadzić styczną do tego okręgu. e) Nakreślić bok, kąt przyległy i z jego wierzchołka zatoczyć daną wysokością okrąg. Z drugiego końca tego boku poprowadzić styczną. f) Nakreślić dany bok, dany kąt przyległy i na drugim ramieniu tego kąta odłożyć daną sumę pozostałych boków. Punkt otrzymany w ten sposób połączyć odcinkiem z drugim końcem nakreślonego boku. Symetralna tego odcinka przecina nakreślone ramie kąta w punkcie, który jest trzecim wierzchołkiem trójkąta. Warunek rozwiązalności: suma dwóch boków musi być większa od trzeciego boku. g) Podobnie jak f).
4. Znaleźć najpierw punkt  $A'$  symetryczny do  $A$  względem  $l$ . Połączyć  $A'$  z  $B$  odcinkiem, w przecięciu z prostą  $l$  leży  $M$ .  $MA$  i  $MB$  tworzą z prostą  $l$  równe kąty (kąt padania jest równy kątowi odbicia).
5. Posłużyć się punktem  $A'$  symetrycznym do  $A$  względem  $l$  (zob. zad. 4).
6. Przeprowadzić dwusieczną kąta przy  $B$ .
7. Przeprowadzić symetralną boku  $\overline{BC}$  i dwusieczną kąta przy  $B$ .
8. c) Na większej podstawie odłożyć mniejszą i przez jej koniec poprowadzić pomocniczą prostą równoległą do ramienia o wiadomym nachyleniu. d) Nad dolną podstawą, na danej wysokości, nakreślić prostą, na której ma leżeć górna podstawa; cyrklem odłożyć wiadome ramie, a potem górną podstawę. e) — jak d). f) Jeśli z trapezu usuniemy prostokąt odpowiadający mniejszej podstawie, a skrajne dwie części zesuniemy, to otrzymamy trójkąt o wiadomych trzech bokach. Nakreśliwszy ten trójkąt, uzupełniamy go usuniętym poprzednio prostokątem do trapezu. g) Analiza: Przez koniec górnej podstawy nakreślić równoległą do przekątnej. Przedłużyć dolną podstawę. Powstaje trójkąt o wiadomych bokach. h) — jak c).
9. Nakreślić równoległą do ramienia kąta w odległości 3 cm. Nakreślić dwusieczną.
10. Dane punkty i szukany środek okręgu tworzą trójkąt o bokach 4, 3 i 3.
11. Podobnie jak 9.

12. Kąt między stycznymi jest związany z kątem między promieniami punktów styczności, co pozwala wyznaczyć punkty styczności dwóch stycznych tworzących zadany kąt widzenia i znaleźć jeden z szukanych punktów. Inne leżą na okręgu koncentrycznym z danym.
13. Jakie są odległości między środkami tych okręgów?
14. Skorzystamy z jednokładności. Analiza: Kreślimy kąt, punkt  $A$ , szkicujemy okrąg  $K$ , jego środek  $C$  leży na dwusiecznej. Z dowolnego punktu  $C'$  na dwusiecznej zataczamy pomocniczy okrąg, styczny do ramion kąta i przecinamy go z półprostą  $WA$ , otrzymując punkt  $A'$  (dwa położenia). Trójkąt  $WC'A'$  jest jednokładny z trójkątem  $WCA$ .
15. Nakreślić wspólną styczną tych okręgów i porównując odcinki stycznych, wyznaczyć ich długość.
16. b) Zob. rys. 88-7, str. 110. c) Zob. konstrukcję 18, str. 128. d) Jest to przeciwprostokątna w trójkącie, w którym  $a$  i  $b$  są przyprostokątnymi. e) Jest to przyprostokątna w trójkącie, w którym  $a$  jest przeciwprostokątną, a  $b$  przyprostokątną.
- 17-20. Konstrukcja 18, str. 130.
- 21-23. Zob. własności rombu, str. 68.
24. Zob. zadanie 16 d. 25. Zob. zadanie 16 e.
26. Promień tego okręgu ma się do promienia koła jak  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  do 1.
27. Każda prosta przechodząca przez środek symetrii dwóch punktów jest równo odległa od nich. Poprowadzić prostą przez dwa takie środki symetrii (trzy rozwiązania).
28. Zob. konstrukcję 9, str. 127.
29. Punkt ten leży w przecięciu miejsca geometrycznego z zadania 12 i miejsca geometrycznego z tw. 88.4, str. 109.
30. Posłużyć się jednokładnością, jak w zadaniu 14, lub translacją.

## 91. Zadania rachunkowe z planimetrii

Ogólne zasady rozwiązywania zadań rachunkowych z geometrii. Najpierw należy ustalić, które z występujących w zadaniu wielkości takich jak odcinki, pola lub objętości są wiadome względnie co o nich wiadomo, a która wielkość jest szukana niewiadomą, tj. tą niewiadomą, której obliczenia żąda temat zadania.

Następnie należy ustalić związki zachodzące pomiędzy wielkościami wiadomymi i niewiadomymi. Związków tych dostarczą nam odpowiednie twierdzenia geometryczne i wzory.

Wprowadzając pomocnicze niewiadome oznaczamy je dowolnymi literami przestrzegając wszakże, aby nigdy jedna litera nie oznaczała w danym zadaniu dwóch różnych wielkości; to bowiem prowadzi zwykle do błędu. Oczywiście, pożądane jest też, aby równych wielkości (np. ramion trójkąta równoramiennego) nie oznaczać różnymi literami, gdyż to, aczkolwiek nie prowadzi do błędu, jednak znacznie utrudnia rozwiązanie zadania.

Następnie należy ułożyć równania, pamiętając o tym, że na ogół trzeba mieć tyle równań ile jest wszystkich niewiadomych (poszukiwanych i pomocniczych razem) i że równania powinny być wzajemnie niezależne. Oto przykład dwóch równań niezależnych

$$a^2 + b^2 = 25 \quad a + b = 7$$

i przykład dwóch równań zależnych

$$a^2 + b^2 = 25 \quad a^2 = 25 - b^2$$

Aby znaleźć potrzebne równania, korzystamy z twierdzeń i wzorów. Najczęściej korzystamy z twierdzeń: Pitagorasa, Talesa, o dwusiecznej w trójkącie, o wysokości w trójkącie prostokątnym, o odcinkach stycznych i siecznych oraz z podobieństwa trójkątów. Często korzystamy z różnych wzorów na pola figur.

Fakt, że pole trójkąta  $S$  wyraża się na różne sposoby, np.

$$S = \frac{1}{2} aw = \frac{1}{2} (a + b + c) r = \frac{1}{2} \frac{abc}{2R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B}{\sin A} \sin C$$

pozwala niekiedy uzyskać równanie potrzebne do obliczenia pewnych elementów, gdy inne są znane. Dalszych wzorów i twierdzeń dostarcza trygonometria.

**Przykład 1.** Trapez równoramienny ma podstawy  $a, b$ ;  $a > b$ . Jakie powinno być ramię  $p$  i wysokość  $h$  tego trapezu, aby można było wpisać wewnątrz okrąg?

**Rozwiązanie.** Szkicujemy trapez równoramienny i oznaczamy jego boki wskazanymi w temacie literami. Wiadomo, że w czworokąt można wpisać okrąg jeśli suma jednej pary boków przeciwległych jest równa sumie drugiej pary boków przeciwległych, tj. w rozważanym przypadku, jeśli

$$2p = a + b, \quad \text{czyli} \quad p = \frac{a + b}{2}$$

Przez końce krótszej podstawy trapezu przeprowadzamy dwie proste prostopadłe do podstaw trapezu. Dzielą one trapez na trzy części: prostokąt i dwa przystające trójkąty prostokątne. Jednocześnie dzielą one dolną podstawę na trzy części, z których środkowa ma długość  $b$ , sumą długości skrajnych jest  $a - b$ , a ponieważ są wzajemnie równe, więc każda z nich równa się  $\frac{a - b}{2}$ .

Rozważmy jeden z otrzymanych w ten sposób trójkątów. Jego przeciwprostokątna jest równa  $p$ , jedna przyprostokątna  $h$ , a druga  $\frac{a - b}{2}$ . Twierdzenie Pitagorasa daje

$$h^2 = p^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$$

<sup>1)</sup>  $w$  jest wysokością odpowiadającą bokowi  $a$ ,  $p$  jest połową obwodu,  $A, B, C$  są kątami leżącymi odpowiednio naprzeciw boków  $a, b, c$ .

podstawiając za  $p$  wartość poprzednio otrzymaną po wykonaniu rachunków dostajemy

$$h^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = ab, \quad \text{czyli} \quad h = \sqrt{ab}$$

Odp. W trapez równoramienny o podstawach  $a$  i  $b$  można wpisać okrąg, jeśli ramię trapezu jest średnią arytmetyczną, a wysokość  $h$  średnią geometryczną obu podstaw.

**Przykład 2.** W półkole o średnicy 50 mm wpisano trapez w ten sposób, że średnica półkola jest jedną z podstaw trapezu. Suma trzech pozostałych boków trapezu jest równa 74 mm. Obliczyć te boki.

**Rozwiązanie.** *Szkic i oznaczenia.* Szkicujemy półkole z wpisanym trapezem tak, aby średnica półkola równa 50 mm i będąca jednocześnie większą podstawą trapezu była u dołu rysunku, mniejsza zaś podstawa trapezu — u góry rysunku. Trapez wpisany w półkole musi być równoramienny. Ramię jego oznaczamy  $x$ , górną podstawę —  $y$ .

**Ułożenie równań.** Wiadomość podaną w temacie zapiszemy w postaci równania

$$2x + y = 74 \quad (91.1)$$

Występują tu dwie niewiadome, trzeba więc mieć jeszcze drugie równanie.

*Linie pomocnicze.* Jeden z końców górnej podstawy, np. prawy, oznaczamy  $B$  i łączymy ze środkiem podstawy  $O$  odcinkiem  $OB$ , który jest promieniem półkola i równa się 25 mm. Odcinek ten odcina z trapezu trójkąt  $OAB$  (przez  $A$  oznaczamy prawy koniec dolnej podstawy). W trójkącie  $OAB$  jest  $AO = 25$ ,  $OB = 25$  i  $AB = x$ . Opuszczając w tym trójkącie z wierzchołka  $B$  wysokość  $h$  prostopadłą do  $OA$  dzielimy go na dwa trójkąty prostokątne:

— trójkąt lewy o podstawie  $\frac{y}{2}$ , wysokości  $h$  i przeciwprostokątnej  $OB = 25$ ,

— trójkąt prawy o podstawie  $25 - \frac{y}{2}$ , wysokości  $h$  i przeciwprostokątnej  $x$ .

Stosując do tych trójkątów twierdzenie Pitagorasa dostajemy

$$h^2 = 25^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad h^2 = x^2 - \left(25 - \frac{y}{2}\right)^2$$

Prawe strony tych wzorów muszą być równe:

$$25^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x^2 - \left(25 - \frac{y}{2}\right)^2 \quad \text{stąd} \quad x^2 + 25y - 1250 = 0 \quad (91.2)$$

Rozwiązując układ równań (91.1) i (91.2) dostajemy  $x_1 = 30$ ,  $x_2 = 20$ ,  $y_1 = 14$ ,  $y_2 = 34$ .

Odp. Istnieją dwa rozwiązania. Szukane boki trapezu mają długości: 30, 14, 30 albo 20, 34, 20 milimetrów.

**Przykład 3.** W okrąg o promieniu  $R$  wpisano trójkąt równoramienny, w którym suma ramienia i wysokości, opuszczonej z wierzchołka na podstawę jest równa  $m$ . Obliczyć wysokość uważając  $R$  i  $m$  za wiadome.

**Rozwiązanie. Szkic i oznaczenia.** Szkicujemy okrąg i wpisany weń trójkąt równoramienny, przy czym rozróżniamy trzy przypadki w zależności od tego, czy kąt  $\varphi$  między ramionami trójkąta jest: 1) ostry, 2) prosty, lub 3) rozwarty. Końce podstawy oznaczamy  $A$  i  $C$ , a przez  $B$  oznaczamy wierzchołek kąta  $\varphi$ . Przez  $D$  oznaczamy spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka  $B$  na podstawę  $AC$ . Długości boków oznaczamy pojedynczymi literami:

$$\begin{aligned}\text{podstawa } AC &= a \\ \text{ramiona } AB &= BC = b \\ \text{wysokość } BD &= h\end{aligned}$$

Środek okręgu opisanego oznaczamy  $S$ , mamy więc  
promień okręgu opisanego  $SA = SB = SC = R$

Ponieważ trójkąt jest równoramienny, więc środek  $S$  okręgu opisanego leży na wysokości  $BD$  lub na jej przedłużeniu. Oznaczmy przez  $x$  odległość punktu  $S$  od podstawy  $AC$  trójkąta

$$SD = x$$

Wówczas wysokość  $h$  trójkąta zależnie od rozważanego przypadku wyraża się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}\text{w przypadku 1} \quad h &= R + x \\ \text{w przypadku 2} \quad h &= R \\ \text{w przypadku 3} \quad h &= R - x\end{aligned}$$

Te trzy wzory możemy zastąpić jednym wzorem, mianowicie pierwszym z nich, jeśli będziemy  $x$  uważać w pierwszym przypadku za liczbę dodatnią, w drugim — za zero, a w trzecim — za liczbę ujemną. Wówczas wzór

$$h = R + x$$

obejmuje wszystkie trzy wymienione przypadki. Zakres zmienności niewiadomej  $h$  sięga od 0 do  $2R$ :

$$0 < h < 2R$$

Zakres zmienności zmiennej pomocniczej  $x$  sięga od  $-R$  do  $+R$ :

$$-R < x < +R$$

**Układanie równań.** Niewiadoma  $h$  jest poszukiwana, niewiadome zaś  $a$ ,  $b$ ,  $x$  są niewiadomymi pomocniczymi. Należy mieć tyle równań, ile jest niewiadomych.

Temat dostarcza nam jednego równania

$$b + h = m$$

Drugim równaniem jest związek

$$h = R + x$$

Trójkąt  $ADB$  jest prostokątny i z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$AD^2 + DB^2 = AB^2, \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = b^2$$

Trójkąt  $ADS$  jest prostokątny i z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$AD^2 + DS^2 = AS^2, \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = R^2$$

**Rozwiązanie równań.** Otrzymane 4 równania zawierają 4 niewiadome. Stąd dostajemy

$$h^2 - 2(R + m)h + m^2 = 0 \quad \text{czyli} \quad h^2 - 2(R + m)h + m^2 = 0$$

Pierwiastek, który otrzymujemy biorąc znak  $-$

$$h = m + R - \sqrt{R^2 + 2mR}$$

trzeba odrzucić, gdyż wykracza poza zakres zmienności niewiadomej  $h$ . Otrzymujemy więc odpowiedź

$$h = m + R + \sqrt{R^2 + 2mR}$$

### Zadania

1. Dwa boki trójkąta są równe 8 i 15, a kąt między nimi jest równy  $45^\circ$ . Obliczyć pole tego trójkąta. Jeśli kąt między tymi bokami będzie zmienny, to przy jakim kącie pole tego trójkąta jest największe i ile wynosi największa jego wartość?

2. Obwód rombu jest równy 20, a suma przekątnych 14. Obliczyć pole i wysokość rombu.

Wskazówka: Przekątne rombu połowią się, są prostopadłe i znając je można łatwo obliczyć pole rombu. Oznaczmy przez  $x$ ,  $y$  połowy przekątnych. Temat zadania dostarcza dwóch równań na  $x$ ,  $y$ . Wysokość rombu obliczymy dzieląc pole przez podstawę.

3. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest równa 10, a wysokość  $h$ , opuszczona z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, dzieli ją na części  $x$ ,  $y$  pozostające w stosunku 1:4.

Wskazówka:  $h$  jest średnią geometryczną  $x$  i  $y$ .

4. W trójkącie równoramiennym o podstawie równej 4 i ramieniu równym 6 środkowe przecinają się w pewnym punkcie. Obliczyć odległości tego punktu od wierzchołków trójkąta.

Wskazówka: Zastosować twierdzenie o środkowych trójkąta i twierdzenie Pitagorasa.

5. Dany trójkąt podzielono prostą równoległą do podstawy na dwie części o równych polach. W jakim stosunku zostały podzielone ramiona trójkąta?

Wskazówka: Naszkicować rysunek i znaleźć na nim trójkąty podobne. Pola figur podobnych mają się do siebie jak kwadraty ich rozmiarów liniowych.

6. Dany trójkąt podzielono prostymi równoległymi do podstawy na trzy części o równych polach. W jakim stosunku zostały podzielone ramiona trójkąta?
7. Trójkąt ma boki równe 12, 10 i 10. Obliczyć odległości wierzchołków od środka koła wpisanego.  
Wskazówka: Należy najpierw obliczyć promień koła wpisanego. W tym celu wyrażamy pole tego trójkąta na dwa sposoby: 1) przy pomocy podstawy i wysokości (twierdzenie Pitagorasa pozwala obliczyć wysokość); 2) przy pomocy obwodu i promienia koła wpisanego. Porównując otrzymane wyniki dostajemy równanie, z którego łatwo obliczyć  $r$ .
8. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12 został wpisany okrąg. Obliczyć promień tego okręgu oraz części, na które przeciwprostokątna została podzielona przez punkt styczności z tym okręgiem.  
Wskazówka: Zastosować twierdzenie o równości odcinków stycznych do okręgu.
9. Różnica między przekątną i boki kwadratu jest dana i równa  $d$ . Obliczyć pole i obwód kwadratu.  
Wskazówka: Oznaczyć przez  $x$  bok kwadratu i wyrazić przezeń przekątną. Temat zadania dostarcza równania potrzebnego do obliczenia  $x$ .
10. Obliczyć pole trapezu równoramiennego o ramieniu  $c$ , opisanego na kole o promieniu  $r$  ( $c, r$  — dane).  
Wskazówka: Twierdzenie o czworokącie opisanym na kole dostarcza potrzebnego nam związku między podstawami  $a, b$  trapezu a jego ramieniem  $c$ .
11. Jaką wysokość musi mieć trapez równoramienny o podstawach  $a$  i  $4a$ , aby można było wpisać wń okrąg?  
Wskazówka: Oznaczyć podstawy trapezu przez  $a, b$ , ramię przez  $c$ , a wysokość przez  $h$ . Twierdzenie o czworokącie opisanym na kole pozwala wyrazić  $c$  przez  $a$  i  $b$ . Wysokością odcinamy od trapezu trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej  $c$ . Twierdzenie Pitagorasa pozwala wyrazić  $h$  przez pozostałe boki tego trójkąta. Ostatecznie wyrażamy  $h$  w zależności od  $a$  i  $b$ . Podstawiając  $b = 4a$  otrzymamy rozwiązanie.
12. Środkowa trapezu ma długość 20 i dzieli pole trapezu w stosunku 3:5. Obliczyć długości podstaw trapezu. Czy powyższe dane wyznaczają wielkość i kształt trapezu?
13. Pole trójkąta równobocznego jest dane i równe  $S$ . Obliczyć pole koła opisanego na tym trójkącie.  
Wskazówka: Gdzie leży środek koła opisanego na trójkącie? Wyrazić promień  $R$  koła opisanego przez wysokość  $h$  trójkąta równobocznego. Wyrazić wysokość  $h$  przez bok  $a$  trójkąta równobocznego. Wyrazić bok  $a$  przez pole  $S$ .
14. Obliczyć promień  $r$  okręgu wpisanego w wycinek kołowy o promieniu  $a$  i kącie środkowym  $60^\circ$ . Obliczyć stosunek pola tego wycinka do pola koła wpisanego.  
Wskazówka: Oznaczmy wierzchołek wycinka przez  $O$ , środek koła wpisanego przez  $M$ , a rzut punktu  $M$  na jedno z ramion wycinka przez  $M'$ . Jest  $MM' = r$ . Trójkąt  $OMM'$  jest prostokątny i ma kąt przy  $O$  równy  $30^\circ$ . Jest on połową

- trójkąta równobocznego o boku  $OM$ . Zatem  $OM = 2MM' = 2r$ . Przedłużając  $OM$  aż do łuku wycinka otrzymujemy  $2r + r = a$ .
15. Cięciwa dzieli obwód okręgu w stosunku 3:5. W jakim stosunku dzieli ona pole koła?  
Wskazówka: Łuki są proporcjonalne do kątów środkowych, co pozwala obliczyć te kąty. Mniejszy z nich równa się  $135^\circ$ . Obliczamy pole wycinka odpowiadającego temu kątowi. Obliczamy pole trójkąta zawartego między promieniami tworzącymi kąt  $135^\circ$ . Różnica tych pól jest polem mniejszego odcinka. Odejmuje je od pola koła znajdujemy pole drugiego odcinka.
16. Punkt  $M$  leży na średnicy okręgu i dzieli ją na odcinki równe 6 i 4. Obliczyć długość cięciwy przechodzącej przez punkt  $M$  i prostopadłej do tej średnicy.
17. W kole o promieniu równym 5 poprowadzono cięciwę o długości równej 3 i przez jeden z jej końców poprowadzono średnicę. Jaka jest odległość drugiego końca cięciwy od tej średnicy?
18. Dany jest trapez równoramienny o podstawach 24 i 10. Przekątne trapezu są prostopadłe do siebie. Obliczyć pole i długość ramion trapezu.  
Wskazówka: Poprowadzić symetralną podstaw. Jest ona dwusieczną kąta między przekątnymi. Otrzymujemy kilka trójkątów prostokątnych równoramiennych, dzięki którym łatwo znajdujemy obie części wysokości trapezu. Ramię trapezu obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.
19. W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawą jest  $BC = 6$ , a wysokość  $AD$  równa się 4. Gdzie leży punkt  $H$ , w którym przecinają się wszystkie trzy wysokości tego trójkąta?  
Wskazówka: Prowadzimy wysokość  $\overline{CE}$ . Trójkąty  $EBC$  i  $DBA$  są podobne i z proporcji wyliczamy  $EB = \frac{18}{5}$ , zatem  $AE = AB - EB = \frac{7}{5}$ . Trójkąty  $HAE$  i  $BAD$  są podobne i stąd obliczamy  $HA$ .

### Odpowiedzi do rozdz. XIII

84

$$6. \frac{b(p+q)}{a-b} + b \quad 8. \frac{ac}{a+b}, \frac{bc}{a+b} \quad 9. \frac{15}{4}$$

87

$$7. \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

88

$$4. 9 \text{ i } 16 \quad 5. \frac{20}{3}$$

1.  $30\sqrt{2}$ ,  $90^\circ$ , 60 2.  $24\frac{24}{5}$  3. 20  
 4.  $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ ,  $\frac{2}{3}\sqrt{17}$ ,  $\frac{2}{3}\sqrt{17}$  5.  $1:(\sqrt{2}-1)$   
 6.  $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$  7. 5,  $3\sqrt{5}$ ,  $3\sqrt{5}$   
 8.  $r = 2$ , części 10 i 3  
 9.  $d^2(3+2\sqrt{2})$ ,  $4d(\sqrt{2}+1)$  10.  $2rc$  11.  $2a$   
 12. 10, 30. Nie, gdyż przy takich danych wysokość trapezu może być dowolna, również nachylenie jednego ramienia trapezu jest dowolne.  
 13.  $\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}$  14.  $r = \frac{a}{3}$ , stosunek pól 3:2  
 15.  $\left(\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) : \left(\frac{5}{8}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$   
 16.  $4\sqrt{6}$  17.  $0,3\sqrt{91}$  18. 289,  $13\sqrt{2}$   
 19.  $H$  leży na wysokości  $AD$  w odległości  $\frac{7}{4}$  od wierzchołka.

## Rozdział XIV

## FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO

## 92. Określenie funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

Co to jest trygonometria. Słowo trygonometria jest greckiego pochodzenia i oznacza dosłownie „mierzenie trójkątów”. Trygonometria jest działem geometrii. Głównym zadaniem trygonometrii jest rozwiązywanie trójkątów.

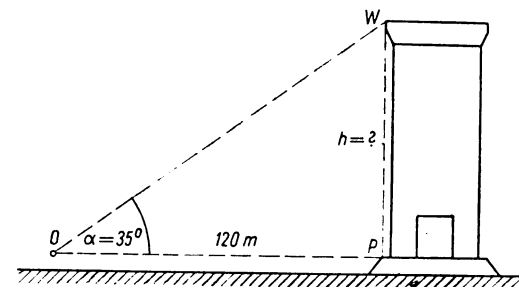
Rozwiązać trójkąt oznacza wyznaczyć wszystkie jego boki i kąty, jeśli są dane niektóre z nich albo pewne związki między nimi.

Głównymi pojęciami trygonometrii są funkcje trygonometryczne. Istnieje sześć funkcji trygonometrycznych; oto ich nazwy i symbole

|           |       |
|-----------|-------|
| sinus     | sin   |
| cosinus   | cos   |
| tangens   | tg    |
| cotangens | ctg   |
| secans    | sec   |
| cosecans  | cosec |

Nazwy te są łacińskie i należy je czytać: sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans, cosekans. Oprócz symbolu tg spotyka się symbole: tang, tan; cotangens oznacza się też cot lub ctn; zamiast cosec pisze się też csc.

Oto przykład wyjaśniający genezę funkcji trygonometrycznych.



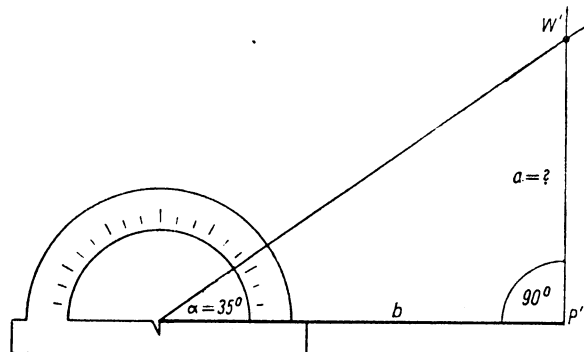
Rys. 92-1

**Przykład.** Na płaskim terenie stoi wieża (rys. 92-1). Obserwator stojący w odległości 120 m od wieży widzi ją pod kątem  $35^\circ$ . Wyznaczyć wysokość wieży  $h$ .

**Rozwiązanie.** W trójkącie  $OPW$  ( $O$  — obserwator,  $P$  — punkt u podstawy wieży,  $W$  — wierzchołek wieży) dane są: bok  $OP = 120$  i dwa kąty przyległe do tego boku o miarach:  $35^\circ$  i  $90^\circ$ . Przykład rozwiążemy wykreślnie, posługując się podobieństwem trójkątów.

Kreślimy trójkąt  $O'P'W'$  podobny do trójkąta  $OPW$ , obierając dowolną podstawę  $O'P' = b$  i kreśląc przy niej kąty o miarach  $35^\circ$  i  $90^\circ$  (rys. 92-2). Z proporcji  $h:120 = a:b$  wynika

$$h = 120 \frac{a}{b}$$



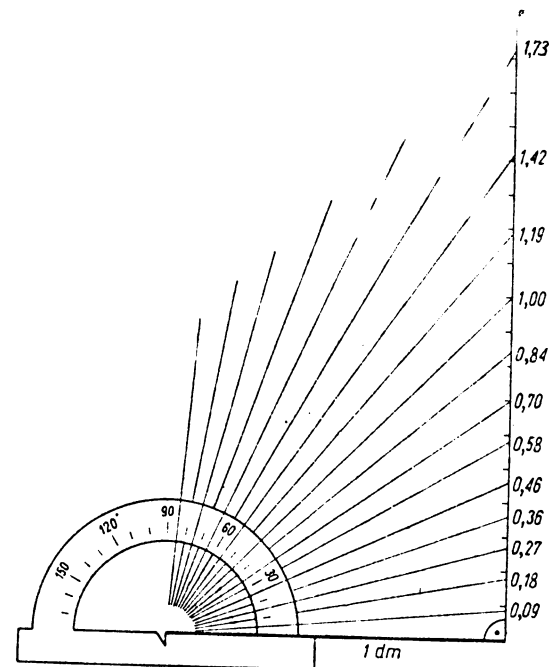
Rys. 92-2

Stosunek  $\frac{a}{b}$  jest tu czynnikiem, przez który należy pomnożyć odległość 120 m, aby otrzymać wysokość wieży. Istotne są tu nie odcinki  $a$ ,  $b$  oddzielnie brane, lecz ich stosunek. Pomocniczy trójkąt  $O'P'W'$  może mieć dowolną wielkość; jeśli tylko jest podobny do trójkąta  $OPW$ , to stosunek  $\frac{a}{b}$  mieć będzie zawsze tę samą wartość.

Mierząc odcinki  $a$ ,  $b$  na rysunku 92-2, otrzymujemy  $\frac{a}{b} = 0,7$ , a stąd  $h = 120 \cdot 0,7 = 84$ .

Aby się przygotować do rozwiązywania takim sposobem większej liczby podobnych zadań, można nakreślić wiele trójkątów prostokątnych o rozmaitych kątach ostrych i wyznaczyć wartości stosunku przyprostokątnych dla każdego kąta. Jeśli przyprostokątną przyległą do kąta  $\alpha$  obierzemy równą 1, to wystarczy zmierzyć drugą przyprostokątną i jej długość jest równa szukanemu stosunkowi (rys. 92-3). Stosunek ten trzeba jakoś nazwać. Nazwano go *tangensem*. Każda z liczb zanotowanych na rysunku jest tangensem jakiegoś kąta, np. kątowi  $5^\circ$  odpowiada tangens równy 0,09. Wyrażamy to, mówiąc: „tangens kąta  $5^\circ$  równa się 0,09” i pisząc—

$$\operatorname{tg} 5^\circ = 0,09$$



Rys. 92-3

Tablica 92-1

| $\alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ |
|----------|----------------------------|
| 0        | 0                          |
| 5        | 0,09                       |
| 10       | 0,18                       |
| 15       | 0,27                       |
| 20       | 0,36                       |
| 25       | 0,46                       |
| 30       | 0,58                       |
| 35       | 0,70                       |
| 40       | 0,84                       |
| 45       | 1                          |
| 50       | 1,19                       |
| 55       | 1,42                       |
| .        | .                          |
| .        | .                          |
| .        | .                          |

Mówimy też: „Jeśli kąt ma miarę  $5^\circ$ , to tangens tego kąta równa się 0,09”, co zapisujemy

$$\alpha = 5^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0,09$$

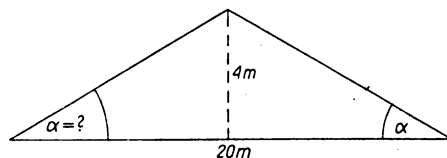
Streszczeniem powyższych rozważań jest następująca definicja:

*Tangensem kąta ostrego  $\alpha$  nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi  $\alpha$  do przyprostokątnej przyległej do kąta  $\alpha$ .*

Stosunek ten nie zależy od wielkości trójkąta, a jedynie od kąta  $\alpha$ ; jest więc funkcją kąta  $\alpha$ . Jednak wartość jego wyznacza się za pomocą trójkąta; dlatego nazwano go funkcją trygonometryczną (po grecku *trigonon* – trójkąt).

**Tablice trygonometryczne.** Wartości tangensa odczytane z rysunku 92-3 można zapisać w postaci tablicy (tabl. 92-1). Z tablicy tej korzystamy w poniższym przykładzie. Obszerniejsze tablice znajdują się w tej książce na str. 261. Dokładniejsze tablice trygonometryczne można nabyć w księgarniach.

**Przykład.** Rozpiętość dachu dwuspadowego o jednakowym nachyleniu obu połaci wynosi 20 m, a wysokość tego dachu wynosi 4 m (rys. 92-4). Obliczyć kąt nachylenia połaci dachu do poziomu.



Rys. 92-4

**Rozwiązanie.** Wysokość dachu i połowa rozpiętości – to dwie przyprostokątne w trójkącie o kącie ostrym  $\alpha$ . Jest więc

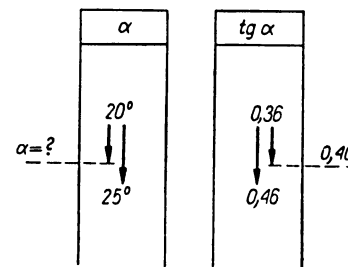
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{10} = 0,4$$

Teraz patrzymy na tablicę 92-1 i w kolumnie wartości tangensów szukamy pozycji  $0,4 = 0,40$ . Pozycji, dokładnie takiej, nie ma, więc bierzemy tę, która różni się możliwie najmniej, tj. pozycję 0,36. Takiej wartości tangensa odpowiada kąt  $20^\circ$ . A więc odpowiedź nasza, w przybliżeniu bardzo grubym, będzie  $20^\circ$ . Jest to odpowiedź z dokładnością do  $5^\circ$ . Dokładność można powiększyć przez interpolację.

**Interpolacja** jest to wyznaczenie przybliżonej wartości pośredniej między dwiema wartościami znajdującymi się w tablicy i polega na rozumowaniu, które w zastosowaniu do powyższego przykładu tak przebiega: „Jeśli wartość  $\operatorname{tg} \alpha = 0,40$  jest pośrednia między 0,36 i 0,46, to kąt  $\alpha$  odpowiadający tej wartości jest kątem pośrednim między  $20^\circ$  i  $25^\circ$ ”. Rozumowanie takie jest poprawne, jeśli stosujemy je do funkcji monotonicznych. Tangens jest w zakresie kątów ostrych funkcją monotoniczną, a mianowicie rosnącą.

Dla przybliżonego wyznaczenia kąta,  $\alpha$  stosuje się interpolację liniową, której

podstawą jest proporcjonalność różnic (rys. 92-5). Szukana wartość  $\alpha$  powinna dzielić różnicę dwóch kolejnych pozycji w kolumnie kątów w takim stosunku, w jakim dana wartość tangensa 0,40 dzieli różnicę dwóch kolejnych pozycji w kolumnie tangensów.



Rys. 92-5

$$(\alpha - 20^\circ) : (25^\circ - 20^\circ) = (0,40 - 0,36) : (0,46 - 0,36)$$

Wykonując łatwe rachunki, otrzymujemy  $\alpha = 22^\circ$ .

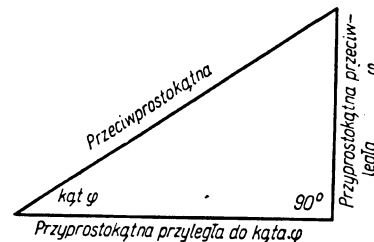
**Układanie tablic trygonometrycznych i ich dokładność.** Wartości tangensa, które chcieliśmy przedstawić w tablicy 92-1, są prawie wszystkie liczbami niewymiernymi (z wyjątkiem wartości  $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$  i  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ , które są całkowite). Znajdujące się w tej tablicy ułamki dziesiętne są przybliżeniami wartości tangensa z dokładnością do 0,01, co wyrażamy, mówiąc że tablica ta jest „dwucyfrowa”.

Jak można zwiększyć dokładność tablic? Staranniejsze kreślenie rysunku i zwiększenie jego rozmiarów niewiele pomoże, gdyż na dużym rysunku i błędy będą większe. Na tej „doświadczalnej” drodze wielkiego sukcesu nie odnieśliśmy.

Dzięki matematyce wyższej, bez kreślenia, drogą czysto rachunkową (mówimy: *analityczną*) można obliczyć wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych z dowolną dokładnością. Używane są cztero-, pięcio-, sześć-, a nawet dwunastocyfrowe tablice funkcji trygonometrycznych.

Po tym wprowadzeniu w trygonometrię przystępujemy do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych.

**Definicja 92.1** (funkcji trygonometrycznych kąta ostrego). Niech będzie dany dowolny kąt ostry  $\varphi$ . Zbudujmy dowolny trójkąt prostokątny mający kąt ostry  $\varphi$  (rys. 92-6). Boki tego trójkąta mają nazwy:



Rys. 92-6

- przeciwprostokątna,
- przyprostokątna przyległa do kąta  $\varphi$ ,
- przyprostokątna przeciwna do kąta  $\varphi$ .

Z boków tego trójkąta można utworzyć 6 różnych stosunków. Każdy z tych stosunków stanowi jedną z sześciu funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\varphi$ , a mianowicie:

*sinusem* kąta ostrego  $\varphi$  nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej do kąta  $\varphi$  do przeciwprostokątnej;

*cosinusem* kąta ostrego  $\varphi$  nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do kąta  $\varphi$  do przeciwprostokątnej;

*tangensem* kąta ostrego  $\varphi$  nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej do kąta  $\varphi$  do przyprostokątnej przyległej do kąta  $\varphi$ ;

*cotangensem* kąta ostrego  $\varphi$  nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do kąta  $\varphi$  do przyprostokątnej przeciwległej do kąta  $\varphi$ ;

*secansem* kąta ostrego  $\varphi$  nazywamy stosunek przeciwprostokątnej do przyprostokątnej przyległej do kąta  $\varphi$ ;

*cosecansem* kąta ostrego  $\varphi$  nazywamy stosunek przeciwprostokątnej do przyprostokątnej przeciwległej do kąta  $\varphi$ .

Streszczając tę definicję, zapiszemy

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przeciwprostokątna}} \\ \cos \varphi &= \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przeciwprostokątna}} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przyprostokątna przyległa}} \\ \operatorname{ctg} \varphi &= \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przyprostokątna przeciwległa}} \\ \sec \varphi &= \frac{\text{przeciwprostokątna}}{\text{przyprostokątna przyległa}} \\ \operatorname{cosec} \varphi &= \frac{\text{przeciwprostokątna}}{\text{przyprostokątna przeciwległa}} \end{aligned} \quad (92.1)$$

Spostrzegamy, że trzy ostatnie funkcje są odwrotnościami trzech pierwszych, a mianowicie

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \quad \sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi} \quad \operatorname{cosec} \varphi = \frac{1}{\sin \varphi} \quad (92.2)$$

Funkcje będące wzajemnymi odwrotnościami połączono w zapisie (92.1) klamrami. Ułatwi to zapamiętanie powyższych definicji.

Funkcjami  $\sec$  i  $\operatorname{cosec}$  nie będziemy się bliżej zajmować.

**Oznaczenia standardowe.** Aby definicjom i twierdzeniom trygonometrii nadać jak najprostszą postać, wprowadza się następujące oznaczenia:

- $a, b, c$  — długości boków trójkąta,
- $\alpha, \beta, \gamma$  — kąty trójkąta,
- $r$  — promień koła wpisanego w trójkąt,
- $R$  — promień koła opisanego na trójkącie,
- $S$  — pole trójkąta,

przy czym:

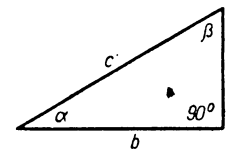
kąt leżący naprzeciwko boku  $a$  oznaczamy  $\alpha$ ,

kąt leżący naprzeciwko boku  $b$  oznaczamy  $\beta$ ,

kąt leżący naprzeciwko boku  $c$  oznaczamy  $\gamma$ .

Niekiedy dla oznaczenia kątów, zamiast liter greckich, używa się liter  $A, B, C$  oznaczających wierzchołki tych kątów.

W trójkącie prostokątnym umawiamy się oznaczać kąt prosty literą  $\gamma$  względnie  $C$ , a przeciwprostokątną literą  $c$  (rys. 92-7).



Rys. 92-7

Powyższe oznaczenia nazywamy *oznaczeniami standardowymi*.

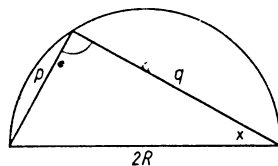
Przy oznaczeniach standardowych w trójkącie prostokątnym mamy

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} & \sin \beta &= \frac{b}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} & \cos \beta &= \frac{a}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} & \operatorname{tg} \beta &= \frac{b}{a} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} & \operatorname{ctg} \beta &= \frac{a}{b} \\ \sec \alpha &= \frac{c}{b} & \sec \beta &= \frac{c}{a} \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{c}{a} & \operatorname{cosec} \beta &= \frac{c}{b} \end{aligned} \quad (92.3)$$

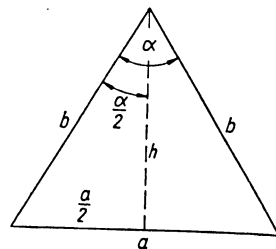
Nie w każdym przypadku można użyć oznaczeń standardowych, ale zawsze trzeba umieć ułożyć stosunek tworzący daną funkcję trygonometryczną. Dlatego na pierwszy plan wysunęliśmy takie sformułowanie definicji funkcji trygonometrycznych, w którym nie korzysta się z oznaczeń standardowych.

**Zadanie 1.** Trójkąt wpisano w półkole w ten sposób, że średnica jest jego podstawą, a wierzchołek leży na półokręgu (rys. 92-8); wiadomo, że kąt wpisany w półkole jest prosty, zatem trójkąt ten jest prostokątny. Jeden z kątów ostrych oznaczamy  $x$ , przyprostokątną leżącą naprzeciw tego kąta oznaczamy  $p$ , drugą przyprostokątną  $q$ , średnicę półkola  $2R$ . Ułożyć z boków tego trójkąta stosunki równe poniższym czterem funkcjom trygonometrycznym kąta  $x$

$$\sin x = \frac{p}{2R}, \quad \cos x = \frac{q}{2R}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{p}{q}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{q}{p}$$



Rys. 92-8



Rys. 92-9

(wpisać ołówkiem właściwe litery, po czym porównać z odpowiedzią na końcu rozdziału).

**Zadanie 2.** Trójkąt równoramienny ma podstawę  $a$ , ramiona  $b$ , wysokość  $h$  i kąt u wierzchołka  $\alpha$  (rys. 92-9). Ułożyć stosunki równe poniższym funkcjom trygonometrycznym

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{b}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{b}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{a/2}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{h}$$

### 93. Funkcje i kofunkcje. Tablice funkcji trygonometrycznych

**Funkcje i kofunkcje.** Odczytując wzory (92.3), zauważamy, że stosunek  $\frac{b}{c}$  występuje tam dwukrotnie: po prawej stronie jako  $\sin \beta$  i po lewej stronie jako  $\cos \alpha$ , zatem  $\sin \beta = \cos \alpha$ , ale ponieważ  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , więc

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

Podobnie wyprowadza się związek

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

Powyższe związki wyrażamy, mówiąc, że sinus i cosinus są wzajemnymi kofunkcjami: sinus jest kofunkcją cosinusa oraz cosinus jest kofunkcją sinus.

Podobnie ma się rzecz z pozostałymi funkcjami trygonometrycznymi: tangens i cotangens są wzajemnymi kofunkcjami oraz secans i cosecans są wzajemnymi kofunkcjami.

Termin „kofunkcja” oznacza „funkcja kąta dopełniającego” (łac. *complementum* — dopełnienie)

$$\cosinus \alpha = \sinus \text{ complementi } \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\cotangens \alpha = \operatorname{tangens} \text{ complementi } \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

Oto wzory wyrażające związki między funkcjami i kofunkcjami

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

(93.1)

Są to tzw. wzory redukcyjne dla kąta  $90^\circ - \alpha$ .

Ze wzorów tych korzysta się przy układaniu tablic. Jeśli bowiem jakimkolwiek sposobem zostały wyznaczone wartości sinus, cosinus, tangens i cotangens dla kątów od  $0^\circ$  do  $45^\circ$ , to już nie trzeba trudzić się wyznaczeniem wartości tych funkcji dla kątów od  $45^\circ$  do  $90^\circ$ , gdyż wartości te równają się wartościom kofunkcji dla kątów dopełniających, np.

$$\sin 89^\circ = \cos 1^\circ$$

$$\sin 88^\circ = \cos 2^\circ \text{ itd.}$$

$$\cos 89^\circ = \sin 1^\circ$$

$$\cos 88^\circ = \sin 2^\circ$$

$$\operatorname{tg} 89^\circ = \operatorname{ctg} 1^\circ$$

$$\operatorname{tg} 88^\circ = \operatorname{ctg} 2^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 89^\circ = \operatorname{tg} 1^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 88^\circ = \operatorname{tg} 2^\circ$$

Tablice funkcji trygonometrycznych układa się tak, że każda wartość funkcji ma podwójny sens, a mianowicie może być odczytana:

1 — jako wartość pewnej funkcji dla kąta  $\alpha$  nie większego od  $45^\circ$ ;

2 — jako wartość kofunkcji dla kąta  $90^\circ - \alpha$ .

Dla przykładu, w tablicy II (str. 261) w kolumnie pod nagłówkiem  $\cos$  znajduje się pozycja 0,9998; ma ona podwójne znaczenie:

1 — jest to cosinus kąta  $1^\circ$ , jeśli bowiem nazwę funkcji odczytujemy u góry, to kąt należy odczytać z lewej strony,

2 — jest to sinus kąta  $89^\circ$ , jeśli bowiem odczytamy nazwę funkcji u dołu, to jednocześnie należy kąt odczytać z prawej strony.

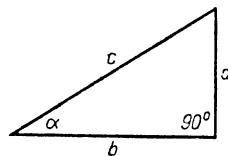
**Zadanie 1.** Odczytaj z tablicy II i zapisz wartości:  $\sin 16^\circ$ ,  $\sin 74^\circ$ ,  $\cos 21^\circ$ ,  $\cos 74^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 10^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 70^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 20^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 66^\circ$  i porównaj z odpowiedziami na końcu rozdziału.

### 94. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych. Logarytmy funkcji trygonometrycznych

Niech będzie dany trójkąt prostokątny z oznaczeniami standardowymi (rys. 94-1). Rozwiążemy sześć zadań wzorcowych odnoszących się do tego trójkąta oraz kilka przykładów liczbowych wprowadzających w praktykę obliczeniową.

**Zadanie wzorcowe 1.** Dane:  $a$ ,  $\alpha$ ; obliczyć  $b$ .

Rozwiązanie (rys. 94-1)



Rys. 94-1

Sposób I  $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$       Sposób II  $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$

$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$        $b = a \operatorname{ctg} \alpha$

W praktyce obliczeniowej sposób II jest wygodniejszy, gdyż nie występuje w nim dzielenie.

**Przykład liczbowy 1.** Wyznaczyć  $b$ , jeśli  $a = 15$ ,  $\alpha = 24^\circ$ .

Rozwiązanie. W tabeli II znajdujemy  $\operatorname{ctg} 24^\circ = 2,2460$ .

Zatem

$$b = a \operatorname{ctg} \alpha = 15 \cdot 2,2460 = 33,69$$

**Przykład liczbowy 2.** Wyznaczyć  $b$ , jeśli  $a = 15$ ,  $\alpha = 62^\circ$ .

Rozwiązanie. W tabeli znajdujemy kąt  $62^\circ$  po prawej stronie, wobec tego do kolumn wewnątrz tabeli stosują się teraz napisy umieszczone u dołu. W kolumnie oznaczonej u dołu „ctg” pozycją odpowiadającą kątowi  $62^\circ$  jest 0,5317. Podstawiając znalezione wartości otrzymujemy

$$b = a \operatorname{ctg} \alpha = 15 \cdot 0,5317 = 7,975$$

**Zadanie wzorcowe 2.** Dane:  $a$ ,  $b$ ; wyznaczyć  $\alpha$ .

Rozwiązanie (rys. 94-1)

Sposób I  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$       Sposób II  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$

W praktyce liczbowej oba sposoby są na ogół równoważne.

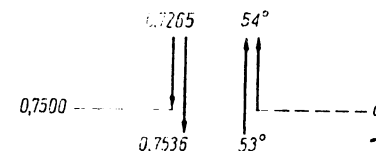
**Przykład liczbowy 3.** Wyznaczyć  $\alpha$ , jeśli  $a = 4$ ,  $b = 3$ .

Rozwiązanie.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} = 0,75 = 0,7500$ . W tabeli II w kolumnie pod nagłówkiem „ctg” szukamy pozycji bliskiej wartości 0,7500, ale nie znajdujemy takiej. Wobec tego przechodzimy do kolumny sąsiedniej, pod którą jest napis „ctg” oznaczający, że znajdujące się w tej kolumnie liczby są cotangensami kątów wypisanych na prawym brzegu tabeli. W kolumnie tej znajdujemy dwie kolejne pozycje wyznaczające przedział obejmujący daną wartość 0,7500. Odpowiadają im kąty  $53^\circ$  i  $54^\circ$  (rys. 94-2). Odpowiedź z dokładnością do  $1^\circ$  brzmi;  $\alpha = 53^\circ$ .

Aby dać odpowiedź dokładniejszą, stosujemy interpolację. Szukamy wartości  $\alpha$  (rys. 94-3), dzielącej różnicę między  $53^\circ$  i  $54^\circ$  w takim stosunku, w jakim wartość 0,7500 dzieli różnicę między pozycjami 0,7536 i 0,7265.

|     |     |        |    |                    |
|-----|-----|--------|----|--------------------|
|     |     | 0,7265 |    | 54°                |
|     |     | 0,7536 |    | 53°                |
| cos | sin | ctg    | tg | Kąt<br>w stopniach |

Rys. 94-2



Rys. 94-3

Układamy proporcję różnic, którym zwykle nadaje się poniższe nazwy

$$(0,7500 - 0,7265) : (0,7536 - 0,7265) = (\alpha - 54^\circ) : (53^\circ - 54^\circ)$$

różnica zadaniowa      różnica tabelowa      poprawka      krok tabeli

Oznaczając poprawkę literą  $x$ , mamy  $\alpha - 54^\circ = x$ , czyli  $\alpha = 54^\circ + x$ . Wyrażając poprawkę oraz krok tabeli w minutach, zaś różnicę zadaniową i tabelową w jednostkach rzędu ostatniej cyfry w tabeli (czyli w tzw. „punktach”; w tabeli 4-cyfrowej punktem jest 0,0001), mamy

$$235 : 271 = x : (-60')$$

$$\text{Stąd } x = -52', \text{ a więc } \alpha = 54^\circ + x = 54^\circ - 52' = 53^\circ 08'$$

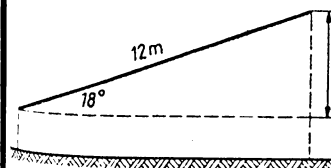
**Zadanie wzorcowe 3.** Dane:  $c$ ,  $\alpha$ ; obliczyć  $a$ .

Rozwiązanie (rys. 94-1). Jest  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ , stąd  $a = c \sin \alpha$ .

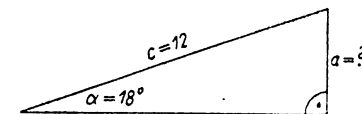
**Przykład liczbowy 4.** Równia pochyła długości 12 m (elewator) jest nachylona do poziomu pod kątem  $18^\circ$ . Obliczyć różnicę wysokości jej końca i początku.

Rozwiązanie. Kreślimy szkic odpowiadający treści zadania (rys. 94-4) oraz trójkąt z oznaczeniami standardowymi, dostosowany do szkicu (rys. 94-5). Jest

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \text{ stąd } a = c \sin \alpha = 12 \cdot 0,3090 = 3,71 \text{ m.}$$



Rys. 94-4

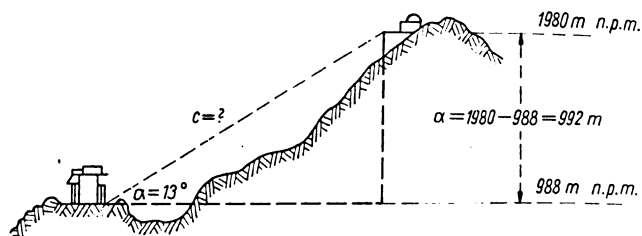


Rys. 94-5

**Zadanie wzorcowe 4.** Dane:  $a$ ,  $\alpha$ ; obliczyć  $c$ .

Rozwiązanie (rys. 94-1). Jest  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ , stąd  $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ .

**Przykład liczbowy 5.** Z Kuźnic (988 m nad poziomem morza) widać schronisko na Kasprowym Wierchu (1980 m n.p.m.) pod kątem wzniesienia czyli *elevacji*  $13^\circ$ . Obliczyć odległość tych punktów w linii powietrznej (rys. 94-6).



Rys. 94-6

Rozwiązanie. Jest  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ , zatem  $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{992}{0,2250}$ . Dla wykonania tego dzielenia zastosujemy logarytmy (tabl. I, str. 259)

$$\begin{array}{rcl} \log 992 & = & 2,9965 \\ -\log 0,2250 & = & -1,3522 \\ \hline \log c & = & 3,6443 \\ c & = & 4409 \text{ m} \end{array}$$

**Logarytmy funkcji trygonometrycznych.** W ostatnim przykładzie dla wyznaczenia odjemnika  $\log \sin 13^\circ = \log 0,2250 = \bar{1},3522$  korzystaliśmy najpierw z tablicy II (odczyt  $\sin 13^\circ = 0,2250$ ), a potem z tablicy I (odczyt  $\log 0,2250 = \bar{1},3522$ ). Był to odczyt pośredni.

Tablica logarytmów funkcji trygonometrycznych (str. 262) umożliwia bezpośredni odczyt wartości logarytmu funkcji trygonometrycznej, gdy kąt jest dany i odwrotnie. Znajdujemy tam bezpośrednio

$$\log \sin 13^\circ = \bar{1},3521$$

Użyteczność takiej tablicy jest oczywista, bowiem logarytmy funkcji trygonometrycznych są w obliczeniach częściej potrzebne niż same funkcje trygonometryczne (te ostatnie, dla odróżnienia, zaopatruje się niekiedy tytułem „*naturalne wartości funkcji trygonometrycznych*”).

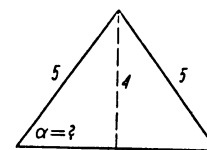
Odczyt bezpośredni może czasem różnić się nieznacznie od odczytu pośredniego. Powyższy przykład został tak dobrany, aby to pokazać: odczyt pośredni  $\bar{1},3522$ , odczyt bezpośredni  $\bar{1},3521$ . Różnica taka zdarza się bardzo rzadko, a pochodzi stąd, że prawie wszystkie pozycje w tych tablicach są wartościami przybliżonymi i przy przechodzeniu przez dwie tablice dokładność odczytu maleje. Odczyt bezpośredni jest zwykle dokładniejszy.

**Zadanie wzorcowe 5.** Dane:  $a$ ,  $c$ ; wyznaczyć  $\alpha$ .

Rozwiązanie (rys. 94-1):  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ .

**Przykład liczbowy 6.** W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 5, a wysokość jest równa 4. Wyznaczyć kąt przy podstawie.

Rozwiązanie (rys. 94-7).  $\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8 = 0,8000$ .



Rys. 94-7

W tablicy II znajdujemy odpowiednie pozycje i układamy proporcję różnic (rys. 94-8)  $(\alpha' - 53^\circ) : (54^\circ - 53^\circ) = (0,8000 - 0,7986) : (0,8090 - 0,7986)$

|        |        |       |      |     |
|--------|--------|-------|------|-----|
| 0,8000 | 0,8090 |       | 54°  | α=? |
|        | 0,7986 |       | 53°  |     |
| cos α  | sin α  | ctg α | tg α | α   |

Rys. 94-8

Różnice kątów wyrażamy w minutach:  $\alpha - 53^\circ = x \text{ min}$ ,  $54^\circ - 53^\circ = 60 \text{ min}$

$$x : 60 = 14 : 104$$

$$x = \frac{60 \cdot 14}{104} = 8 \text{ min}$$

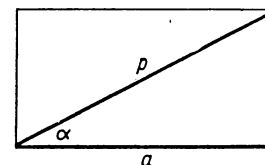
Odp.  $\alpha = 53^\circ 08'$ .

**Zadanie wzorcowe 6.** Dane:  $c$ ,  $\alpha$ ; obliczyć  $b$ .

Rozwiązanie (rys. 94-1). Jest  $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ , zatem  $b = c \cos \alpha$ .

**Przykład liczbowy 7.** Obliczyć długość  $a$  podstawy prostokąta, jeśli przekątna o długości  $p = 5$  tworzy z podstawą kąt  $\alpha = 12^\circ$ .

Rozwiązanie (rys. 94-9). Oznaczenia nie są standardowe. Jest  $\frac{a}{p} = \cos \alpha$ , zatem  $a = p \cos \alpha = 5 \cos 12^\circ = 5 \cdot 0,9781 = 4,8905 = 4,890$  (w wyniku zatrzy-



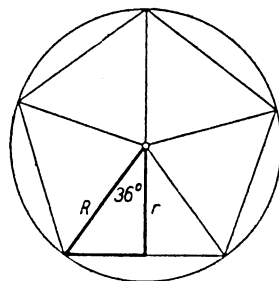
Rys. 94-9

maliśmy tylko 4 cyfry; bowiem korzystając z tablic czterocyfrowych, nie można się spodziewać większej dokładności niż w zakresie 4 cyfr).

**Przykład liczbowy 8.** Obliczyć promień  $R$  koła opisanego na pięciokącie, jeśli promień  $r$  koła wpisanego jest dany. Wykonać obliczenie dla  $r = 3$ .

**Rozwiązanie** (rys. 94-10). Jest  $\frac{r}{R} = \cos 36^\circ$ , stąd  $R = \frac{r}{\cos 36^\circ} = \frac{3}{\cos 36^\circ}$ ,  
 $\log R = \log 3 - \log \cos 36^\circ$

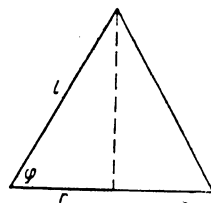
$$\begin{array}{rcl} \log 3 & = & 0,4771 \\ -\log \cos 36^\circ & = & -1,9080 \\ \hline \log R & = & 0,5691 \end{array} \quad R = 3,708$$



Rys. 94-10

**Przykład liczbowy 9.** W stożku zmierzono tworzącą  $l = 3,8$  cm i średnicę  $2r = 4,2$  cm. Obliczyć kąt  $\varphi$  nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

**Rozwiązanie** (rys. 94-11). W osiowym przekroju stożka dostrzegamy trójkąt prostokątny, w którym  $\cos \varphi = \frac{r}{l} = \frac{2,1}{3,8}$ ,  $\log \cos \varphi = \log r - \log l = \log 2,1 - \log 3,8 = 0,3222 - 0,5798 = -1,7424$ ,  $\varphi = 56^\circ 28'$ .



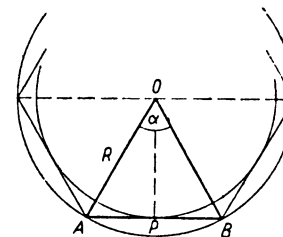
Rys. 94-11

**Przykład liczbowy 10.** Obliczyć promień  $r$  okręgu wpisanego i promień  $R$  okręgu opisanego na wielokącie foremnym mającym  $n$  boków, jeśli bok  $a$  wielokąta jest dany.

**Rozwiązanie** (rys. 94-12). W trójkącie  $OAB$  jest  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ ,  $OA = R$ ,  
 $OP = r$ ,  $AB = a$ . W trójkącie  $OAP$  jest

$$\frac{a}{2} : R = \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{zatem} \quad R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$r : \frac{a}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{zatem} \quad r = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$



Rys. 94-12

Jeśli z trzech wielkości:  $R$ ,  $r$ ,  $a$  znamy jedną, to pozostałe dwie możemy wyznaczyć z powyższych związków z dokładnością zależną od posiadanych tablic trygonometrycznych.

### Zadania

- Obliczyć długość cięciwy odpowiadającej w okręgu o średnicy  $2r = 10$  kątowi środkowemu  $160^\circ$ .
- W półkole o średnicy równej 5 wpisano trójkąt w taki sposób, że wierzchołek leży na półokręgu, podstawą jest średnica a wysokość jest równa 2. Wyznaczyć kąty tego trójkąta. Wskazówka: Tw. 88.6.
- Obliczyć średnicę okręgu wpisanego w romb o boku równym  $a$  i kącie ostrym  $\alpha$ .
- Obliczyć promień okręgu wpisanego w deltoid o bokach dłuższych równych  $a$ , bokach krótszych równych  $b$  i kącie między bokami dłuższymi równym  $2\alpha$ . Wskazówka: Tw. 89.1, p. 14 i 17.
- W trójkącie równobocznym podzielano jeden bok na trzy równe części i punkty podziału połączono odcinkami z przeciwległym wierzchołkiem, dzieląc kąt u tego wierzchołka na trzy kąty. Wyznaczyć te kąty.
- Pole trójkąta prostokątnego o kącie ostrym  $\alpha$  jest równe  $S$ . Obliczyć promień koła opisanego na tym trójkącie.

### 95. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

**Trzy podstawowe tożsamości. Twierdzenie 95.1.** Między funkcjami trygonometrycznymi kąta  $\alpha$  zachodzą związki

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (95.1)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \quad (95.2) \quad (95.3)$$

Wzór (95.1) bywa nazywany „wzorem jednostkowym”, „jednością trygonometryczną” lub „trygonometrycznym twierdzeniem Pitagorasa”.

Ponadto mamy tożsamość

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (95.4)$$

którą wyprowadziliśmy wprost z definicji (zob. (92.2))

**Dowód równości (95.1).** W trójkącie prostokątnym zawierającym kąt  $\alpha$  przy oznaczeniach standardowych (rys. 94-1) mamy związki

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha \quad (95.5)$$

Według twierdzenia Pitagorasa jest

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dzieląc obie strony przez  $c^2$ , dostajemy

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

skąd, po podstawieniu  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ ,  $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ , dostajemy (95.1).

**Dowód równości (95.2)**

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

**Dowód równości (95.3)** analogiczny.

**Obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy wartość jednej z nich jest dana**

**Zadanie wzorcowe 1.** Uważając wartość  $\sin \alpha$  za wiadomą, wyrazić przez nią wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego  $\alpha$ .

**Rozwiązanie.** Wartość  $\cos \alpha$  wyznaczmy ze wzoru jednostkowego

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Cosinus dowolnego kąta ostrego jest dodatni, więc

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \quad (95.6)$$

Teraz, korzystając z tego wzoru oraz z (95.2), otrzymamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \quad (95.7)$$

Wreszcie, korzystając z (95.4), dostajemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \quad (95.8)$$

**Przykład liczbowy 1.** Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , jeśli  $\sin \alpha = 0,6$ .

**Rozwiązanie.** Korzystając z (95.6), dostajemy  $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$ . Teraz, znając sinus i cosinus, ze wzorów (95.2) i (95.3) dostajemy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3} = 1,3333$ .

**Zadanie wzorcowe 2.** Uważając wartość  $\operatorname{tg} \alpha$  za wiadomą, wyrazić przez nią wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego.

**Rozwiązanie.** Przepiszmy tożsamości (95.1) i (95.2), oznaczając znaną wartość  $\operatorname{tg} \alpha$  literą  $m$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = m$$

Związki te możemy uważać za dwa równania o dwóch niewiadomych:  $\cos \alpha$  i  $\sin \alpha$ . Wyliczając z drugiego równania

$$\sin \alpha = m \cos \alpha \quad (95.9)$$

i wstawiając do pierwszego, dostajemy

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha &= 1 \\ (1 + m^2) \cos^2 \alpha &= 1 \end{aligned}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + m^2}, \text{ stąd } \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + m^2}}$$

Ponieważ funkcje trygonometryczne przyjmują dla kątów ostrych wyłącznie dodatnie wartości, więc należy wziąć znak  $+$  i uwzględniając to, że  $m = \operatorname{tg} \alpha$ , mamy

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \quad (95.10)$$

Teraz ze związku (95.9) dostajemy

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}) \quad (95.11)$$

Cotangens obliczamy ze związku (95.4).

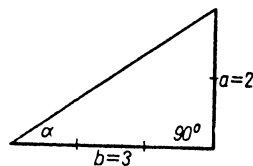
**Przykład liczbowy 2.** Obliczyć  $\sin \alpha$ , jeśli  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$  i kąt  $\alpha$  jest ostry.

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

**Konstrukcja kąta ostrego, którego tangens jest dany**

**Przykład.** Nakreślić kąt ostry, którego tangens jest równy  $\frac{2}{3}$ .

**Rozwiązanie.** Należy nakreślić trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne tworzą stosunek 2:3. Można obrać przyprostokątne  $a = 2$ ,  $b = 3$  (rys. 95-1). Szukany kąt leży naprzeciw boku o długości 2.



Rys. 95-1

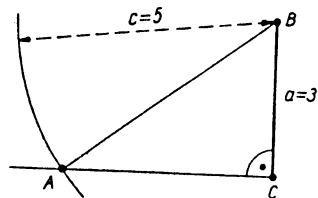
**Uwaga** (o kojarzeniu obliczeń z konstrukcją). Powyższa konstrukcja wskazuje prosty sposób rozwiązania poprzedniego przykładu liczbowego. Mianowicie obliczamy przeciwprostokątną  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ , a znając wszystkie trzy boki trójkąta, dajemy od razu odpowiedź

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{2}$$

**Konstrukcja kąta ostrego, którego sinus jest dany**

**Przykład.** Wykreślić kąt ostry  $\alpha$ , dla którego jest  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

**Rozwiązanie.** Należy nakreślić trójkąt prostokątny, w którym stosunek przyprostokątnej do przeciwprostokątnej jest równy 3:5. Można przyjąć  $a = 3$ ,  $c = 5$ . Kreślimy kąt prosty o wierzchołku  $C$  (rys. 95-2), na jednym ramieniu odkładamy  $a = CB = 3$  i z punktu  $B$  kreślimy okrąg o promieniu  $c = 5$ . Okrąg ten przecina drugie ramie kąta prostego, wyznaczając wierzchołek  $A$  szukanego kąta.



Rys. 95-2

**Zadanie 1.** Uważając wartość  $\cos \alpha$  za wiadomą, wyrazić przez nią wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego  $\alpha$ .

**Zadanie 2.** Skonstruować kąt ostry  $\alpha$ , którego cosinus jest równy  $\frac{5}{6}$ . Otrzymany kąt zmierzyć kątomierzem i wynik pomiaru porównać z odpowiednią wartością kąta odczytaną z tablicy.

**Zadanie 3.** O kącie  $\alpha$  wiadomo, że jest ostry i że  $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ . Nakreślić ten kąt. Wyznaczyć jego miarę stopniową z tablicy na podstawie danej wartości cotangensa.

## 96. Wyznaczenie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ i $72^\circ$

Kąty  $30^\circ$  i  $60^\circ$  znajdują się w trójkącie prostokątnym  $ADB$  otrzymanym w wyniku przepołowienia trójkąta równobocznego symetralną boku (rys. 96-1). Jest  $AD = \frac{a}{2}$ ,  $AB = a$ ,  $BD = h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$  (zob. wzór 87.8). Stąd

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

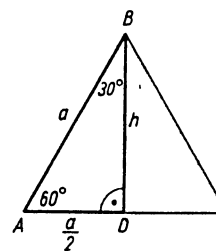
$$\cos 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

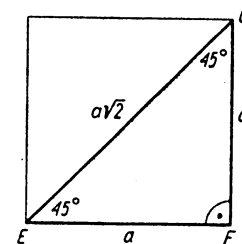
$$\sin 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Rys. 96-1



Rys. 96-2

Kąt  $45^\circ$  występuje w trójkącie otrzymanym przez przepołowienie kwadratu przekątną (rys. 96-2). Przekątna kwadratu o boku  $a$  ma długość  $a\sqrt{2}$  (zob. wzór 87.7), zatem

$$\sin 45^\circ = \frac{EF}{EG} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{EF}{EG} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{EF}{EG} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{EF}{EG} = \frac{a}{a} = 1$$

Otrzymane wyniki przedstawia tablica 96-1.

Czytelnik powinien znać na pamięć tę tablicę. Warto zauważyć, że na podstawie pierwszego jej wiersza można łatwo odtworzyć pozostałe wiersze, mianowicie drugi wiersz zawiera wyrazy pierwszego wiersza ustawione w odwrotnej kolejności, trzeci wiersz wynika z dzielenia wyrazów pierwszego wiersza przez wyrazy drugiego wiersza, a czwarty wiersz zawiera odwrotności wyrazów trzeciego wiersza.

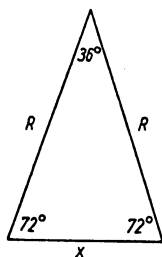
Tablica 96-1

| $\alpha$                    | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$               | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

**Kąt  $72^\circ$ .** W trójkącie równoramiennym o kątach  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  i  $72^\circ$  (rys. 96-3) mamy  $\cos 72^\circ = \frac{x}{2} : R$ . Korzystając ze wzoru (87.19) dostajemy

$$\cos 72^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) \quad (96.1)$$

**Zadanie 1.** Znając wartość  $\cos 72^\circ$ , obliczyć  $\sin 72^\circ$  i  $\operatorname{tg} 72^\circ$ .

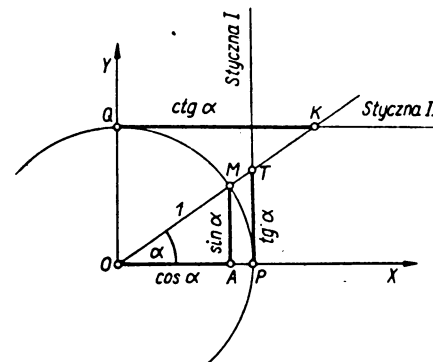


Rys. 96-3

## 97. Koło trygonometryczne. Przebieg funkcji trygonometrycznych w zakresie kątów ostrych

**Koło trygonometryczne.** Wartości funkcji trygonometrycznych przedstawiamy w tzw. kole trygonometrycznym (rys. 97-1), które konstruuje się następująco. Kreślimy okrąg o promieniu  $r = 1$  i z jego środka  $O$  prowadzimy dwie półproste

$OX$  i  $OY$ , wzajemnie prostopadłe. Punkty przecięcia półprostych z okręgiem oznaczamy  $P$ ,  $Q$  i kreślimy w tych punktach dwie styczne do okręgu: styczną I przez punkt  $P$  i styczną II przez punkt  $Q$ .



Rys. 97-1

Jeśli  $\alpha$  jest dowolnym kątem ostrym, to odkładamy ten kąt od półprostej  $OX$  tak, aby obszar tego kąta zawierał się w obszarze kąta prostego  $\angle XOY$ . Wówczas drugie ramię kąta przecina okrąg, styczną I i styczną II w punktach, które oznaczamy  $M$ ,  $T$  i  $K$ . Rzut prostokątny punktu  $M$  na  $OX$  oznaczamy literą  $A$ . Przy tych oznaczeniach i przy założeniu  $r = 1$  wartości funkcji trygonometrycznych równają się długościom następujących odcinków:  $\sin \alpha = AM$ ,  $\cos \alpha = OA$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = PT$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = QK$ ,  $\sec \alpha = OT$ ,  $\operatorname{cosec} \alpha = OK$ .

**Przebieg funkcji trygonometrycznych w zakresie kątów ostrych.** Z koła trygonometrycznego łatwo odczytać, że jeśli kąt  $\alpha$  rośnie od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ , to:

- $\sin \alpha$  rośnie od 0 do 1;
- $\cos \alpha$  maleje od 1 do 0;
- $\operatorname{tg} \alpha$  rośnie od 0 do  $+\infty$ ;
- $\operatorname{ctg} \alpha$  maleje od  $+\infty$  do 0.

W zakresie kątów od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  sinus i tangens są funkcjami *rosnącymi*, zaś cosinus i cotangens — funkcjami *malejącymi*. Sinus i cosinus są funkcjami ograniczonymi (nie przybierają wartości większych od 1), zaś tangens i cotangens są funkcjami nieograniczonymi (przybierają wartości dowolnie duże).

## Pytania i zadania

- Nakreślić trójkąt prostokątny i wprowadzić w nim oznaczenia standardowe. Napisać definicje czterech funkcji trygonometrycznych obydwu kątów ostrych. Porównać z rys. 92-7 i wzorami (92.3).
- Wypełnić poniższą tabelkę, w której  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  są elementami trójkąta prostokątnego przy oznaczeniach standardowych

| $a$ | $b$ | $c$ | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\sin \beta$ | $\cos \beta$ | $\operatorname{tg} \beta$ | $\operatorname{ctg} \beta$ |
|-----|-----|-----|---------------|---------------|----------------------------|-----------------------------|--------------|--------------|---------------------------|----------------------------|
| 4   | 3   |     |               |               |                            |                             |              |              |                           |                            |
| 8   | 6   |     |               |               |                            |                             |              |              |                           |                            |
| 0,8 |     | 1   |               |               |                            |                             |              |              |                           |                            |
|     | 12  | 13  |               |               |                            |                             |              |              |                           |                            |

3. W trójkącie  $ABC$  kąt przy  $A$  jest prosty, kąt przy  $B$  oznaczamy  $\beta$ , zaś  $D$  jest rzutem  $A$  na  $BC$ . Jakim funkcjom kąta  $\beta$  równają się następujące stosunki:

$$\frac{AD}{AB}, \frac{AD}{DB}, \frac{AB}{BC}, \frac{AC}{BC}, \frac{AC}{AB}, \frac{AB}{AD}, \frac{AB}{BD}, \frac{BD}{DA}$$

$$\frac{AD}{DC}, \frac{AD}{AC}, \frac{DC}{AD}, \frac{DC}{BD} \left( = \frac{DC}{AD} \cdot \frac{AD}{BD} \right), \frac{BD}{BC}, \frac{AD}{BC}$$

4. Dlaczego wartość funkcji trygonometrycznej danego kąta ostrego nie zależy od rozmiarów trójkąta prostokątnego, zawierającego dany kąt ostry, a tylko od wielkości tego kąta?
5. W trójkącie równobocznym i w kwadracie można znaleźć odcinki, których stosunki są wartościami funkcji trygonometrycznych kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ , i  $60^\circ$ . Wskazać te odcinki, ułożyć odpowiednie stosunki i obliczyć ich wartości. Porównać odpowiedź z tabelą 96-1.
6. Wiedząc, że  $\log 2 = 0,3010$ , a  $\log 3 = 0,4771$ , wyznaczyć logarytmy funkcji trygonometrycznych kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$ . Sprawdzić wyniki w tabeli III.
7. Jakie kąty nazywamy dopełniającymi? Wyznaczyć kąty dopełniające dla kątów  $38^\circ$ ,  $83^\circ$ ,  $30'$ ,  $89^\circ 50'$ .
8. Przedstawić:  $\sin 81^\circ$ ,  $\cos 50^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 72^\circ$  i  $\operatorname{ctg} 46^\circ$  w postaci wartości funkcji trygonometrycznych kątów mniejszych od  $45^\circ$ .
9. Wyznaczyć bez pomocy tablic:  $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$ ,  $\operatorname{tg} 62^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 62^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 62^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 28^\circ$ .
10. Wyznaczyć kąty dopełniające dla kątów:  $\alpha + 45^\circ$ ,  $60^\circ - \alpha$ ,  $\alpha - \beta$ .
11. Co oznacza termin „kofunkcja”?
12. Przedstawić w postaci wartości kofunkcji kąta dopełniającego:  
 $\cos(45^\circ - \alpha)$ ,  $\sin(30^\circ + \alpha)$ ,  $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)$
13. Co to znaczy, że funkcja sinus jest rosnąca w I ćwiartce?
14. Co to znaczy, że funkcja cosinus jest malejąca w I ćwiartce?
15. Które funkcje trygonometryczne są w I ćwiartce rosnące, a które malejące?
16. Jaką nierówność spełnia kąt ostry  $\alpha$ , jeśli wiadomo, że:  
 a)  $\sin \alpha < 0,5$     b)  $\sin \alpha > 0,5$     c)  $\cos \alpha < 0,5$     d)  $\cos \alpha > 0,5$   
 e)  $\operatorname{tg} \alpha < 1$     f)  $\operatorname{ctg} \alpha < 1$     g)  $\operatorname{tg} \alpha > 1$     h)  $\operatorname{ctg} \alpha > 1$
17. Bez pomocy tablic określić znak następujących różnic:

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ - \sin 40^\circ, \quad \cos 70^\circ - \cos 60^\circ, \quad \operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ; \\ \operatorname{ctg} 40^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ, \quad \operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ, \quad \operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ, \\ \sin 10^\circ - \cos 80^\circ, \quad \sin 10^\circ - \cos 85^\circ, \quad \operatorname{tg} 50^\circ - \sin 50^\circ. \end{aligned}$$

18. Na czym polega interpolacja liniowa?
19. Kiedy poprawka jest dodatnia, a kiedy ujemna?
20. Co to znaczy, że funkcja jest ograniczona?
21. Które funkcje trygonometryczne są ograniczone?
22. Nakreślić kąt, którego tangens równa się 1,5.
23. Czy można nakreślić kąt, którego cosinus równa się 1,5? Czy istnieje taki kąt?
24. Największy dopuszczalny spadek toru kolejowego jest: 10 m w pionie na 1 km w poziomie. Wyznaczyć kąt odpowiadający takiemu spadkowi.
25. Wymienić trzy podstawowe związki między czterema funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego.
26. Jak wyznacza się wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, jeśli jest znana wartość jednej z tych funkcji?

#### Odpowiedzi do rozdziału XIV

92

$$1. \frac{p}{2R}, \frac{q}{2R}, \frac{p}{q}, \frac{q}{p}. \quad 2. \frac{a}{2b}, \frac{h}{b}, \frac{a}{2h}, \frac{2h}{a}.$$

93

$$1. 0,2756 \quad 0,9613 \quad 0,9336 \quad 0,2756 \quad 0,1763 \quad 2,7475 \quad 2,7475 \quad 0,4452.$$

94

$$1. 9,848 \quad 2. 90^\circ, 63^\circ 26', 26^\circ 34'. \quad 3. a \sin \alpha. \quad 4. \frac{a \sin \alpha}{a+b} [\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha} + a \cos \alpha].$$

$$5. 19^\circ 07', 21^\circ 46', 19^\circ 07'. \quad 6. \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \cos \alpha}}.$$

95

$$1. \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

2. Kreślimy odcinek  $AC = b = 5$ . W punkcie  $C$  wystawiamy prostopadłą, z punktu  $A$  zakreślamy okrąg promieniem równym 6. W przecięciu otrzymujemy punkt  $B$ . Mierzając kątomierzem kąt  $CAB$  znajdujemy w przybliżeniu  $33^\circ$ . Aby wyznaczyć ten kąt z tablic, przedstawiamy daną wartość cosinusa w postaci ułamka dziesiętnego  $\cos \alpha = \frac{5}{6} = 0,8333$ . W tablicy znajdujemy dwie pozycje: 0,8387 i 0,8290. Bierzemy mniejszą z nich, jako podstawę odczytu. Odpowiada jej wartość  $34^\circ$ . Z proporcji różnic

$$\frac{(\alpha - 34^\circ) : (33^\circ - 34^\circ)}{x} = (8333 - 8290) : (8387 - 8290)$$

otrzymujemy  $x = -26$ . Zatem  $\alpha = 34^\circ + x = 34^\circ - 26' = 33^\circ 34'$ .  
3.  $\alpha = 26^\circ 35'$ .

96

$$1. \sin 72^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg} 72^\circ = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

97

|    | a   | b   | c  | sin $\alpha$   | cos $\alpha$    | tg $\alpha$    | ctg $\alpha$   | sin $\beta$     | cos $\beta$    | tg $\beta$     | ctg $\beta$    |
|----|-----|-----|----|----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| 2. | 4   | 3   | 5  | 0,8            | 0,6             | 1,33           | 0,75           | 0,6             | 0,8            | 0,75           | 1,33           |
|    | 8   | 6   | 10 | 0,8            | 0,6             | 1,33           | 0,75           | 0,6             | 0,8            | 0,75           | 1,33           |
|    | 0,8 | 0,6 | 1  | 0,8            | 0,6             | 1,33           | 0,75           | 0,6             | 0,8            | 0,75           | 1,33           |
|    | 5   | 12  | 13 | $\frac{5}{13}$ | $\frac{12}{13}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{12}{5}$ | $\frac{12}{13}$ | $\frac{5}{13}$ | $\frac{12}{5}$ | $\frac{5}{12}$ |

3.  $\sin \beta, \operatorname{tg} \beta, \cos \beta, \sin \beta, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{cosec} \beta, \sec \beta, \operatorname{ctg} \beta, \operatorname{ctg} \beta, \cos \beta, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg}^2 \beta, \cos^2 \beta, \sin \beta \cos \beta$ .  
4. Trójkąty prostokątne, zawierające dany kąt ostry, są podobne. W trójkątach podobnych stosunki odpowiednich boków są równe.  
7.  $52^\circ, 7^\circ, 89^\circ 30', 10'$ .  
8.  $\cos 9^\circ, \sin 40^\circ, \operatorname{ctg} 18^\circ, \operatorname{tg} 44^\circ$ .  
9. 1, 1, 1.  
10.  $45^\circ - \alpha, 30^\circ + \alpha, 90^\circ - \alpha + \beta$ .  
12.  $\sin(45^\circ + \alpha), \cos(60^\circ - \alpha), \operatorname{ctg}(30^\circ - \alpha)$ .  
13-15. W zakresie kątów od  $0^\circ$  do  $90^\circ$

sinus i tangens są rosnące

tzn. przy zwiększaniu kąta od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  funkcje te przybierają coraz większe wartości, natomiast

cosinus i cotangens są malejące

tzn. przy zwiększaniu kąta od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  funkcje te przybierają coraz mniejsze wartości. Dla przykładu w tablicy II znajdujemy

| Kąt        | sin    | cos    | tg     | ctg    |
|------------|--------|--------|--------|--------|
| $26^\circ$ | 0,4384 | 0,8988 | 0,4877 | 2,0503 |
| $27^\circ$ | 0,4540 | 0,8910 | 0,5095 | 1,9626 |
| wzrost     | wzrost | spadek | wzrost | spadek |

Zauważmy, że w zakresie  $0^\circ - 90^\circ$  malejące są funkcje, których nazwy zaczynają się od przedrostka „co” (czytaj: ko), pozostałe są rosnące.

16. a)  $\alpha < 30^\circ$ , b)  $\alpha > 30^\circ$ , c)  $\alpha > 60^\circ$ , d)  $\alpha < 60^\circ$ ,  
e)  $\alpha < 45^\circ$ , f)  $\alpha > 45^\circ$ , g)  $\alpha > 45^\circ$ , h)  $\alpha < 45^\circ$ .  
17. +, -, +, -, 0, -, 0, +, +.

19. Przy interpolacji istotne jest rozeznanie, czy dana funkcja jest rosnąca czy malejąca. Za podstawę odczytu przyjmujemy z reguły mniejszą z dwóch wartości tabelowych, między którymi zawiera się dana wartość zadaniowa. Wykonujemy odczyt odpowiadający tej mniejszej wartości tabelowej i z proporcji różnic obliczamy poprawkę. W przypadku sinusa i tangensa poprawka jest dodatnia, zaś w przypadku cosinusa i cotangensa poprawka jest ujemna.

23. Nie, taki kąt nie istnieje. 24.  $\operatorname{tg} \alpha = 0,01$ ;  $\alpha \approx 35'$ .

## Rozdział XV

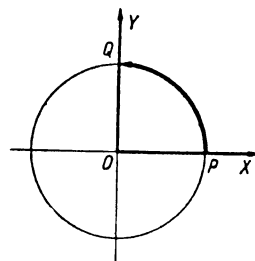
# FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA SKIEROWANEGO

### 98. Kąt skierowany na płaszczyźnie zorientowanej

**Układy prawoskrętne i układy lewoskrętne.** Zorientowanie płaszczyzny (str. 80) polega na ustaleniu dodatniego obiegu dla wszystkich okręgów tej płaszczyzny. Każda płaszczyzna może być zorientowana na dwa, wzajemnie przeciwne, sposoby. Inaczej mówiąc: Istnieją dwie, wzajemnie przeciwne, orientacje płaszczyzny.

Wyróżnienie jednej z tych orientacji za pomocą środków czysto matematycznych nie jest możliwe, lecz wymaga odwołania się do jakiegoś wzorca konkretnego (poza matematycznego). Wzorcem takim, związanym z układem Ziemia-Słońce, dla naszych szerokości geograficznych, może być ruch cienia na płaszczyźnie zegara słonecznego. Innym wzorcem może być ruch wskazówek zegara przyłożonego do płaszczyzny rysunku tak, aby tarcza była zwrócona w stronę patrzącego na rysunek; wówczas o jednej orientacji płaszczyzny można powiedzieć, że jest zgodna z obiegiem wskazówek, a o drugiej, że jest przeciwna do obiegu wskazówek zegara.

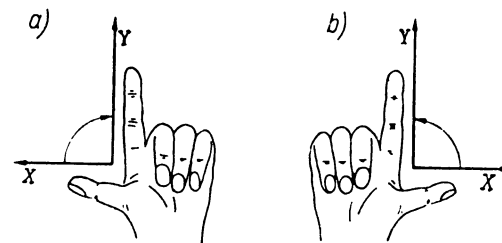
Orientację płaszczyzny można też określić przez wybór układu współrzędnych prostokątnych na tej płaszczyźnie. Niech  $OXY$  będzie obranym przez nas układem prostokątnym (rys. 98-1) i rozważmy okrąg  $c$  o środku  $O$  oraz łuk skierowany  $PQ$



Rys. 98-1

tego okręgu odpowiadający kątowi prostemu  $POQ$ , przy czym niech  $P$  leży na dodatniej półosi pierwszej, a  $Q$  — na dodatniej półosi drugiej tego układu. Przyjmujemy umowę, że ten obieg okręgu  $c$  jest dodatni, w którym łuk  $PQ$  ma zwrot dodatni. W ten sposób można nadać okręgowi  $c$  obieg dostosowany do danego układu prostokątnego. Jak wiemy, wybór dodatniego obiegu na jednym okręgu wyznacza orientację dla całej płaszczyzny, a więc zorientowanie płaszczyzny sprowadza się do wyboru układu prostokątnego na tej płaszczyźnie. Płaszczyznę, którą zorientowano przez wybranie na niej prostokątnego układu współrzędnych  $OXY$ , będziemy nazywać krótko: płaszczyzną  $OXY$ .

Każde dwa układy prostokątne na danej płaszczyźnie są wzajemnie przystające. Jeśli przystawianie układów prostokątnych  $OXY$  i  $O'X'Y'$  będziemy rozumieć w ten sposób, że w przystawianiu tym mają przystawać: półos dodatnia  $OX$  do półosi dodatniej  $O'X'$  oraz półos dodatnia  $OY$  do półosi dodatniej  $O'Y'$ , to układy te mogą być przystające albo wprost albo odwrotnie. Na rys. 98-2 pokazano dwa układy przystające odwrotnie.



Rys. 98-2. Układy prostokątne na płaszczyźnie: a) układ lewoskrętny, b) układ prawoskrętny. Łuk ze strzałką wskazuje orientację płaszczyzny zgodną z danym układem

Wszystkie układy prostokątne na danej płaszczyźnie dzielą się na dwie klasy takie, że:

- dwa układy należące do tej samej klasy są przystające wprost,
- dwa układy należące do różnych klas są przystające odwrotnie.

Jednakowoż, w ramach matematyki nie ma sposobu wyróżnienia jednej z tych dwóch klas układów. I znów trzeba odwołać się do konkretnego wzorca poza matematycznego, np. do kształtu dłoni ludzkiej, przyłożonej grzbietem do płaszczyzny rysunku. Wtedy można umówić się, który układ nazwiemy prawoskrętnym, a który — lewoskrętnym.

**Umowa.** W dalszym ciągu będziemy posługiwać się układem prawoskrętnym, tj. takim jak na rys. 98-2b. Z umowy tej wynika, że obieramy orientację płaszczyzny przeciwną do obiegu wskazówek zegara.

**Miara stopniowa kąta skierowanego.** Z definicji 82.2 wynika, że każdy kąt skierowany, niezerowy i niepełny, położony na płaszczyźnie zorientowanej ma jednoznacznie określoną rozwartość i zwrot. Rozwartość wyrażona w stopniach jest liczbą należącą do przedziału  $\langle 0; 180 \rangle$ . Kąt zerowy ma rozwartość  $0^\circ$ , kąt

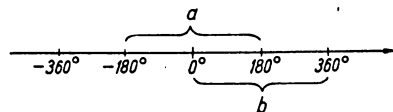
półpełny ma rozwartość  $180^\circ$ . Zwrot kąta skierowanego wyraża się znakiem „plus” albo „minus”. Kat zerowy i kąt półpełny nie mają zwrotów. Rozwartość i zwrot pozwalają określić miarę kąta skierowanego.

**Definicja 98.1** (miary głównej kąta). *Miarą główną kąta skierowanego, niezerowego, i niepółpełnego, nazywamy rozwartość tego kąta wziętą ze znakiem „plus”, gdy zwrot kąta jest dodatni, względnie ze znakiem „minus”, gdy zwrot kąta jest ujemny.*

*Miarą główną kąta skierowanego zerowego nazywamy liczbę 0.*

*Miarą główną kąta skierowanego półpełnego nazywamy rozwartość tego kąta wziętą ze znakiem „plus”.*

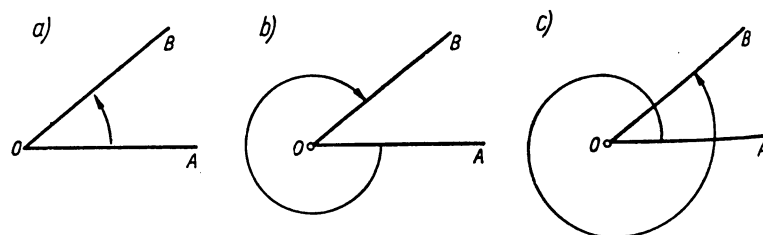
Każdy kąt skierowany ma jednoznacznie określoną miarę główną, która wyrażona w stopniach jest liczbą należącą do przedziału  $(-180; 180)$ . Oczywiście, można też określić miarę główną kąta tak, aby była liczbą zawartą w przedziale  $(0; 360)$  (rys. 98-3). Każdy z tych sposobów ma swe zalety. Jednakowoż, w zbiorze



Rys. 98-3. Zbiór wartości miary głównej kąta skierowanego: a) według definicji 98.2, b) według książki Straszewicza, Matematyka dla kl. III li. og.

kątów skierowanych nie można zdefiniować miary jednoznacznej tak, żeby miara sumy kątów była równa sumie ich miar. Jeśli bowiem miarą kąta skierowanego prostego jest jakaś liczba  $\omega \neq 0$ , to ponieważ suma czterech takich kątów i tak samo suma ośmiu takich kątów są kątami zerowymi, więc musiałaby zachodzić równość  $4\omega = 8\omega$  sprzeczna z założeniem  $\omega \neq 0$ .

Dlatego oprócz miary głównej kąta wprowadza się pojęcie miary wieloznacznej kąta. Miara główna kąta jest odzwierciedleniem obrotu rozumianego jako przekształcenie geometryczne, natomiast miara wieloznaczna kąta jest odzwierciedleniem obrotu rozumianego jako zjawisko fizyczne (str. 79). Jak wiemy z fizyki, to samo przemieszczenie może być wynikiem różnych ruchów (rys. 98-4).



Rys. 98-4. Różne obroty odpowiadające temu samemu kątowi skierowanemu  $AOB$ : a)  $40^\circ$ , b)  $-320^\circ$ , c)  $400^\circ$

**Definicja 98.2** (miary wieloznacznej kąta). *Miarą kąta skierowanego na płaszczyźnie nie zorientowanej nazywamy każdą z liczb, które otrzymamy dodając do miary głównej tego kąta jakąkolwiek całkowitą wielokrotność miary kąta pełnego.*

Jeśli  $\alpha_0$  jest miarą główną pewnego kąta skierowanego, wyrażoną w stopniach, to stopniowa miara (wieloznaczna) tego kąta wyraża się wzorem

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360 \quad (k - \text{dowolna liczba całkowita})$$

Każdy kąt skierowany na płaszczyźnie zorientowanej ma nieskończenie wiele miar; są wśród nich dodatnie i ujemne, a każde dwie z nich różnią się o pewną wielokrotność miary kąta pełnego. Jedną z miar kąta zerowego jest równa 0. O mierze głównej dowolnego kąta niepółpełnego można powiedzieć, że jest to ta z miar danego kąta, która ma najmniejszą wartość bezwzględną.

Jeśli jest dana jedna z miar stopniowych pewnego kąta skierowanego, to wszystkie pozostałe miary stopniowe tego kąta otrzymamy, dodając do danej miary dowolne całkowite wielokrotności liczby 360. Naodwrot, odejmując od danej miary stopniowej kąta pewną całkowitą wielokrotność liczby 360, otrzymamy główną miarę stopniową tego kąta.

**Przykład.** Wyznaczyć główną miarę stopniową  $\alpha_0$  kąta, jeśli jedna z miar stopniowych tego kąta równa się: a) 1000; b)  $-1000$ .

Rozwiązanie: a)  $1000 = 360 + 360 + 360 - 80$ ,  $\alpha_0 = -80$ ;

b)  $-1000 = -360 - 360 - 360 + 80$ ,  $\alpha_0 = 80$ .

**Umowa.** Jeśli kąt skierowany oznaczono symbolem  $\vec{\alpha}$ , to miarę tego kąta oznaczamy literą  $\alpha$ . Ponieważ znajomość miary kąta skierowanego pozwala wyznaczyć ten kąt (jako swobodny kąt skierowany na danej płaszczyźnie zorientowanej), więc dla uproszczenia licznych wzorów trygonometrii zamiast pisać „kąt skierowany  $\vec{\alpha}$ , którego miarą jest  $\alpha$ ” będziemy pisać krótko

kąt  $\alpha$

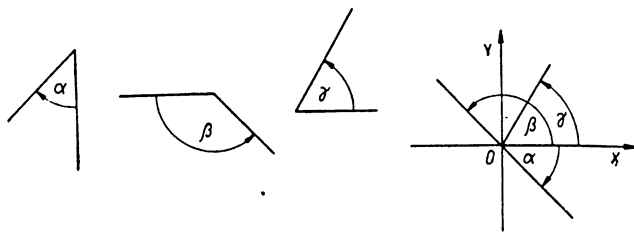
Zamiast mówić „kąt skierowany, który wśród swych miar stopniowych ma miarę równą  $\alpha$ ” powiemy krótko

kąt  $\alpha$  stopni

Aby wyznaczyć dany kąt skierowany swobodny nie ma potrzeby podawania wszystkich miar tego kąta, lecz wystarczy podać jedną z nich. Powiedzenie, „kąt  $40^\circ$ ” określa na danej płaszczyźnie zorientowanej dokładnie ten sam swobodny kąt skierowany, co każde z powiedzeń: „kąt  $400^\circ$ ”, „kąt  $760^\circ$ ”, „kąt  $-320^\circ$ ” i „kąt  $40^\circ + k \cdot 360^\circ$ ”, gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą”.

Powiedzenie „Kąt  $\alpha$  rośnie od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ ” będzie mieć następujący sens: Kąt  $\alpha$  zmienia się w ten sposób, że jedna z jego miar stopniowych rośnie w sposób ciągły od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ .

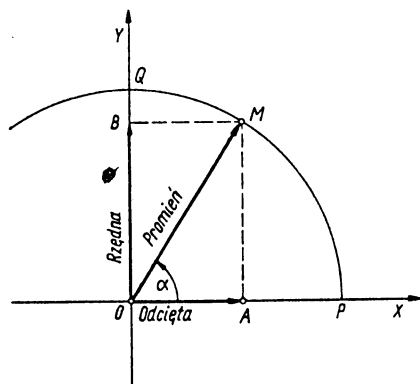
**Standardowe położenie kąta.** Jeśli kąt skierowany jest położony na płaszczyźnie  $OXY$  w ten sposób, że jego wierzchołek leży w początku układu, a ramię początkowe pokrywa się z dodatnią półosią  $OX$ , to mówimy, że kąt ten jest w położeniu standardowym względem układu  $OXY$  (rys. 98-5). Kąty, które mają miary stopniowe należące do przedziałów  $(0; 90)$ ,  $(90; 180)$ ,  $(180; 270)$ ,  $(270; 360)$  nazywamy odpowiednio kątami I, II, III, IV ćwiartki.



Rys. 98-5. Kąty skierowane w położeniu dowolnym i w położeniu standardowym

**Wektor wodzący i jego współrzędne.** Rozważmy na płaszczyźnie  $OXY$  wektor  $\vec{r} = \overline{OM}$

Wektor ten nazywamy *wektorem wodzącym* punktu  $M$ , a jego długość  $r$  *promieniem wodzącym* punktu  $M$ . Załóżmy, że  $r = \text{const} > 0$ ; wówczas  $M$  leży na okręgu  $o(O, r)$ . Niech  $\alpha$  będzie miarą kąta skierowanego  $\sphericalangle XOM$  utworzonego przez dodatnią półoś  $OX$  i wektor  $\overline{OM}$  (rys. 98-6). Rzutując wektor  $\overline{OM}$  na osie układu,



Rys. 98-6

otrzymujemy dwa wektory  $\overline{OA}$  i  $\overline{OB}$ , składowe wektora  $\overline{OM}$ . Miary względne tych wektorów, brane względem osi, na której każdy z tych wektorów leży, oznaczamy literami  $x$  i  $y$

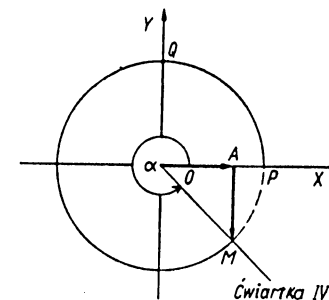
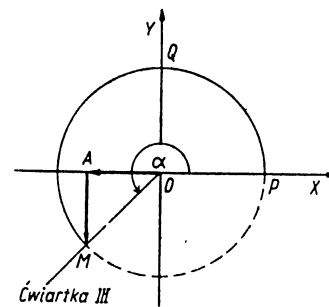
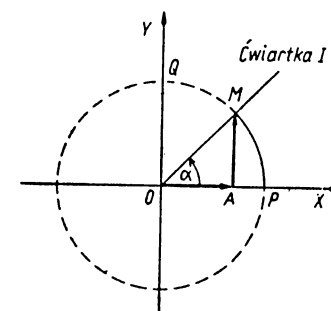
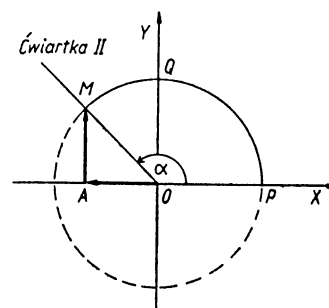
$$x = \text{miara } \overline{OA} \quad y = \text{miara } \overline{OB}$$

i nazywamy współrzędnymi wektora  $\overline{OM}$ . Liczbę  $x$  nazywamy *odciętą*, a liczbę  $y$  — *rzędną* wektora  $\overline{OM}$ . Liczby te są jednocześnie współrzędnymi punktu  $M$ .

Jeśli  $\alpha$  rośnie od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ , to wektor  $\overline{OM}$  wykonuje obrót od dodatniej półosi  $OX$  przez I ćwiartkę płaszczyzny do dodatniej półosi  $OY$ ; współrzędne  $x$  i  $y$  są dodatnie, przy czym  $x$  maleje od  $r$  do  $0$ , zaś  $y$  rośnie od  $0$  do  $r$ . Rys. 98-7 i tablica 98-1 pokazują znak i charakter zmienności odciętej i rzędnej, gdy  $\alpha$  rośnie w zakresie poszczególnych ćwiartek płaszczyzny  $OXY$  ( $\nearrow$  oznacza wzrost,  $\searrow$  oznaczanie się).

Tablica 98-1

| Kąt $\alpha$ | $0^\circ$ | Ćwiartka I | $90^\circ$ | Ćwiartka II | $180^\circ$ | Ćwiartka III | $270^\circ$ | Ćwiartka IV | $360^\circ$ |
|--------------|-----------|------------|------------|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| Odcięta $x$  | $r$       | $\nearrow$ | $0$        | $\searrow$  | $-r$        | $\swarrow$   | $0$         | $\nearrow$  | $r$         |
| Rzędna $y$   | $0$       | $\nearrow$ | $r$        | $\searrow$  | $0$         | $\swarrow$   | $-r$        | $\nearrow$  | $0$         |



Rys. 98-7. Znaki współrzędnych w poszczególnych ćwiartkach płaszczyzny  $OXY$

**Kąt  $\alpha$  a miara kąta.** W praktyce szkolnej spotykamy niekiedy zadania, których sformułowanie, gwoili krótkości, jest takie, że pozostawia pewien margines domyslności, a co za tym idzie, pewną dowolność interpretacji tematu. To z kolei powoduje, że dopuszczalne będą odpowiedzi różniące się między sobą. Różnice takie mogą wystąpić na przykład wtedy, gdy w zadaniu nie sprecyzowano, czy chodzi o kąt geometryczny, czy o miarę kąta (liczbę). Wyjaśnimy to na przykładach, w których korzystać będziemy z oznaczeń przyjętych na rys. 98-6 i 98-7.

**Przykład 1.** Kiedy rzędna punktu  $M$  jest równa promieniowi wodzącemu? Pytanie to jest sformułowane ogólnie i można dać na nie odpowiedź:

— „Wtedy i tylko wtedy, gdy punkt  $M$  leży na dodatniej półosi rzędnych”.

Pytanie to można sprecyzować na dwa sposoby: a) pytając się o kąt; b) pytając się o miarę kąta. W pierwszym przypadku mamy pytanie: „Dla jakiego kąta  $\sphericalangle XOM$  rzędna punktu  $M$  jest równa promieniowi wodzącemu?” i odpowiedź: „Jedynym kątem o tej własności jest kąt o mierze  $90^\circ$ ”. W drugim przypadku na pytanie: „Dla jakich miar  $\alpha$  kąta  $\sphericalangle XOM$  rzędna punktu  $M$  jest równa promieniowi wodzącemu?” dajemy odpowiedź: „Dla  $\alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ , gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą”.

**Przykład 2.** a) Dla jakich kątów  $\sphericalangle XOM$  odcięta punktu  $M$  jest zerem? b) Dla jakich miar kąta  $\sphericalangle XOM$  odcięta punktu  $M$  jest zerem?

Odp. a) Istnieją dokładnie dwa takie kąty:  $+90^\circ$  i  $-90^\circ$ .

b) Miary tych kątów wyrażają się wzorami

$$90^\circ + k \cdot 360^\circ \quad -90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

co można wyrazić jednym wzorem

$$90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

gdzie  $k$  oznacza dowolną liczbę całkowitą.

**Przykład 3.** a) Dla jakich kątów  $\sphericalangle XOM$  rzędna punktu  $M$  jest dodatnia? b) Wyznaczyć miary tych kątów.

Odp. a) Są to kąty o zwrocie dodatnim.

b) Miary główne tych kątów są wyznaczone warunkiem

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Miary wieloznaczne tych kątów są wyznaczone warunkiem

$$k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą, co można też zapisać w postaci

$$2k \cdot 180^\circ < \alpha < (2k+1) \cdot 180^\circ$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą.

### Pytania i zadania

1. Czym różnią się między sobą następujące dwa pojęcia:

- oś — prosta;
- wektor — odcinek;
- równość wektorów — równość odcinków;
- płaszczyzna zorientowana — płaszczyzna niezorientowana;
- kąt skierowany — kąt nieskierowany?

2. Co to jest miara względna wektora leżącego na osi lub równoległego do tej osi?

3. Co to jest miara kąta skierowanego, leżącego na płaszczyźnie zorientowanej? Ile miar ma każdy kąt skierowany?

4. Czy wśród kątów skierowanych istnieje największy? Który z kątów nieskierowanych jest największy?

5. Jak dodaje się do siebie dwa wektory:

- równoległe i zgodnie skierowane;
- równoległe i przeciwnie skierowane;
- nierównoległe?

6. W jaki sposób wyznacza się rzuty wektora w układzie rzutowania:

- prostokątnym; b) ukośnokątnym (zobacz rozwiązanie zad. 7)?

7. W punkcie  $A$  poziomej osi  $p$  zaczepiony jest wektor  $\vec{F}$ , tworzący z osią  $p$  kąt  $+60^\circ$ . Przez punkt  $A$  przeprowadzono drugą oś  $d$ , która z osią  $p$  tworzy kąt  $\varphi$ . Rozłożyć wektor  $\vec{F}$  na składowe leżące na osiach  $p$  i  $d$  w przypadkach:

- $\varphi = +90^\circ$ , b)  $\varphi = +120^\circ$ , c)  $\varphi = +45^\circ$ .

8. Jakie czynności należy wykonać, aby wprowadzić na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych? Jak określa się współrzędne dowolnego punktu tej płaszczyzny?

9. W której ćwiartce płaszczyzny leży punkt:  $A(2, -2)$ ,  $B(-1, 3)$ ,  $C(2, 4)$ ,  $D(-5, -3)$ ?

10. Co można powiedzieć o współrzędnych punktu leżącego: a) na osi  $Ox$ ; b) na osi  $Oy$ ; c) w I i II ćwiartce; d) w I i IV ćwiartce; e) w I i III ćwiartce; f) na dwusiecznej I ćwiartki; g) na dwusiecznej II ćwiartki?

11. Gdzie leży punkt, jeśli a) odcięta jest dodatnia, a rzędna ujemna? b) odcięta 0, a rzędna ujemna?

12. Dany jest punkt  $A(3, 2)$ . Wyznaczyć współrzędne: punktu  $B$  symetrycznego do  $A$  względem 0; punktu  $C$  symetrycznego do  $A$  względem  $Ox$ ; punktu  $D$  symetrycznego do  $A$  względem  $Oy$ .

13. Obliczyć odległości punktów:  $A(3, 4)$ ,  $B(6, 8)$ ,  $C(2, -3)$ ,  $D(4, 0)$ ,  $E(-12, -9)$ ,  $F(0, 5)$  od początku układu współrzędnych.

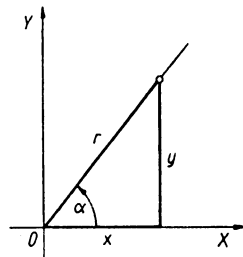
14. Czy wektor  $\vec{OM}$  będzie na płaszczyźnie  $OXY$  jednoznacznie określony, jeśli zostaną podane jego:

- obie współrzędne prostokątne (odcięta i rzędna);
- długość;
- długość i odcięta;
- długość i kąt skierowany (od  $\vec{OX}$  do  $\vec{OM}$ );
- odcięta i kąt skierowany (od  $\vec{OX}$  do  $\vec{OM}$ )?

15. Jak zmieniają się odcięta i rzędna wektora  $\vec{OM}$ , gdy wektor ten obraca się na płaszczyźnie  $OXY$  w kierunku dodatnim, nie zmieniając swej długości?

## 99. Określenie funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego

**Definicja 99.1.** Niech będzie dany na płaszczyźnie  $OXY$  dowolny kąt skierowany o mierze  $\alpha$ . Sprowadzając ten kąt do położenia standardowego (rys. 99-1) i oznaczając literą  $M$  dowolny punkt leżący na końcowym ramieniu kąta i różny od wierzchołka kąta, otrzymujemy kąt  $\angle XOM$  o mierze  $\alpha$ , który w dalszym ciągu będziemy nazywać kątem  $\alpha$ .



Rys. 99-1

Oznaczając literami  $x$ ,  $y$ ,  $r$  odciętą, rzędną i promień wodzący punktu  $M$ , określamy funkcje trygonometryczne kąta  $\alpha$  następującymi równościami

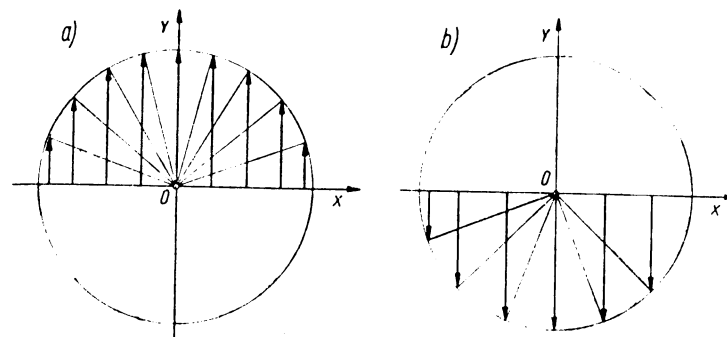
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} & \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{x}{y} \\ \sec \alpha &= \frac{r}{x} & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{r}{y} \end{aligned} \quad (99.1)$$

W zakresie kątów I ćwiartki powyższa definicja pokrywa się z definicją 92.1, jest więc jej uogólnieniem. Równości (99.1) można zapisać w postaci analogicznej do (92.1)

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\text{rzędna}}{\text{promień}} & \cos \alpha &= \frac{\text{odcięta}}{\text{promień}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{rzędna}}{\text{odcięta}} & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\text{odcięta}}{\text{rzędna}} \\ \sec \alpha &= \frac{\text{promień}}{\text{odcięta}} & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{\text{promień}}{\text{rzędna}} \end{aligned}$$

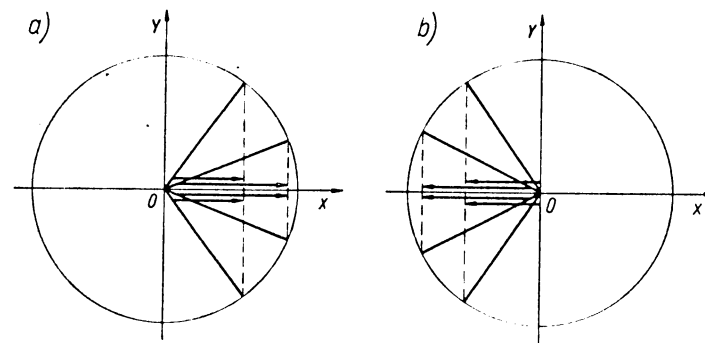
**Określoność funkcji trygonometrycznych.** Sinus i cosinus są określone dla wszystkich bez wyjątku kątów, gdyż  $r \neq 0$ . Pozostałe funkcje trygonometryczne są nieokreślone dla pewnych kątów, a mianowicie wtedy, gdy mianownik w ułamku określającym daną funkcję staje się równy zero. Tangens i secans tracą sens, gdy  $x = 0$ , tj. dla kątów  $+90^\circ$  i  $-90^\circ$ . Cotangens i cosecans tracą sens, gdy  $y = 0$ , tj. dla kątów  $0^\circ$  i  $180^\circ$ . Funkcjami  $\sec$  i  $\operatorname{cosec}$  nie będziemy się zajmować.

**Znak funkcji trygonometrycznych.** Funkcja sinus przybiera wartości takiego znaku, jaki jest znak rzędnej (rys. 99-2), a więc przybiera wartości dodatnie w I i II ćwiartce i ujemne w III i IV ćwiartce.



Rys. 99-2. ab

Funkcja cosinus przybiera wartości takiego znaku, jaki jest znak odciętej (rys. 99-3), a więc przybiera wartości dodatnie w I i IV ćwiartce oraz wartości ujemne w II i III ćwiartce.



Rys. 99-3. ab

Posługując się pojęciami rozwartości i zwrotu kąta skierowanego, powiemy, że:

- znak sinus jest taki, jak zwrot kąta;
- znak cosinusa jest związany z rozwartością kąta, a mianowicie cosinus jest dodatni dla kątów o rozwartości mniejszej od  $90^\circ$  i ujemny dla kątów o rozwartości większej od  $90^\circ$ .

Funkcje tangens i cotangens przybierają wartości dodatnie, gdy  $x$  i  $y$  są tego samego znaku, tj. w I i III ćwiartce oraz wartości ujemne, gdy  $x$  i  $y$  są przeciwnych znaków, tj. w II i IV ćwiartce.

Tablica 99-1 zawiera zestawienie powyższych wiadomości. Znak \* oznacza, że dla danego kąta funkcja jest nieokreślona. (Ponieważ dla kątów bliskich tym kątom

funkcje  $\operatorname{tg}$  i  $\operatorname{ctg}$  przybierają wartości bezwzględnie dowolnie duże, więc w wielu książkach znajdziemy w tych miejscach znak nieskończoności  $\infty$ ).

Tablica 99-1

| Kąt<br>$\alpha$             | $0^\circ$ | Ćwiartka I | $90^\circ$ | Ćwiartka II | $180^\circ$ | Ćwiartka III | $270^\circ$ | Ćwiartka IV | $360^\circ$ | Ćwiartka I                                                                                                                                    | $360^\circ + 90^\circ$ | Ćwiartka II | $360^\circ + 180^\circ$ | Ćwiartka III |
|-----------------------------|-----------|------------|------------|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------------|-------------------------|--------------|
| $\sin \alpha$               | 0         | +++<br>↗   | 1          | +++<br>↘    | 0           | ---<br>↘     | -1          | ---<br>↗    | 0           | przy dalszym wzroście miary końcowe ramię kąta przebiega ponownie ćwiartki I–IV i funkcje trygonometryczne doznają ponownie tych samych zmian |                        |             |                         |              |
| $\cos \alpha$               | 1         | +++<br>↘   | 0          | ---<br>↘    | -1          | ---<br>↗     | 0           | +++<br>↗    | 1           |                                                                                                                                               |                        |             |                         |              |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | 0         | +++<br>↗   | *          | ---<br>↗    | 0           | +++<br>↗     | *           | ---<br>↗    | 0           |                                                                                                                                               |                        |             |                         |              |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | *         | +++<br>↘   | 0          | ---<br>↘    | *           | +++<br>↘     | 0           | ---<br>↘    | *           |                                                                                                                                               |                        |             |                         |              |

## 100. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta skierowanego

Trzy podstawowe tożsamości. Twierdzenie 100.1. Między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta skierowanego zachodzą związki

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (100.1)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \quad (100.2) \quad (100.3)$$

Wzór (100.1) jest prawdziwy dla wszystkich kątów skierowanych. Wzory (100.2) i (100.3) są prawdziwe dla tych kątów, dla których tangens względnie cotangens są określone.

Wzór (100.1) bywa nazywany „wzorem jednostkowym”, „jednością trygonometryczną”, lub „trygonometrycznym twierdzeniem Pitagorasa”. Wzór (100.2) wyraża tangens jako stosunek sinusa do cosinusa, wzór (100.3) wyraża cotangens jako stosunek cosinusa do sinusa.

**Dowód wzoru (100.1).** Między  $x, y, r$  (rys. 99-1) zachodzi związek  $x^2 + y^2 = r^2$ . Dzieląc tę równość przez  $r^2$  i uwzględniając definicje (99.1) otrzymujemy (100.1).

**Dowód wzoru (100.2).**  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{r} : \frac{x}{r} = \frac{y}{r} \cdot \frac{r}{x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$

**Dowód wzoru (100.3)** analogiczny.

Z powyższych trzech podstawowych tożsamości można łatwo wyprowadzić parę dalszych tożsamości, np.

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

**Obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy wartość jednej z nich jest dana.** Tożsamości (100.1), (100.2), (100.3) pozwalają wyznaczyć bezwzględną wartość funkcji trygonometrycznych, ale dla określenia znaków potrzebna jest dodatkowa informacja o kącie  $\alpha$ , wskazująca do której ćwiartki należy ten kąt.

**Przykład 1.** Wyznaczyć  $\cos \alpha$ , jeśli jest dana wartość  $\sin \alpha$ .

**Rozwiązanie.** Z „jedności trygonometrycznej” otrzymujemy

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Bez dodatkowej informacji o kącie  $\alpha$  nie można określić znaku. Jeśli jest taka informacja, np. jeśli wiadomo, że  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , to wiedząc (rys. 99-3b), że w tej ćwiartce cosinus jest ujemny, wybierzemy znak „minus”.

**Przykład 2.** Dana jest wartość  $\operatorname{tg} \alpha = m$ . Obliczyć  $\cos \alpha$ .

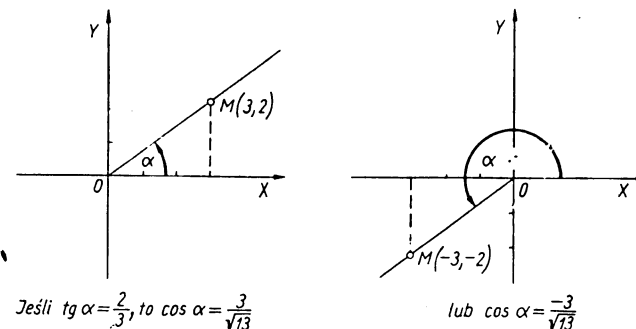
**Rozwiązanie.** Postępując, jak w zadaniu wzorcowym 2 (str. 159), dostajemy

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + m^2}, \text{ skąd wynika alternatywa}$$

$$\cos \alpha = +\sqrt{\frac{1}{1 + m^2}} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + m^2}}$$

Możliwe są oba znaki: plus i minus, co dla wartości liczbowej  $m = \frac{2}{3}$  pokazuje rys.

100-1. Porównując ten rysunek z rys. 95-1, widzimy, że definicja 99.1 jest uogólnieniem definicji 92.1.



Rys. 100-1

1. Napisać i udowodnić trzy podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta skierowanego.
2. Jak wyznacza się wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , jeśli jest dana wartość jednej z tych funkcji dla tego kąta?
3. Obliczyć wartości pozostałych trzech funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  wiedząc, że

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{84}{85}; \quad \text{b) } \sin \alpha = -\frac{2}{3}; \quad \text{c) } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}; \quad \text{d) } \operatorname{ctg} \alpha = 0.$$

4. Obliczyć  $\sin x$ , jeśli  $\cos x = \frac{84}{85}$  i kąt  $x$  spełnia nierówność:

$$\text{a) } 270^\circ < x < 360^\circ; \quad \text{b) } 90^\circ < x < 270^\circ; \quad \text{c) } |x| < 45^\circ; \quad \text{d) } 45^\circ < x < 135^\circ.$$

5. Uprościć wyrażenia: a)  $\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha$ ; b)  $\cos^2 \alpha - 1$ ;

$$\text{c) } \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}; \quad \text{d) } \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

6. Wiadomo, że  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 6$ . Obliczyć: a)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ; b)  $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$ .

7. Wiadomo, że  $\sin \alpha + \cos \alpha = c$ . Obliczyć: a)  $2 \sin \alpha \cos \alpha$ ; b)  $\sin \alpha - \cos \alpha$ .

## 101. Okresowość funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne jako funkcje miary kąta. Każdy kąt skierowany  $\angle XOM$  na płaszczyźnie  $OXY$  ma nieskończenie wiele miar stopniowych. Przyporządkowanie to jest wieloznaczne, ale przyporządkowanie odwrotne jest jednoznaczne, bowiem dowolnej liczbie  $\alpha$ , uważanej za stopniową miarę kąta skierowanego w położeniu standardowym względem układu  $OXY$ , odpowiada jednoznacznie określony kąt  $\angle XOM$ . To jednoznaczne przyporządkowanie jest funkcją

$$\alpha \mapsto \angle XOM$$

która dowolnej liczbie  $\alpha$  przyporządkowuje określony twór geometryczny  $\angle XOM$ .

Kątowi  $\angle XOM$ , zgodnie z definicją 99.1, odpowiadają określone wartości funkcji trygonometrycznych; dla ustalenia uwagi weźmy jedną z nich, np. sinus. Mamy więc drugą funkcję

$$\angle XOM \mapsto \frac{y}{r}$$

która tworowi geometrycznemu  $\angle XOM$  przyporządkowuje liczbę określoną stosunkiem  $\frac{y}{r}$ .

Funkcja złożona z tych dwóch funkcji

$$\alpha \mapsto \angle XOM \mapsto \frac{y}{r}$$

to funkcja, która dowolnej liczbie  $\alpha$  za pośrednictwem stosownego kąta  $\angle XOM$  przyporządkowuje liczbę  $\frac{y}{r}$ . Tę funkcję złożoną oznaczmy symbolem  $\sin \alpha$

$$\alpha \mapsto \angle XOM \xrightarrow{\sin \angle XOM} \frac{y}{r}$$

Symbol ten sam, co w definicji 99.1, ale teraz ma on dla nas nieco inny sens. Analogicznie można rozumieć symbole:  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ . Tak rozumiane funkcje — to funkcje trygonometryczne stopniowej miary kąta skierowanego.

**Funkcja okresowa, okres, okres podstawowy.** Funkcję  $f(x)$  określoną w zbiorze  $E$  nazywamy *okresową* (*periodyczną*), jeśli istnieje liczba  $t$  różna od 0 i taka, że jeśli  $x$  należy do  $E$ , to także  $x+t$  i  $x-t$  należą do  $E$  i zachodzi równość

$$f(x+t) = f(x) = f(x-t)$$

Każdą liczbę  $t$  o tej własności nazywamy *okresem* (*periodem*) funkcji  $f(x)$ .

Jeśli pewna liczba  $t$  jest okresem danej funkcji, to również liczby  $2t$ ,  $3t$ ,  $4t$ , ... są okresami tej funkcji.

Najmniejszy dodatni okres danej funkcji (o ile istnieje) nazywamy *okresem podstawowym* tej funkcji.

W niektórych książkach okres podstawowy nazywa się krótko okresem, a o innych okresach nie wspomina się.

**Okresowość funkcji trygonometrycznych stopniowej miary kąta.** Niech będzie dana dowolna liczba rzeczywista  $\alpha$ . Liczbie tej odpowiada określony kąt  $\angle XOM$ , którego miarą stopniową jest  $\alpha$ . Wzrostowi miary stopniowej kąta od wartości  $\alpha$  do wartości  $\alpha + 360^\circ$  odpowiada jeden pełny obrót końcowego ramienia kąta; po tym obrocie ramię to powraca do poprzedniego położenia i wyznacza ten sam, co poprzednio kąt  $\angle XOM$ .

Zatem dowolna funkcja trygonometryczna musi dla  $360^\circ + \alpha$  przybierać tę samą wartość, co dla  $\alpha$ , a jeśli, w przypadku tangensa i cotangensa, funkcja była nieokreślona dla  $\alpha$ , to i dla  $360^\circ + \alpha$  jest nieokreślona. Mamy więc dla dowolnego  $\alpha$  równości

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(360^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(360^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \quad (101.1)$$

z których wynika, że funkcje trygonometryczne stopniowej miary kąta są okresowe (periodyczne). Ich okresem (perioDEM) jest  $360^\circ$  (okresem jest liczba 360, a znak  $^\circ$  przypomina o założeniu, że chodzi tu o stopniową miarę kąta). Dla funkcji  $\sin$  i  $\cos$  jest to okres podstawowy.

Okresem podstawowym funkcji  $\operatorname{tg}$  i  $\operatorname{ctg}$  jest  $180^\circ$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha\end{aligned}\quad (101.2)$$

Wynika to stąd, że ramiona końcowe kątów  $\alpha$  i  $180^\circ + \alpha$  w położeniu standardowym uzupełniają się do prostej przechodzącej przez punkt 0, a na takiej prostej stosunek rzędnej do odciętej jest stały.

**Przykład 1.** Wyznaczyć wartość  $\sin 420^\circ$ .

$$\text{Rozwiązanie. } \sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Przykład 2.** Wyznaczyć wartość  $\sin 765^\circ$ .

$$\text{Rozwiązanie. } \sin 765^\circ = \sin(360^\circ + 360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Przykład 3.** Wyznaczyć wartość  $\sin(-300^\circ)$ .

$$\text{Rozwiązanie. } \sin(-300^\circ) = \sin(-300^\circ + 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Przykład 4.** Wyznaczyć wartość  $\operatorname{tg} 225^\circ$ .

$$\text{Rozwiązanie. } \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(225^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

**Przykład 5.** Wyznaczyć wartość  $\cos 1965^\circ$ .

$$\begin{aligned}\text{Rozwiązanie. } 1965^\circ : 360^\circ &= 5 \text{ reszta } 165^\circ; \quad 1965^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 165^\circ \\ \frac{1800}{165}\end{aligned}$$

$$\cos 1965^\circ = \cos(5 \cdot 360^\circ + 165^\circ) = \cos 165^\circ$$

Kąta  $165^\circ$  nie znajdziemy w żadnej tablicy funkcji trygonometrycznych. Należy zastosować jeden ze wzorów redukcyjnych (zob. przykład 1, str. 184).

#### Pytania

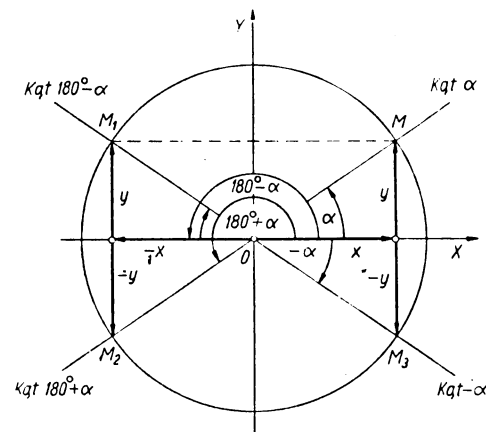
1. Kiedy funkcję nazywamy okresową? Co to jest okres podstawowy?
2. Co to znaczy, że sinus jest funkcją okresową? Jakie są podstawowe okresy funkcji trygonometrycznych?
3. Powiększając kąt  $\alpha = 30^\circ$  o  $120^\circ$  nie zmieniamy wartości sinus

$$\sin(\alpha + 120^\circ) = \sin \alpha \quad \text{dla} \quad \alpha \equiv 30^\circ$$

Dlaczego, mimo tej równości,  $120^\circ$  nie jest okresem sinus

## 102. Wzory redukcyjne

**Kąty  $\alpha$ ,  $180^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ + \alpha$ ,  $-\alpha$ .** W tablicach podaje się wartości funkcji trygonometrycznych jedynie dla kątów I ćwiartki. W pozostałych ćwiartkach bowiem występują te same wartości, jedynie ich kolejność może być zmieniona lub znak. Widać to na kole trygonometrycznym (rys. 102-1). Obierzmy promień koła  $r = 1$ , wówczas rzędna jest równa sinusowi, a odcięta — cosinusowi danego kąta.



Rys. 102-1

Weźmy pod uwagę cztery kąty

$$\alpha \quad 180^\circ - \alpha \quad 180^\circ + \alpha \quad -\alpha \quad (102.1)$$

i odpowiadające tym kątom cztery punkty okręgu

$$M \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad (102.2)$$

Jeśli kąt  $\alpha$  należy do I ćwiartki, to kąty  $180^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ + \alpha$ ,  $-\alpha$  należą odpowiednio do ćwiartek II, III i IV. Punkty (102.2) leżą symetrycznie, a mianowicie:

- punkt  $M_1$  jest symetryczny do punktu  $M$  względem osi rzędnych;
- punkt  $M_2$  jest symetryczny do punktu  $M$  względem początku układu;
- punkt  $M_3$  jest symetryczny do punktu  $M$  względem osi odciętych.

Dzięki tej symetrii, łatwo wyznaczyć współrzędne punktów  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , jeśli znane są współrzędne  $M$ . Oznaczmy współrzędne punktu  $M$  literami  $x$ ,  $y$ ; wówczas z rys. 102-1 odczytujemy

$$M(x, y) \quad M_1(-x, y) \quad M_2(-x, -y) \quad M_3(x, -y) \quad (102.3)$$

Rzędne tych punktów są sinusami, a odcięte — cosinusami kątów (102.1). Mamy więc dla tych kątów następujące wartości sinus

Tablica 102-1

| Kąt     | $\alpha$ | $180^\circ - \alpha$ | $180^\circ + \alpha$ | $-\alpha$ |
|---------|----------|----------------------|----------------------|-----------|
| Sinus   | $y$      | $y$                  | $-y$                 | $-y$      |
| Cosinus | $x$      | $-x$                 | $-x$                 | $x$       |

Porównując ze sobą te wartości, stwierdzamy, że sinus przyjmuje dla kątów  $\alpha$  i  $180^\circ - \alpha$  tę samą wartość

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

natomiast dla kątów  $\alpha$  i  $-\alpha$  sinus przyjmuje wartości przeciwne

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

W podobny sposób odczytujemy z tablicy 102-1 dalsze związki. Zestawiono je w tablicy 102-2. Są one prawdziwe dla wszystkich wartości  $\alpha$  i nazywają się *wzorami redukcyjnymi*.

Tablica 102-2

| Wzory redukcyjne                                                      |                                                                      |                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| dla kąta $180^\circ - \alpha$                                         | dla kąta $180^\circ + \alpha$                                        | dla kąta $-\alpha$                                         |
| $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$                              | $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$                            | $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$                             |
| $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$                             | $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$                            | $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$                              |
| $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$   |
| $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ |

**Przykład 1.** Wyznaczyć  $\cos 165^\circ$ .

Rozwiązanie. Stosujemy wzór redukcyjny  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

$$\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ = -0,9659$$

**Przykład 2.** Wyznaczyć  $\cos 220^\circ$ .

Rozwiązanie. Stosujemy wzór redukcyjny

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 220^\circ = \cos(180^\circ + 40^\circ) = -\cos 40^\circ = -0,7660$$

**Przykład 3.** Wyznaczyć  $\sin(-30^\circ)$  i  $\cos(-30^\circ)$ .

Rozwiązanie.  $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5000$ ,

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = 0,8660.$$

**Przykład 4.** Wyznaczyć  $\operatorname{tg}(-38^\circ)$ .

Rozwiązanie. Stosujemy wzór redukcyjny  $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg}(-38^\circ) = -\operatorname{tg} 38^\circ = -0,7813$$

**Przykład 5.** Wyznaczyć  $\cos(-70^\circ)$ .

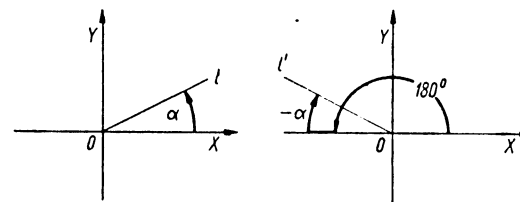
Rozwiązanie.  $\cos(-70^\circ) = \cos 70^\circ = 0,3420$ .

**Redukowanie dowolnych kątów do kątów I ćwiartki.** Wzory (101.1) pozwalają zredukować dowolną miarę kąta do miary głównej, co pozwala rozpoznać do której ćwiartki dany kąt należy. Z kolei, podane powyżej wzory redukcyjne pozwalają zredukować ten kąt do pewnego kąta  $\alpha$  należącego do I ćwiartki, a mianowicie:

- kąt II ćwiartki przedstawiamy w postaci  $180^\circ - \alpha$  i stosujemy wzory redukcyjne dla kąta  $180^\circ - \alpha$ ;
- kąt III ćwiartki przedstawiamy w postaci  $180^\circ + \alpha$  i stosujemy wzory redukcyjne dla kąta  $180^\circ + \alpha$ ;
- kąt IV ćwiartki przedstawiamy w postaci  $-\alpha$  i stosujemy wzory redukcyjne dla kąta  $-\alpha$ .

Oprócz wyżej wymienionych wzorów redukcyjnych podamy jeszcze dalsze. Wzorów redukcyjnych jest dość dużo. Istotne jest nie tyle wyuczenie się ich na pamięć, co umiejętność wyprowadzania tych wzorów. To zaś polega na właściwym odczytywaniu prostych rysunków. Pokazujemy to poniżej na paru przykładach.

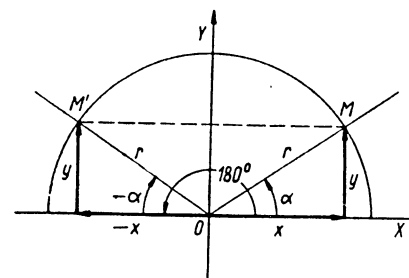
**Wzory dla kąta  $180^\circ - \alpha$ .** Rozważmy kąty  $\alpha$  i  $180^\circ - \alpha$  w położeniu standardowym (rys. 102-2). Z kątem  $180^\circ - \alpha$  można skojarzyć wyobrażenie obrotu złożonego z obrotu o kąt  $180^\circ$  i obrotu o kąt  $-\alpha$ . Oba kąty kreślimy w jednym układzie, za-



Rys. 102-2

taczamy okrąg i na otrzymanym w ten sposób kole trygonometrycznym odczytujemy rzędne i odcięte punktów  $M$  i  $M'$  (rys. 102-3). Rzędne są jednakowe, natomiast odcięte są liczbami przeciwnymi. Stąd odczytujemy, że jest

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$



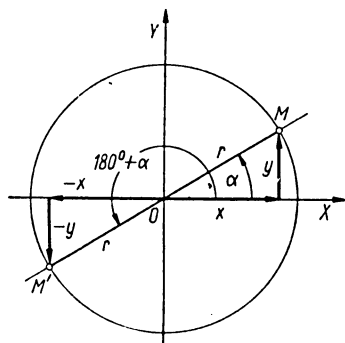
Rys. 102-3

Dzieląc pierwszą z tych równości przez drugą, otrzymujemy wzór

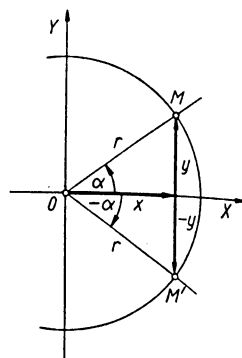
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Wzory dla kąta  $180^\circ + \alpha$  wyprowadzamy za pomocą rys. 102-4.

Wzory dla kąta  $-\alpha$  wyprowadzamy korzystając z rys. 102-5.

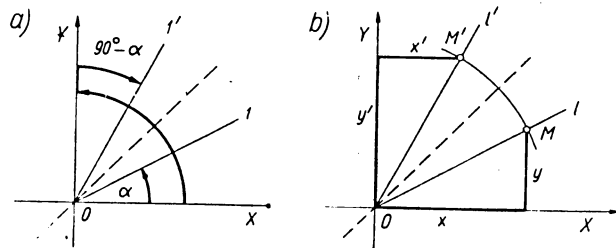


Rys. 102-4



Rys. 102-5

Kąty  $\alpha$  i  $90^\circ - \alpha$ . Rozważmy kąty  $\alpha$  i  $90^\circ - \alpha$  w położeniu standardowym (rys. 102-6a). Końcowe ramiona tych kątów  $l$  i  $l'$  są wzajemnie symetryczne względem prostej dwusiecznej kąta  $XOY$ . Obierzmy punkty  $M(x, y)$  i  $M'(x', y')$  leżące odpowiednio na  $l$  i  $l'$  tak, aby  $OM = OM' = r > 0$ . Współrzędne tych punktów spełniają związki  $x' = y, y' = x$  (rys. 102-6b). Stąd  $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$



Rys. 102-6. ab

oraz  $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin \alpha$ . Ponieważ symetria półprostych  $l$  i  $l'$  zachodzi dla dowolnego  $\alpha$ , więc dla dowolnego  $\alpha$  mamy związki

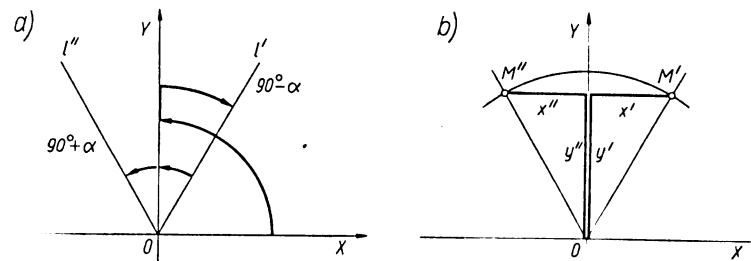
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (102.4)$$

Związki te nazywamy wzorami redukcyjnymi dla kąta  $90^\circ - \alpha$ . Odpowiedni wzór dla tangensa i cotangensa otrzymamy, dzieląc przez siebie stronami równości (102.4)

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha \quad (102.5)$$

Wzory (102.4) i (102.5) są uogólnieniem wzorów (93.1) na dowolny kąt  $\alpha$ .

Kąty  $90^\circ - \alpha$  i  $90^\circ + \alpha$  (rys. 102-7a). Końcowe ramiona tych kątów są półprostymi  $l'$  i  $l''$  położonymi symetrycznie względem osi rzędnych. Współrzędne punktów  $M'$  i  $M''$  leżących na tych półprostych tak, aby  $OM' = OM'' = r > 0$  (rys. 102-7b) spełniają związki  $x'' = -x', y'' = y'$ . Stąd



Rys. 102-7. ab

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \frac{y''}{r} = \frac{y'}{r} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \frac{x''}{r} = \frac{-x'}{r} = -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzory redukcyjne dla kąta  $90^\circ + \alpha$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad (102.6)$$

Dzieląc stronami, otrzymujemy

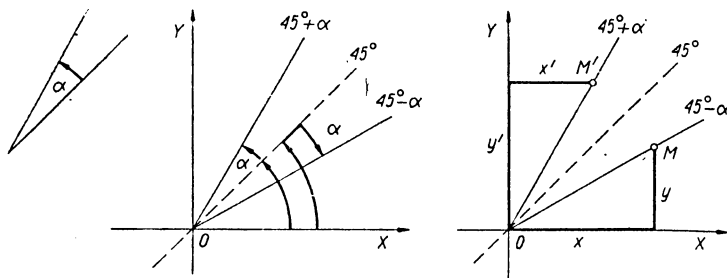
$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad (102.7)$$

Tablica 102-3

| Wzory redukcyjne                                                   |                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| dla kąta $90^\circ - \alpha$                                       | dla kąta $90^\circ + \alpha$                                        |
| $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$                            | $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$                             |
| $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$                            | $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$                            |
| $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ |

Kąty  $45^\circ - \alpha$  i  $45^\circ + \alpha$ . Kąty te w położeniu standardowym (rys. 102-8) mają ramiona końcowe położone symetrycznie względem prostej dwusiecznej I i III ćwiartki, a punkty  $M, M'$  leżące na tych ramionach,  $OM = OM' = r > 0$ , mają współrzędne  $(x, y)$  i  $(x', y')$ , przy czym jest  $x' = y, y' = x$ . Stąd wynikają wzory redukcyjne

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ + \alpha) &= \cos(45^\circ - \alpha) \\ \cos(45^\circ + \alpha) &= \sin(45^\circ - \alpha) \\ \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) \\ \operatorname{ctg}(45^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) \end{aligned} \quad (102.8)$$



Rys. 102-8

### Pytania i zadania

- Zredukować do I ćwiartki następujące wartości funkcji:  
a)  $\sin 138^\circ$ ; b)  $\cos 115^\circ$ ; c)  $\operatorname{tg} 165^\circ$ ; d)  $\sin(-250^\circ)$ ; e)  $\cos 190^\circ$ ; f)  $\operatorname{tg} 300^\circ$ ;  
g)  $\sin 1000^\circ$ ; h)  $\cos 1000^\circ$ ; k)  $\operatorname{tg} 1000^\circ$ .
- Napisać i uzasadnić wzory redukcyjne dla kątów:  
a)  $180^\circ - \alpha$ , b)  $180^\circ + \alpha$ , c)  $-\alpha$ , d)  $90^\circ - \alpha$ , e)  $90^\circ + \alpha$ .
- Wyrazić, przy pomocy kątów dodatnich, nie większych od  $45^\circ$ :  
a)  $\cos 115^\circ$ ; b)  $\sin(-250^\circ)$ ; c)  $\operatorname{tg} 300^\circ$ ; d)  $\sin 1000^\circ$ ; e)  $\sin 225^\circ$ .
- Posługując się wzorami redukcyjnymi i tablicą 96-1, wyznaczyć:  
a)  $\sin 120^\circ$ , b)  $\sin 240^\circ$ , c)  $\sin 300^\circ$ , d)  $\cos 210^\circ$ , e)  $\cos 135^\circ$ , f)  $\operatorname{tg} 150^\circ$ , g)  $\operatorname{tg} 315^\circ$ ;  
h)  $\operatorname{tg}(-225^\circ)$ , k)  $\operatorname{ctg} 150^\circ$ , l)  $\operatorname{ctg} 330^\circ$ .
- Napisać i uzasadnić wzory redukcyjne dla kąta  $270^\circ + \alpha$ .
- Podać wszystkie kąty  $x$ , dla których zachodzi równość:

|                               |                                |                                   |                                    |
|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| $\sin x = 0$                  | $\cos x = 0$                   | $\operatorname{tg} x = 0$         | $\operatorname{ctg} x = 0$         |
| $\sin x = 1$                  | $\cos x = 1$                   | $\operatorname{tg} x = 1$         | $\operatorname{ctg} x = 1$         |
| $\sin x = -1$                 | $\cos x = -1$                  | $\operatorname{tg} x = -1$        | $\operatorname{ctg} x = -1$        |
| $\sin x = \frac{1}{2}$        | $\cos x = \frac{1}{2}$         | $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  | $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$  |
| $\sin x = -\frac{1}{2}$       | $\cos x = -\frac{1}{2}$        | $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ | $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ |
| $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$    | $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$     |

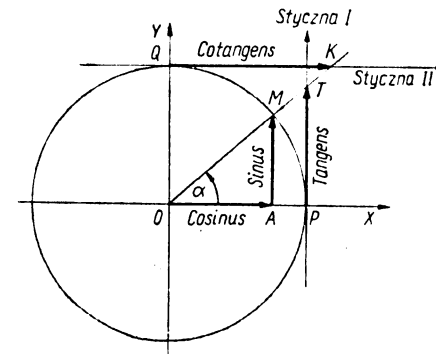
(wystarczy podać po jednej mierze każdego kąta).

- Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenia:  
a)  $\sin(180^\circ - x) + \cos(90^\circ + x)$ ;  
b)  $\cos(180^\circ - x) \sin(90^\circ - x)$ ;  
c)  $\operatorname{tg}(270^\circ - x) \operatorname{tg}(180^\circ + x)$ ;  
d)  $\sin(270^\circ - x) - \cos(180^\circ + x)$ ;

- $\cos(270^\circ + x) + \sin(180^\circ + x)$ ;
- $\sin(90^\circ + x) - \cos(180^\circ - x)$ ;
- $\sin(-x) - \cos(270^\circ - x)$ ;
- $\sin(x - 180^\circ)$ ;
- $\cos(x - 180^\circ)$ ;
- $\operatorname{tg}(x - 270^\circ)$ .

### 103. Koło trygonometryczne i przebieg funkcji trygonometrycznych w zakresie dowolnych kątów skierowanych

**Koło trygonometryczne.** Nakreślmy na płaszczyźnie  $OXY$  okrąg o środku  $O$  i promieniu  $r = 1$  (rys. 103-1) i poprowadźmy dwie styczne do tego okręgu — styczną I przez punkt  $P$  przecięcia okręgu dodatnią półosią  $OX$ ; — styczną II przez punkt  $Q$  przecięcia okręgu dodatnią półosią  $OY$ .



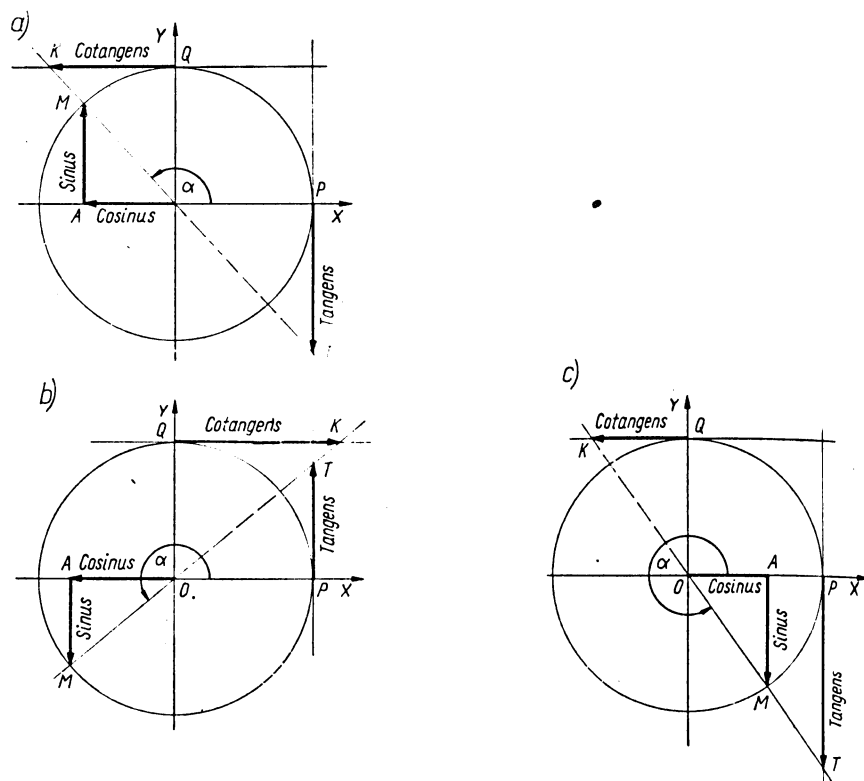
Rys. 103-1. Koło trygonometryczne; kąt  $\alpha$  w I ćwiartce

Styczną I skierowujemy zgodnie z osią  $OY$ , styczną II — zgodnie z osią  $OX$ . Niech będzie dany dowolny kąt skierowany w położeniu standardowym  $\angle XOM$  o mierze  $\alpha$ ,  $OM = r = 1$ . Punkty, w których prosta  $OM$  przecina styczną I i styczną II, oznaczamy odpowiednio  $T$  i  $K$ . Rzut punktu  $M$  na oś  $OX$  oznaczamy  $A$ .

Przy tych założeniach i oznaczeniach mamy równości

- $\sin \alpha$  = miara wektora  $\overline{AM}$  względem osi  $OY$
- $\cos \alpha$  = miara wektora  $\overline{OA}$  względem osi  $OX$
- $\operatorname{tg} \alpha$  = miara wektora  $\overline{PT}$  względem osi  $OY$
- $\operatorname{ctg} \alpha$  = miara wektora  $\overline{QK}$  względem osi  $OX$

Wektory  $\overline{OA}$  i  $\overline{AM}$  są składowymi wektora  $\overline{OM}$ , równoległymi do osi układu. Wektory  $\overline{PT}$  i  $\overline{QK}$  są odcinane na stycznej I i stycznej II przez pary prostych:  $OX$  i  $OM$ , względnie  $OY$  i  $OM$ . Rys. 103-2 ilustruje to w przypadku kątów II, III i IV ćwiartki.



Rys. 103-2. Koło trygonometryczne; kąt  $\alpha$  w ćwiartce: a) drugiej, b) trzeciej, c) czwartej

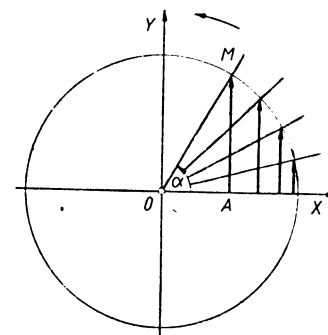
Dla kątów:  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  i  $270^\circ$  niektóre z wektorów  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{PT}$ ,  $\overrightarrow{QK}$ , przedstawiających wartości funkcji trygonometrycznych, są zerowe lub nieokreślone. Jest to ilustracją faktu, że odpowiednie funkcje trygonometryczne są dla tych kątów równe zero lub nieokreślone

|                                                                       |                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\sin 0^\circ = 0$                                                    | $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$                  |
| $\cos 0^\circ = 1$                                                    | $\operatorname{ctg} 0^\circ$ jest nieokreślony   |
| $\sin 90^\circ = 1$                                                   | $\operatorname{tg} 90^\circ$ jest nieokreślony   |
| $\cos 90^\circ = 0$                                                   | $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$                |
| $\sin 180^\circ = 0$                                                  | $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$                |
| $\cos 180^\circ = -1$                                                 | $\operatorname{ctg} 180^\circ$ jest nieokreślony |
| $\sin 270^\circ = -1$                                                 | $\operatorname{tg} 270^\circ$ jest nieokreślony  |
| $\cos 270^\circ = 0$                                                  | $\operatorname{ctg} 270^\circ = 0$               |
| dla kąta $360^\circ$ jest tak samo jak dla kąta $0^\circ$             |                                                  |
| dla kąta $360^\circ + 90^\circ$ jest tak samo jak dla kąta $90^\circ$ |                                                  |

**Zadanie 1.** Odczytać z rys. 103-2c znak funkcji trygonometrycznych w IV ćwiartce.

**Przebieg funkcji sinus.** Ze zmian wektora  $\overrightarrow{AM}$  w kole trygonometrycznym odczytujemy przebieg funkcji  $\sin \alpha$ , a mianowicie:

ćwiartka I; jeśli  $\alpha$  rośnie od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ , to  $\sin \alpha$  jest dodatni i rośnie od 0 do 1 (rys. 103-3);



Rys. 103-3. Wzrost sinusa w I ćwiartce

ćwiartka II: jeśli  $\alpha$  rośnie od  $90^\circ$  do  $180^\circ$ , to  $\sin \alpha$  jest dodatni i maleje od 1 do 0;

ćwiartka III: jeśli  $\alpha$  rośnie od  $180^\circ$  do  $270^\circ$ , to  $\sin \alpha$  jest ujemny i maleje od 0 do  $-1$ ;

ćwiartka IV: jeśli  $\alpha$  rośnie od  $270^\circ$  do  $360^\circ$ , to  $\sin \alpha$  jest ujemny i rośnie od  $-1$  do 0.

Sinus jest funkcją rosnącą w ćwiartkach IV i I, zaś malejącą w ćwiartkach II i III. Sinus jest funkcją ograniczoną; dla dowolnego  $\alpha$  jest  $|\sin \alpha| \leq 1$ .

**Zadanie 2.** Opisać przebieg funkcji cosinus. Sformułować odpowiedź pisemnie, a potem porównać z odpowiedzią na str. 220.

**Przebieg funkcji tangens.** Ze zmian wektora  $\overrightarrow{PT}$  na kole trygonometrycznym odczytujemy:

ćwiartka I: jeśli  $\alpha$  rośnie od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  (rys. 103-1), to tangens jest dodatni i rośnie od 0 do  $+\infty$ , przyjmując dla kątów bliskich  $90^\circ$  i mniejszych od  $90^\circ$  wartości dowolnie duże; punkt  $T$  oddala się po stycznej I w górę do nieskończoności; dla  $\alpha = 90^\circ$  punkt  $T$  nie istnieje i tangens jest nieokreślony;

ćwiartka II: jeśli  $\alpha$  rośnie od  $90^\circ$  do  $180^\circ$  (rys. 103-2), punkt  $T$  przesuwa się po stycznej od dołu w górę do punktu  $P$  (rys. 103-2a); tangens jest ujemny i rośnie od  $-\infty$  do 0; również i w tej ćwiartce tangens jest funkcją rosnącą;

ćwiartka III: jeśli  $\alpha$  rośnie od  $180^\circ$  do  $270^\circ$  (rys. 103-2b) punkt  $T$  przesuwa się po stycznej w górę analogicznie jak w I ćwiartce: tangens przyjmuje te same wartości, co w I ćwiartce, i w tej samej kolejności; jest więc dodatni i rośnie od 0 do  $+\infty$ ;

ćwiartka IV: jeśli  $\alpha$  rośnie od  $270^\circ$  do  $360^\circ$  (rys. 103-2c), to tangens jest ujemny i rośnie od  $-\infty$  do 0.

Tangens jest funkcją rosnącą w każdej ćwiartce, a także w przedziałach  $(-90^\circ; +90^\circ)$ ,  $(90^\circ; 270^\circ)$ . Tangens jest funkcją nieograniczoną.

**Zadanie 3.** Nakreślić koło trygonometryczne z drugą styczną i opisać przebieg funkcji cotangens. Porównać z odpowiedzią na str. 218.

**Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste.** Funkcja cosinus jest parzysta, bowiem według wzoru redukcyjnego dla kąta  $-\alpha$  (str. 184) dla dowolnego  $\alpha$  zachodzi równość

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

(zastąpienie argumentu liczbą przeciwną nie zmienia wartości funkcji).

Funkcje sinus, tangens i cotangens są nieparzyste, bowiem

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

(zastąpienie argumentu liczbą przeciwną zmienia wartość funkcji na przeciwną).

### Pytania i zadania

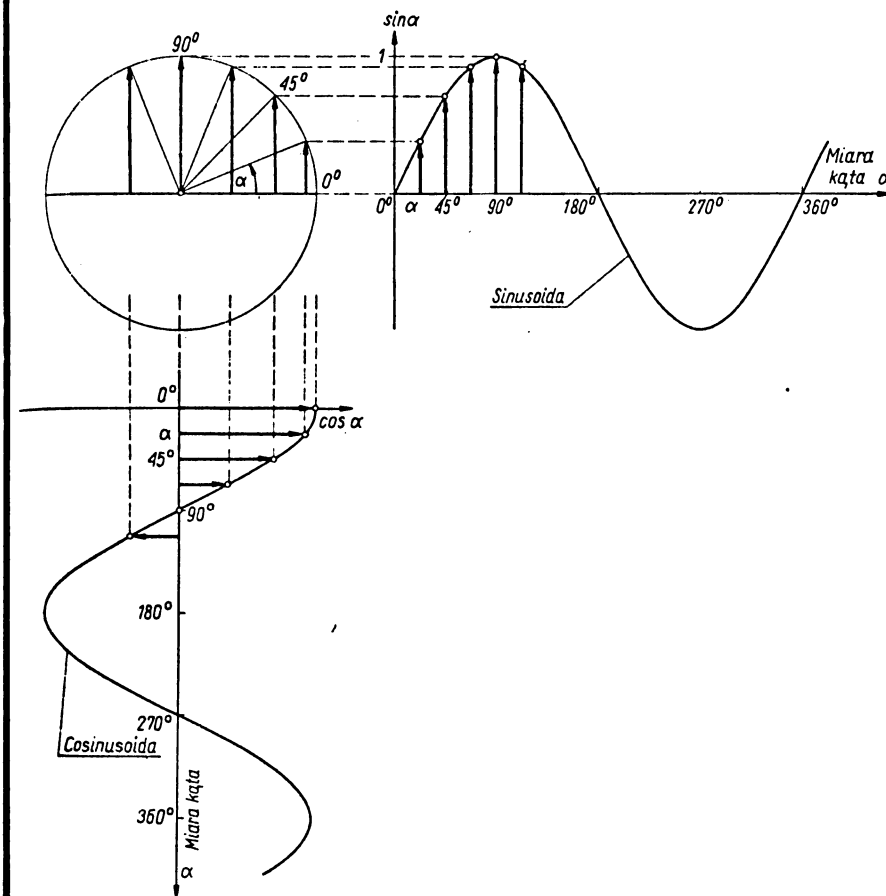
- Co to znaczy, że funkcja jest parzysta? Które funkcje trygonometryczne są parzyste? Co to znaczy, że funkcja jest nieparzysta? Które funkcje trygonometryczne są nieparzyste?
- Porównując wartości danej funkcji przy  $x = a$  i  $x = -a$ , rozstrzygnąć jaką funkcją — parzystą czy nieparzystą — jest funkcja:  
1)  $\sin^2 x$ ; 2)  $\sin(x^2)$ ; 3)  $\cos^3 x$ ; 4)  $\cos(x^3)$ ; 5)  $\sin^3 x$ ; 6)  $\sin x \cos x$ ; 7)  $\sin x \operatorname{tg} x$ ; 8)  $\sin x + \operatorname{tg} x$ ; 9)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ; 10)  $\cos x + \sin x$ .
- Pokazać na kole trygonometrycznym wartość bezwzględną i znak czterech funkcji trygonometrycznych dla kątów:  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $210^\circ$  i  $315^\circ$ . Które z nich są równe?
- Opisać przebieg funkcji trygonometrycznych w II ćwiartce.

## 104. Wykresy funkcji trygonometrycznych

**Sinusoida** jest to wykres funkcji sinus w układzie prostokątnym. Aby nakreślić sinusoidę, odcinamy na osi odciętych miary kątów i w otrzymanych punktach tej osi zaczepiamy wektory prostopadłe, których miary na osi rzędnych równają się wartościom funkcji sinus.

Na każdej z dwóch osi układu można obrać dowolną jednostkę. Na ogół staramy się mieć na obu osiach tę samą jednostkę. W przypadku stopniowej miary kąta byłoby to bardzo niewygodne. Jednostka na osi odciętych powinna być dość krótka, aby na rysunku zmieścić się dość szeroki zakres kątów, np. od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Z drugiej strony sinus przyjmuje wartości zawarte między  $-1$  i  $+1$ , więc jednostka na osi rzędnych nie może być tak mała, jak na osi odciętych. Dlatego, stosując stopniową

miarę kąta, będziemy używać różnych jednostek na osiach układu. Jednostkę na osi rzędnych przyjmujemy równą promieniowi koła trygonometrycznego; wtedy można wektory przedstawiające wartości funkcji trygonometrycznych wprost „wyj-



Rys. 104-1. Konstrukcja sinusoidy i cosinusoidy

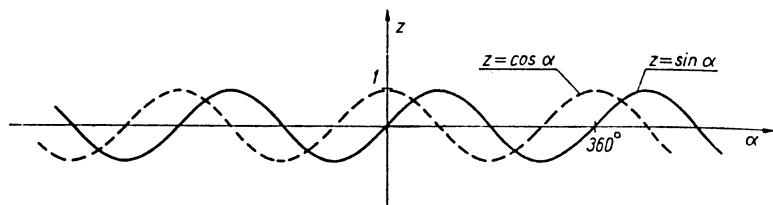
mować” z koła trygonometrycznego i „rozstawiać” na osi odciętych. Linia łącząca końce tych wektorów będzie wykresem odpowiedniej funkcji trygonometrycznej. Rys. 104-1 przedstawia wykres funkcji sinus.

**Cosinusoida** jest to wykres funkcji cosinus w układzie prostokątnym. Cosinusoidę kreślimy podobnie jak sinusoidę. Ponieważ wektory przedstawiające wartości cosinusa leżą w kole trygonometrycznym poziomo, więc, aby ułatwić sobie przenoszenie ich, trzeba by obrócić koło trygonometryczne o kąt  $+90^\circ$  albo też obrócić wykres o kąt  $-90^\circ$ .

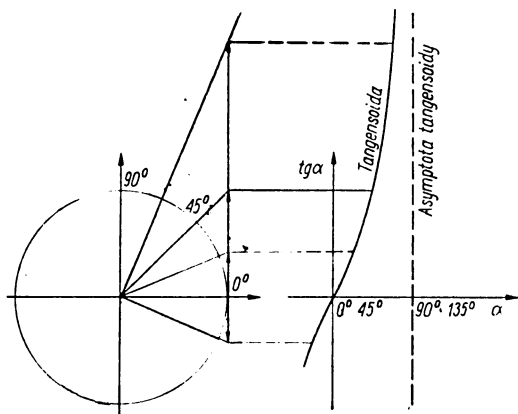
Cosinusoida jest krzywą tego samego kształtu, co sinusoida. Jeśli obie te krzywe nakreślimy w jednym układzie, to okaże się, że cosinusoida jest przesunięta względem sinusoidy w lewo o odcinek długości odpowiadającej  $90^\circ$ . Odpowiada to tożsamości

$$\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha$$

Ponieważ każdy kąt ma nieskończenie wiele miar, więc sinusoida i cosinusoida mogą być przedłużane o dowolnie wiele „fal” w lewo i w prawo (rys. 104-2).



Rys. 104-2. Sinusoida i cosinusoida



Rys. 104-3. Konstrukcja tangensoidy

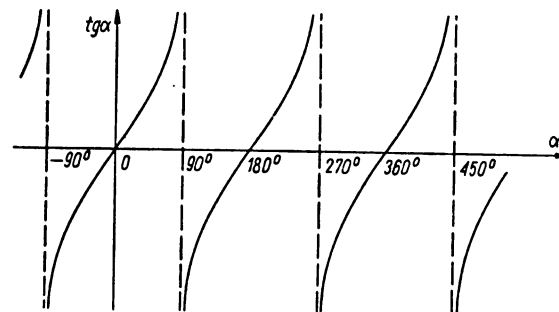
**Tangensoida** jest to wykres funkcji tangens. Rys. 104-3 przedstawia sposób kreślenia tangensoidy dla kątów I ćwiartki. Na rys. 104-4 widzimy tangensoidę, składa się ona z gałęzi, wzajemnie przystających i oddzielonych asymptotami.

*Asymptoty* są to proste pomocnicze, nie należące do wykresu; poszczególne gałęzie tangensoidy, przedłużane, zbliżają się do asymptot dowolnie blisko, ale nie przecinają ich.

Dziedziną funkcji tangens jest suma przedziałów

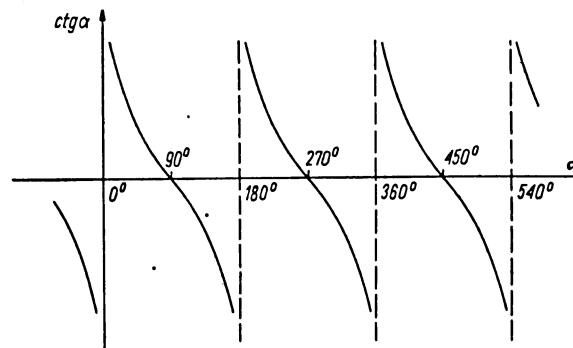
$$..., (-90^\circ; +90^\circ), (90^\circ; 270^\circ), (270^\circ; 540^\circ), ...$$

W każdym z tych przedziałów tangens rośnie od  $-\infty$  do  $+\infty$ . W punktach rozgraniczających te przedziały tangens jest nieokreślony, a w sąsiedztwie tych punktów nieograniczony.



Rys. 104-4. Wykres funkcji  $\operatorname{tg} \alpha$

Tangensoida przecina oś odciętych w punktach odpowiadających miarom stopniowym kątów, dla których tangens przybiera wartość 0; kąty takie są dwa: zerowy i półpełny, ich miary wyraża wzór  $k \cdot 180^\circ$ , gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą.



Rys. 104-5. Wykres funkcji  $\operatorname{ctg} \alpha$

**Cotangensoida**, czyli wykres funkcji cotangens (rys. 104-5) jest krzywą odwrotnie przystającą do tangensoidy. Asymptoty cotangensoidy odpowiadają innym kątom niż asymptoty tangensoidy. Cotangens jest funkcją malejącą w każdym ze swych przedziałów istnienia.

## 105. Tożsamości trygonometryczne

Poniżej podajemy około 30 tożsamości trygonometrycznych, których biegłe opamiętanie, wraz z dowodami, uważamy za niezbędne. Tożsamości te dzielą się na kilka grup. Poszczególne tożsamości mają nazwy, których brzmienia są

niekiedy podobne, np. „sinus sumy” i „suma sinusów”, ale znaczenia ich są różne, gdyż wyrażenia takie jak

sinus sumy

$$\sin(\alpha + \beta)$$

suma sinusów

$$\sin \alpha + \sin \beta$$

są na ogół nierówne np., dla  $\alpha = \beta = 90^\circ$  pierwsze z nich przybiera wartość 0 a drugie — wartość 2.

### Funkcje sumy kątów

**Zagadnienie.** Uważając wartości funkcji trygonometrycznych kątów  $\alpha$  i  $\beta$

$$\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha, \cos \beta, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta$$

za wiadome wyrazić przez nie wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha + \beta$

$$\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta), \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$$

**Twierdzenie.** Funkcje trygonometryczne sumy dwóch kątów wyrażają się następującymi wzorami:

$$\text{sinus sumy} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (105.1)$$

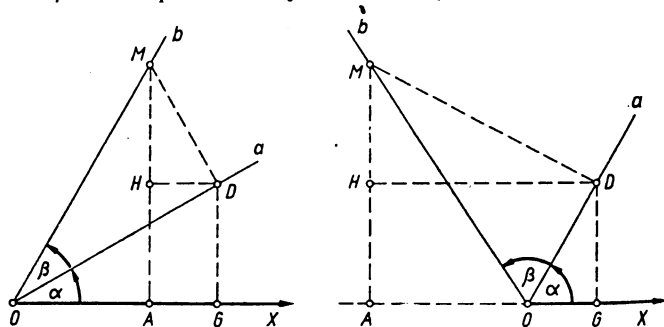
$$\text{cosinus sumy} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (105.2)$$

$$\text{tangens sumy} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (105.3)$$

Pierwsze dwa wzory są prawdziwe dla wszelkich  $\alpha$  i  $\beta$ . Wzór na tangens sumy jest prawdziwy dla wszystkich  $\alpha, \beta$ , oprócz tych, dla których  $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta$  lub  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  jest nieokreślony.

**Dowód** wzorów (105.1) i (105.2). Rozważymy następujące przypadki

1. Przypadek, gdy jeden z kątów  $\alpha, \beta$  jest zerowy lub prosty. Wówczas prawdziwość wzorów jest oczywista albo wynika ze wzorów redukcyjnych. Jeśli np.  $\beta = 0$ , to po lewej stronie wzoru (105.1) mamy  $\sin \alpha$ , a po prawej  $\sin \alpha \cos 0 + \cos \alpha \sin 0 = \sin \alpha$  i wzór jest prawdziwy. Jeśli zaś  $\beta = 90^\circ$ , to wzór ten przybiera postać  $\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$ , co jest zgodne ze wzorem redukcyjnym (102.6). Także przypadek  $\alpha + \beta = 90^\circ$  sprowadza się do wzorów (102.4).



Rys. 105-1

2. Przypadek, gdy  $\alpha$  i  $\beta$  należą do I ćwiartki. Wówczas  $\alpha + \beta$  należy do I lub II ćwiartki (rys. 105-1). W układzie  $OXY$  kreślimy kąt  $\alpha$  w położeniu standardowym, a kąt  $\beta$  kreślimy tak, aby półprosta  $a$  będąca końcowym ramieniem kąta  $\alpha$ , była jednocześnie początkowym ramieniem kąta  $\beta$ . Wówczas półprosta  $b$  będąca końcowym ramieniem kąta  $\beta$ , jest jednocześnie końcowym ramieniem kąta  $\alpha + \beta$  i kąt ten ma położenie standardowe. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

- na półprostej  $b$  obieramy punkt  $M$  różny od  $O$ ;
- rzut punktu  $M$  na  $OX$  oznaczamy  $A$ ;
- rzut punktu  $M$  na półprostą  $a$  oznaczamy  $D$ ;
- rzut punktu  $D$  na oś  $OX$  oznaczamy  $G$ ;
- rzut punktu  $D$  na odcinek  $AM$  oznaczamy  $H$ .

Zgodnie z definicją sinusa jest  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\text{miara } \overline{AM}}{OM}$ . Ponieważ  $\overline{AM} = \overline{AH} + \overline{HM}$  i wektory  $\overline{AH}, \overline{HM}$  są skierowane zgodnie z  $Oy$ , więc miara  $\overline{AM} = AH + HM$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{\text{miara } \overline{AM}}{OM} = \frac{AH + HM}{OM} = \frac{GD + HM}{OM} = \frac{GD}{OM} + \frac{HM}{OM} = \\ &= \frac{GD}{OD} \cdot \frac{OD}{OM} + \frac{HM}{MD} \cdot \frac{MD}{OM} \end{aligned}$$

Ponieważ  $\frac{GD}{OD} = \sin \alpha$ ,  $\frac{OD}{OM} = \cos \beta$ ,  $\sphericalangle HMD = \sphericalangle GOD = \alpha$ , skąd  $\frac{HM}{MD} = \cos \alpha$  i wreszcie  $\frac{MD}{OM} = \sin \beta$ , więc  $\frac{GD}{OD} \cdot \frac{OD}{OM} + \frac{HM}{MD} \cdot \frac{MD}{OM} = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ , co dowodzi prawdziwości wzoru (105.1).

W dowodzie wzoru (105.2) korzystamy z tego, że  $\overline{OA} = \overline{OG} + \overline{GA} = \overline{OG} - \overline{AG}$ . Wektory  $\overline{OG}, \overline{AG}$  są skierowane zgodnie z osią  $OX$ , więc miara  $\overline{OA} = OG - AG$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \frac{\text{miara } \overline{OA}}{OM} = \frac{OG - AG}{OM} = \frac{OG}{OM} - \frac{AG}{OM} = \frac{OG}{OM} - \frac{HD}{OM} = \\ &= \frac{OG}{OD} \cdot \frac{OD}{OM} - \frac{HD}{MD} \cdot \frac{MD}{OM} \end{aligned}$$

Dzięki związkom wymienionym powyżej, otrzymane wyrażenie równa się  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , co dowodzi prawdziwości wzoru (105.2).

3. Przypadek, gdy  $\alpha$  lub  $\beta$  nie należą do I ćwiartki. Przypadek taki sprowadza się do poprzedniego za pomocą wzorów redukcyjnych. Nie będziemy rozważać tu wszystkich możliwości. Dla przykładu weźmiemy przypadek, gdy  $\alpha$  jest kątem II, a  $\beta$  kątem I ćwiartki. Wówczas  $\alpha = 90^\circ + \alpha'$ , gdzie  $\alpha'$  jest kątem I ćwiartki i  $\alpha' = \alpha - 90^\circ$ .

Wychodząc od lewej strony wzoru (105.1), mamy

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[(90^\circ + \alpha') + \beta] = \sin[90^\circ + (\alpha' + \beta)] = \cos(\alpha' + \beta)$$

Stosując wzór (105.2), już udowodniony dla kątów I ćwiartki, mamy

$$\cos(\alpha' + \beta) = \cos \alpha' \cos \beta - \sin \alpha' \sin \beta$$

Wracając do kąta  $\alpha$ , zapiszemy otrzymane wyrażenie w postaci

$$\cos(\alpha - 90^\circ) \cos \beta - \sin(\alpha - 90^\circ) \sin \beta$$

Dzięki wzorom redukcyjnym  $\cos(\alpha - 90^\circ) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ,  $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$  możemy otrzymane wyrażenie zapisać w postaci

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

ale to jest prawa strona wzoru (105.1) i w ten sposób wzór ten został w tym przypadku udowodniony.

**Dowód wzoru (105.2)** w tym przypadku — pozostawiamy Czytelnikowi.

**Dowód wzoru (105.3)** Wzór ten wynika ze wzorów (105.1) i (105.2):

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

W otrzymanym ułamku dzielimy licznik i mianownik przez  $\cos \alpha \cos \beta$  i otrzymujemy

$$\frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

co kończy dowód.

**Funkcje różnicy kątów.** Zastępując we wzorach (105.1) — (105.3) kąt  $\beta$  kątem  $-\beta$  i stosując wzory redukcyjne  $\cos(-\beta) = \cos \beta$ ,  $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ , otrzymujemy

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (105.4)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (105.5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (105.6)$$

**Funkcje kąta podwójnego.** Podstawiając we wzorach (105.1) — (105.3)  $\beta = \alpha$ , otrzymujemy

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (105.7)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (105.8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (105.9)$$

Korzystając z „jedności trygonometrycznej”, można  $\cos 2\alpha$  wyrazić w postaciach

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (105.10)(105.11)$$

Jeśli we wzorach (105.7) — (105.11) kąt  $\alpha$  zastąpimy kątem  $\frac{\alpha}{2}$ , to otrzymamy wzory

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (105.12)$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (105.13)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (105.14)$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \quad (105.15) \quad (105.16)$$

**Funkcje połowy kąta.** Zagadnienie: Uważając wartości  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  za wiadome, wyrazić przez nie wartości  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

**Cosinus i sinus połowy kąta.** Z równości (105.15) i (105.16) otrzymujemy

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (105.17)(105.18)$$

Postawiliśmy w nich  $\pm$ , gdyż oba znaki są możliwe i wybrać należy znak  $+$  lub  $-$  zależnie od tego, w której ćwiartce leży kąt  $\frac{\alpha}{2}$ .

**Tangens połowy kąta** otrzymujemy, dzieląc (105.18) przez (105.17)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (105.19)$$

Tangens połowy kąta można wyrazić przez tangens kąta, rozwiązując równanie (105.14) względem  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (105.20)$$

Wadą wzorów (105.19) i (105.20) jest dwoistość znaku i postać niewymierna (pierwiastek). Wolne od tych wad są wzory

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (105.21) \quad (105.22)$$

**Dowód wzoru (105.21)**

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{wzór (105.15)}}{\text{wzór (105.12)}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

**Dowód wzoru (105.22)** jest analogiczny, pozostawiamy go Czytelnikowi.

**Wymierne wyrażenie funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta przez tangens połowy tego kąta.** Przyjmując oznaczenie

$$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (105.23)$$

otrzymujemy następujące tożsamości

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2} \quad (105.24) \quad (105.25) \quad (105.26)$$

**Dowód wzoru (105.24)**

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin 2 \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

**Dowód wzoru (105.25)**, analogiczny, pozostawiamy Czytelnikowi. Wzór (105.26) otrzymujemy, dzieląc (105.24) przez (105.25).

**Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych wyrażają się wzorami**

$$\text{suma sinusów} \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (105.27)$$

$$\text{różnica sinusów} \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (105.28)$$

$$\text{suma cosinusów} \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (105.29)$$

$$\text{różnica cosinusów} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (105.30)$$

**Dowód wzoru (105.27).** Wprowadzenie zmiennych pomocniczych. Do dwóch danych liczb  $\alpha, \beta$  można zawsze dobrać takie dwie liczby  $x, y$ , że

$$\alpha = x + y \quad \beta = x - y$$

Liczbami tymi są

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Korzystając ze wzorów na funkcje sumy i różnicy kątów, mamy

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin(x + y) + \sin(x - y) = \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = \\ &= 2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Podobnie udowadnia się pozostałe wzory tej grupy.

Analogiczne wzory na sumę i różnicę tangensów i cotangensów wyprowadza się łatwo, np.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \end{aligned} \quad (105.31)$$

Powyższe wzory pozwalają sprawdzić sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do postaci iloczynu, który jest wygodny przy stosowaniu logarytmów. Tego rodzaju przekształcenia nazywamy sprowadzeniem do postaci *logarytmowalnej*.

## Pytania i zadania

- Napisać z pamięci wzory na funkcje sumy, funkcje różnicy i funkcje kąta podwójnego. Udowodnić te wzory.
- Mając w pamięci wartości funkcji trygonometrycznych kątów  $30^\circ, 45^\circ$  i  $60^\circ$  obliczyć bez pomocy tablic za pomocą wzorów na funkcje sumy i funkcje różnicy następujące wartości:  
a)  $\sin 75^\circ$ ; b)  $\cos 75^\circ$ ; c)  $\operatorname{tg} 75^\circ$ ; d)  $\cos 44^\circ \cos 14^\circ + \sin 44^\circ \sin 14^\circ$ ;  
e)  $\frac{\operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 80^\circ \operatorname{tg} 20^\circ}$ ; f)  $\frac{\operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}{1 - \operatorname{tg} 100^\circ \operatorname{tg} 50^\circ}$ .
- Obliczyć  $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha$  i  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , jeśli  $\sin \alpha = 0,1$ .
- Wyprowadzić wzory na cosinus i sinus połowy kąta.
- Znając wartość  $\cos 45^\circ$ , obliczyć za pomocą wzorów na funkcje połowy kąta cosinus, sinus i tangens kąta  $22^\circ 30'$ .
- Obliczyć  $\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}$  i  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  jeśli wiadomo, że  
a)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < 180^\circ$ ; b)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}, 180^\circ < \alpha < 360^\circ$ ;  
c)  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}, |\alpha| < 180^\circ$
- Wyprowadzić wzory wyrażające funkcje kąta przez tangens połowy kąta.
- Obliczyć  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ , jeśli  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ .
- Wyprowadzić wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych.
- Stosując wzory na sumę i różnicę funkcji obliczyć:  
a)  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$  b)  $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$   
c)  $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$  d)  $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$
- Sprowadzić do postaci logarytmowalnej następujące wyrażenia:  
a)  $\sin 320^\circ - \sin 240^\circ$ ; b)  $1 + \cos 80^\circ$ ; c)  $1 + \sin 2\alpha$ ; d)  $\sin \alpha + \cos \alpha$ ;  
e)  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ ; f)  $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$ ; g)  $\sin 20^\circ - \cos 50^\circ$ ; h)  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta$ .

## 12. Udowodnić tożsamości:

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (105.32) \quad (105.33)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta} \quad (105.34) \quad (105.35)$$

## 106. Tożsamości trygonometryczne (ciąg dalszy)

**Tożsamości bezwarunkowe.** Tożsamością bezwarunkową nazywamy równość zawierającą pewne zmienne i prawdziwą dla wszelkich wartości tych zmiennych, dla których występujące w tej równości wyrażenia mają sens.

Istnieje wiele tożsamości trygonometrycznych. Wynikają one z definicji i związków podstawowych, niektóre z nich są oczywiste, np.

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \beta$$

inne, np. wyrażenie sinus i cosinusa potrójnego kąta przez sinus i cosinus pojedynczego kąta

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad (106.1) \quad (106.2)$$

wymagają dłuższego dowodu. Nie jest konieczne pamiętanie tych tożsamości, ale trzeba umieć udowodnić je.

Aby udowodnić tożsamość, poddajemy przekształceniom jedną stronę tożsamości, korzystając ze wzorów ust. 100, 102 i 105, i staramy się sprowadzić ją do postaci, którą ma druga strona. Można też każdą z dwóch stron tożsamości przekształcać oddzielnie, aby obie doprowadzić do tej samej postaci.

Czytelnik zechce udowodnić poniższe tożsamości:

$$\begin{aligned} \sin^4 y - \cos^4 y &= 2 \sin^2 y - 1 & \operatorname{tg} x \sin 2x &= 2 \sin^2 x \\ \frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} &= \frac{2}{\cos^2 x} & \frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} &= \operatorname{tg} 4x \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{x}{2} \right) + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \quad \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + 45^\circ \right) - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad \operatorname{tg}(45^\circ + x) \operatorname{tg}(45^\circ - x) = 1$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \sin \alpha &= \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha) & \cos \alpha - \sin \alpha &= \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha) \\ \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2}{\sin 2\alpha} & \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha &= 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \quad \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$$

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \cos \frac{n\alpha}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \sin \frac{n\alpha}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin (2n-1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin \alpha} \quad (106.3)$$

W dowodzie ostatnich czterech tożsamości należy posłużyć się indukcją. Dla przykładu udowodnimy ostatnią tożsamość.

**Dowód indukcyjny.** Sprawdzenie dla  $n = 1$ . Dla  $n = 1$  tożsamość ta przybiera postać

$$\sin \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$$

i jest rzeczywiście prawdziwa.

Krok indukcyjny (z  $n$  na  $n+1$ ). W równości (106.3) zastępujemy  $n$  przez  $n+1$  otrzymujemy w ten sposób równość

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin (2n-1)\alpha + \sin (2n+1)\alpha = \frac{\sin^2(n+1)\alpha}{\sin \alpha} \quad (106.4)$$

Należy wykazać, że dla dowolnego  $n$  naturalnego zachodzi implikacja

$$(106.3) \Rightarrow (106.4) \quad (\text{krok indukcyjny})$$

Otóż po lewej stronie równości (106.4) występuje  $n+1$  składników. Sumę  $n$  początkowych składników można na podstawie (106.3) zastąpić wyrazem  $\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin \alpha}$ . Jeśli to uczynimy, to lewa strona równości (106.4) przyjmie postać

$$\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin \alpha} + \sin (2n+1)\alpha$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i podstawieniu

$$\sin n\alpha = \sin [(n+1)\alpha - \alpha] = \sin (n+1)\alpha \cos \alpha - \cos (n+1)\alpha \sin \alpha$$

$$\sin (2n+1)\alpha = \sin [(2n+2)\alpha - \alpha] = \sin (2n+2)\alpha \cos \alpha - \cos (2n+2)\alpha \sin \alpha$$

oraz po wykonaniu działań, przy czym do  $\sin (2n+2)\alpha$  i  $\cos (2n+2)\alpha$  należy stosować wzory (105.7) i (105.8) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\sin^2(n+1)\alpha}{\sin \alpha}$$

czyli prawą stronę równości (106.4). Dowód zakończony.

**Tożsamości trygonometryczne warunkowe** są to równości prawdziwe dla kątów spełniających pewien warunek, np.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{dla} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \quad \text{dla} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Warunek  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  jest spełniony przez kąty dowolnego trójkąta, ale jest ogólniejszy, gdyż jest spełniony też przez kąty nie występujące w trójkącie, np.  $\alpha = 120^\circ$ ,  $\beta = 150^\circ$ ,  $\gamma = -90^\circ$ . Podajemy dowód pierwszej z tych dwóch tożsamości. Z podanego warunku wynika  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$  zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= - \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$

## 107. Równania trygonometryczne

**Równaniem trygonometrycznym** (także: **goniometrycznym**) nazywamy równanie, w którym niewiadome występują wyłącznie pod znakami funkcji trygonometrycznych. Oto przykłady równań trygonometrycznych

$$5 \sin x - 3 = 0 \quad (107.1)$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \quad (107.2)$$

$$\operatorname{tg}^3 x - 4 \operatorname{tg} x = 0 \quad (107.3)$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - 2 \sin x = 0 \quad (107.4)$$

$$\sin 2x + \sin x = 0 \quad (107.5)$$

Równania, w których niewiadoma  $x$  występuje dwójako: pod znakiem funkcji trygonometrycznej i bez niej, np.

$$x + \sin x - 1 = 0$$

nie są zaliczane do równań trygonometrycznych i nie będziemy się nimi zajmować.

Omawiając równania trygonometryczne, zajmiemy się najpierw stroną teoretyczną (sprecyzowanie zagadnienia i wprowadzenie terminów), a potem stroną praktyczną (technika rozwiązywania).

**Sprecyzowanie zagadnienia.** Możliwa jest dwójaka interpretacja równania trygonometrycznego. Według pierwszej rozwiązaniem równania trygonometrycznego jest kąt skierowany (w położeniu standardowym na danej płaszczyźnie), według drugiej – miara kąta skierowanego.

Ponieważ wyznaczenie kąta jest podstawą do wyznaczenia wszystkich miar tego kąta, wprowadzamy następujące dwa terminy odnoszące się do równań trygonometrycznych:

**rozwiązanie podstawowe** – jest to zbiór wszystkich kątów skierowanych (w położeniu standardowym na danej płaszczyźnie) spełniających dane równanie,

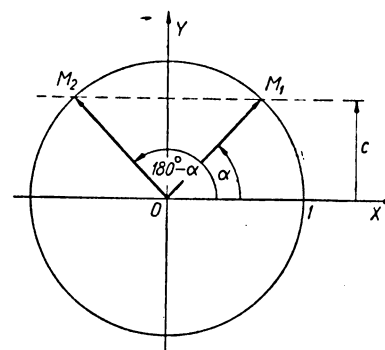
**rozwiązanie ogólne** – jest to zbiór wszystkich miar wszystkich kątów skierowanych spełniających dane równanie (wszystkie miary tych kątów podajemy przy tej samej jednostce).

**Przykład 1.** Rozwiązać równanie

$$\sin x = c \quad (107.6)$$

gdzie  $c$  jest daną liczbą o wartości bezwzględnej mniejszej od 1.

Wyznaczenie kątów. Przecinając koło trygonometryczne odpowiednią prostą (rys. 107-1), otrzymujemy dokładnie dwa kąty  $\angle XOM_1$  i  $\angle XOM_2$  spełniające równanie. Każdy z tych dwóch kątów możemy określić za pomocą którejkolwiek



Rys. 107-1

z jego miar stopniowych, np. za pomocą miary głównej. Jeśli jeden z tych kątów ma miarę  $\alpha$ , to drugi ma miarę  $180^\circ - \alpha$ .

**Rozwiązanie podstawowe**

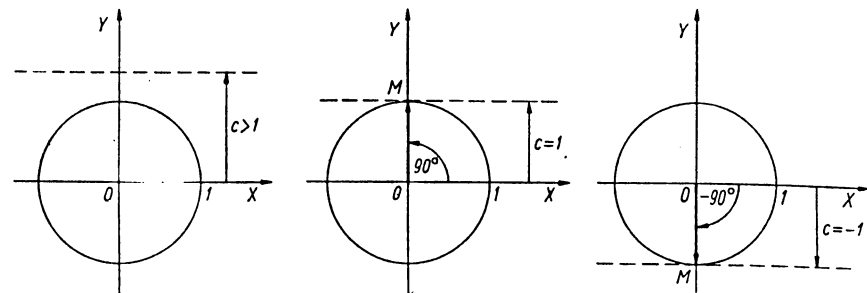
$$x_1 = \alpha \quad x_2 = 180^\circ - \alpha$$

Wyznaczenie miar kątów. Wszystkie miary stopniowe danego kąta otrzymamy, jeśli do jednej miary tego kąta dodamy dowolną całkowitą wielokrotność  $360^\circ$ . **Rozwiązanie ogólne**

$$x_1 = \alpha + k \cdot 360^\circ \quad x_2 = 180^\circ - \alpha + k \cdot 360^\circ$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą.

Uwaga. Dla  $|c| > 1$  równanie (107.6) nie ma rozwiązań. Dla  $c = 1$  jedynie kąt o mierze  $+90^\circ$ , a dla  $c = -1$  jedynie kąt o mierze  $-90^\circ$  spełnia to równanie (rys. 107-2).



Rys. 107-2

Równanie (107.1) sprowadza się do równania (107.6) i jest  $c = \frac{3}{5}$ . Z tablicy II odczytujemy (z dokładnością do  $1^\circ$ )  $\alpha = 37^\circ$ . Zatem rozwiązanie ogólne  $x = 37^\circ + k \cdot 360^\circ$  lub  $x = 143^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  $k$  – dowolna l. całkowita.

**Definicja 107.1.** Każde z poniższych równań

$$\sin x = c \quad \cos x = c \quad \operatorname{tg} x = c \quad \operatorname{ctg} x = c$$

gdzie  $c$  jest dowolną liczbą daną, nazywamy *równaniem trygonometrycznym elementarnym*.

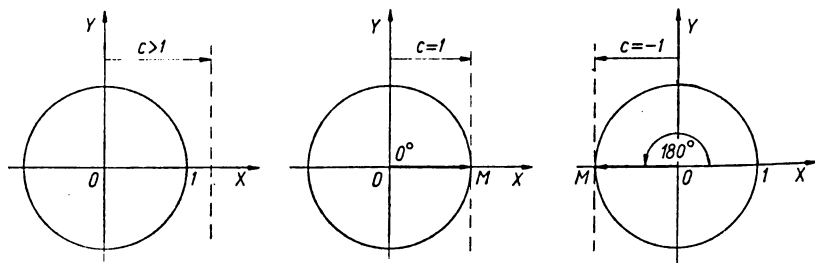
Równanie (107.6) jest równaniem trygonometrycznym elementarnym. Poniżej rozwiążemy jeszcze dwa równania trygonometryczne elementarne.

**Przykład 2.** Rozwiązać równanie

$$\cos x = c \quad (107.7)$$

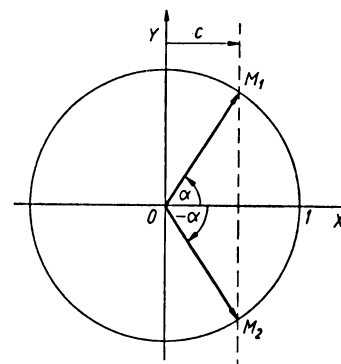
Wyznaczenie kątów. Kreśląc koło trygonometryczne i odpowiednią prostą (rys. 107-3) widzimy, że:

- dla  $|c| > 1$  równanie nie ma rozwiązania;
- dla  $c = 1$  jedynym rozwiązaniem jest kąt zerowy;



Rys. 107-3

- dla  $c = -1$  jedynym rozwiązaniem jest kąt półpełny;
- dla  $|c| < 1$  istnieją dokładnie dwa kąty skierowane, wzajemnie przeciwne, spełniające dane równanie; jeśli miarę jednego z nich oznaczmy  $\alpha$ , to miarę drugiego jest  $-\alpha$  (rys. 107-4).



Rys. 107-4

Równanie  $\cos x = c$

| Przypadek | Rozwiązanie podstawowe         | Rozwiązanie ogólne               |
|-----------|--------------------------------|----------------------------------|
| $ c  > 1$ | zbiór pusty                    | zbiór pusty                      |
| $c = 1$   | 0                              | $k \cdot 360^\circ$              |
| $c = -1$  | $180^\circ$                    | $180^\circ + k \cdot 360^\circ$  |
| $ c  < 1$ | $x = \alpha$ lub $x = -\alpha$ | $\pm \alpha + k \cdot 360^\circ$ |

**Przykład numeryczny.** Równanie  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Rozwiązanie podstawowe  $x = 60^\circ$  lub  $x = -60^\circ$ . Rozwiązanie ogólne  $x = \pm 60^\circ + k \cdot 360^\circ$ .

**Przykład 3.** Rozwiązać równanie

$$\operatorname{tg} x = c \quad (107.8)$$

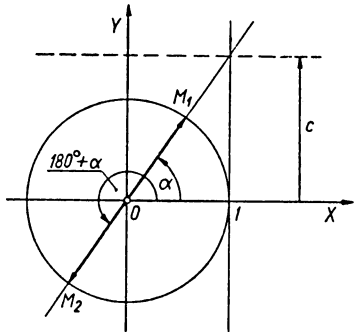
Wyznaczenie kątów. Wiemy, że  $\operatorname{tg} x$  jest funkcją rosnącą w przedziale  $(-90^\circ; +90^\circ)$  od  $-\infty$  do  $+\infty$ . Zatem dla dowolnej wartości  $c$  istnieje w tym przedziale dokładnie jeden kąt spełniający (107.8). Oznaczmy jego miarę  $\alpha$ . Drugi kąt spełniający to równanie ma miarę  $\alpha + 180^\circ$  (rys. 107-5).

Rozwiązanie podstawowe:  $x = \alpha$  lub  $x = \alpha + 180^\circ$ .

Rozwiązanie ogólne:  $x = \alpha + k \cdot 360^\circ$  lub  $x = \alpha + 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ , co można krócej zapisać w jednym wzorze

$$x = \alpha + k \cdot 180^\circ \quad k - \text{dow. l. całkow.}$$

**Przykład numeryczny.** Równanie  $\operatorname{tg} x = 2$ . Rozwiązanie podstawowe (odczytane z tablic z dokładnością do  $1^\circ$ )  $x = 64^\circ$  lub  $x = 64^\circ + 180^\circ$ .  
 Rozwiązanie ogólne  $x = 64^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  $k$  – dowol. l. całkow.



Rys. 107-5

**Technika rozwiązywania równań trygonometrycznych.** Poniżej podamy kilka wskazówek praktycznych.

Zauważmy, że w każdym z równań (107.1) – (107.3) występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna i tylko jeden argument  $x$  tej funkcji. O takim równaniu mówimy, że jest w nim *jedność funkcji* i *jedność argumentu*. Wprowadzając za pomocą stosownego oznaczenia zmienną pomocniczą, otrzymujemy równanie o zmiennej pomocniczej, które już nie jest trygonometryczne, lecz zwykłe liczbowe, zazwyczaj algebraiczne.

**Przykład 4.** W poniższych tabelkach pokazano jednoczesne rozwiązanie równań (107.1) – (107.3).

| Równanie trygonometryczne |                                                     | Oznaczenie                | Równanie o zmiennej pomocniczej |
|---------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| 107.1                     | $5 \sin x - 3 = 0$                                  | $\sin x = s$              | $5s - 3 = 0$                    |
| 107.2                     | $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$                       | $\cos x = z$              | $2z^2 - z - 1 = 0$              |
| 107.3                     | $\operatorname{tg}^3 x - 4 \operatorname{tg} x = 0$ | $\operatorname{tg} x = t$ | $t^3 - 4t = 0$                  |

Po rozwiązaniu równania o zmiennej pomocniczej, otrzymujemy jego pierwiastki

|       | Pierwiastki równania o zmiennej pomocniczej |
|-------|---------------------------------------------|
| 107.1 | $s = \frac{3}{5}$                           |
| 107.2 | $z = 1$ lub $z = -\frac{1}{2}$              |
| 107.3 | $t = 0$ lub $t = 2$ lub $t = -2$            |

Każdy pierwiastek równania o zmiennej pomocniczej wstawiony do równości wprowadzającej tę zmienną, daje odpowiednie równanie trygonometryczne elementarne

| Równanie trygonometryczne elementarne |                                                                                        | Rozwiązanie podstawowe                                   |                          |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------|
| 107.1                                 | $\sin x = \frac{3}{5}$                                                                 | $37^\circ$                                               | $143^\circ$              |
| 107.2                                 | $\cos x = 1$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$                                               | $0^\circ$                                                | $120^\circ$ $-120^\circ$ |
| 107.3                                 | $\operatorname{tg} x = 0$ lub $\operatorname{tg} x = 2$ lub $\operatorname{tg} x = -2$ | $0^\circ$ $180^\circ$ $64^\circ$ $244^\circ$ $116^\circ$ | $296^\circ$              |

Mając rozwiązanie podstawowe, łatwo już napisać rozwiązanie ogólne.

Może się zdarzyć, że równanie o zmiennej pomocniczej nie ma pierwiastków. Może się zdarzyć też, że pierwiastek równania pomocniczego daje równanie trygonometryczne elementarne nie mające pierwiastków.

Z kolei zajmijmy się równaniem, w którym jest *jedność argumentu*, ale nie ma *jedności funkcji*. Jedność funkcji wprowadzamy, korzystając ze związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu, co pokażemy na następującym przykładzie.

**Przykład 5.** Rozwiązać równanie

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - 2 \sin x = 0 \tag{107.4}$$

Podstawiając  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  usuwamy z równania tangens

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2 \sin x = 0$$

Podstawiając  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , usuwamy cosinus

$$\frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} - 2 \sin x = 0$$

i osiągamy jedność funkcji przy zachowaniu jedności argumentu. Dalej postępujemy, jak w poprzednich przykładach. Stosujemy podstawienie

$$\sin x = s$$

i otrzymujemy równanie o zmiennej pomocniczej

$$\frac{s}{1 - s^2} - 2s = 0$$

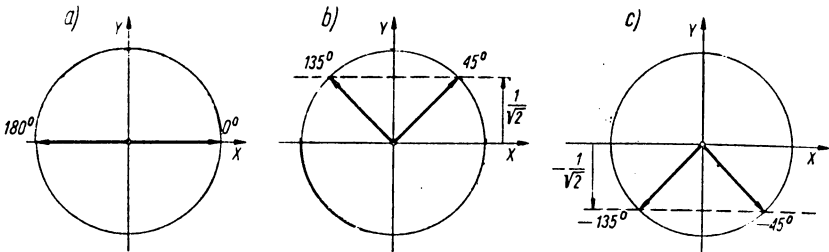
Rozwiązując to równanie, wyznaczamy jego pierwiastki

$$s = 0 \quad \text{lub} \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad s = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Podstawiając te wartości na  $s$  do równania  $\sin x = s$ , otrzymujemy równania elementarne

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad \sin x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Rozwiązując równania elementarne (rys. 107-6) otrzymujemy rozwiązanie podstawowe



Rys. 107-6

$$x = 0^\circ \text{ lub } 180^\circ \text{ lub } 45^\circ \text{ lub } 135^\circ \text{ lub } -45^\circ \text{ lub } -135^\circ$$

Rozwiązanie ogólne otrzymamy, dodając do każdej z tych liczb dowolną wielokrotność  $360^\circ$ .

Wreszcie zajmiemy się równaniem, w którym *nie ma jedności argumentu*. Równanie zawierające funkcje trygonometryczne różnych argumentów:  $x, 2x, 3x \dots$  wymaga na wstępie stosowania takich wzorów, aby w równaniu pozostał w końcu jeden argument. Może to być jeden z występujących argumentów, np.  $x$ , ale może to być też jakiś inny, np.  $\frac{x}{2}$ . Po wprowadzeniu jedności argumentu można przystąpić do wprowadzania jedności funkcji.

**Przykład 6.** Rozwiązać równanie

$$\sin 2x + \sin x = 0 \tag{107.5}$$

Podstawiając  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , otrzymujemy jedność argumentu

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x + \sin x &= 0 \\ \sin x (2 \cos x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Sprowadzenie do jedności funkcji okazuje się tu zbędne, gdyż równanie jest równoważne alternatywie dwóch równań elementarnych

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązanie podstawowe

$$x = 0^\circ \text{ lub } x = 180^\circ \text{ lub } x = 120^\circ \text{ lub } x = -120^\circ$$

**Schematy logiczne rozwiązywania równań.** Sprowadzanie równania trygonometrycznego do jedności argumentu i jedności funkcji jest na ogół pożyteczne, ale w niektórych równaniach nie korzysta się z niego. Natomiast ogólnie obowiązujące są *schematy logiczne* rozwiązywania równań, a znamy dwa takie schematy:

- metoda równań równoważnych,
- metoda analizy starożytnych.

*Metoda równań równoważnych* polega na zbudowaniu ciągu równań, który zaczyna się od równania danego, w którym każde następne równanie jest *równoważne* poprzedniemu, i który kończy się równaniem *ewidentnym*, tj. takim, którego pierwiastki można łatwo odczytać. Tę metodę stosowaliśmy w przykładach 1-6. W metodzie równań równoważnych sprawdzanie pierwiastków nie jest wymagane, ale przy każdorazowym przechodzeniu od jednego równania do następnego trzeba upewnić się, że równanie to jest równoważne poprzedniemu. Jest to niekiedy uciążliwe i wymaga czynienia po drodze różnych zastrzeżeń.

*Metoda analizy starożytnych* polega na zbudowaniu ciągu równań, który zaczyna się od równania danego, w którym każde następne równanie *wynika* z poprzedniego, a ostatnie jest równaniem ewidentnym.

Ten schemat logiczny zapewnia, że jeśli równanie dane posiada jakiś pierwiastek, to może nim być tylko jeden z pierwiastków równania końcowego, ale bynajmniej nie zapewnia, że każdy pierwiastek równania końcowego musi być pierwiastkiem równania danego. Dlatego każdy pierwiastek równania końcowego może być uznany za pierwiastek równania danego dopiero po sprawdzeniu.

W metodzie tej nie trzeba czynić po drodze żadnych zastrzeżeń, ale sprawdzanie pierwiastków jest obowiązujące.

**Przykład 7.** Rozwiązać równanie

$$\sin x + 1 = \cos x \tag{107.9}$$

Aby usunąć z równania cosinus, podnosimy do kwadratu obie strony

$$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = \cos^2 x$$

i korzystamy z „jedności trygonometrycznej”

$$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 1 - \sin^2 x$$

Wprowadzając zmienną pomocniczą podstawieniem

$$\sin x = s \tag{107.10}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} s^2 + 2s + 1 &= 1 - s^2 \\ 2s^2 + 2s &= 0 \\ s(s + 1) &= 0 \\ s = 0 \text{ lub } s &= -1 \end{aligned}$$

Wstawiając te wartości do (107.10), otrzymujemy

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1 \quad (107.11)$$

Jest to równanie końcowe; równanie to ma rozwiązanie podstawowe

$$x = 0^\circ \quad \text{lub} \quad x = 180^\circ \quad \text{lub} \quad x = 270^\circ$$

Sprawdzenie. Podstawiając te wartości kolejno do (107.9), widzimy, że

$$\begin{aligned} x = 0^\circ & \text{ daje } 0+1 = 1, \text{ a więc sprawdza} \\ x = 180^\circ & \text{ daje } 0+1 = -1, \text{ a więc nie sprawdza} \\ x = 270^\circ & \text{ daje } -1+1 = 0, \text{ a więc sprawdza} \end{aligned}$$

Odpowiedź:  $x = k \cdot 360^\circ$  lub  $x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$  ( $k$  — dow. l. całk.)

**Przykład 8.** Rozwiązać równanie

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (107.12)$$

Jest to równanie trygonometryczne elementarne względem kąta  $3x$ . Kąt ten możemy łatwo wyznaczyć

$$3x = 60^\circ \quad \text{lub} \quad 3x = 120^\circ$$

ale dla wyznaczenia  $x$  trzeba zastosować dzielenie kąta (zob. str. 83). Jest to działanie wieloznaczne, a wieloznaczność ta jest związana z wieloznacznością miary kąta. Kłopotów związanych z wieloznacznością dzielenia kąta unikniemy, jeśli przejdziemy od razu do miary wieloznacznej kąta  $3x$  (niech  $k$  będzie dowolną liczbą całkowitą)

$$3x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 3x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (107.12)

$$x = 20^\circ + k \cdot 120^\circ \quad \text{lub} \quad x = 40^\circ + k \cdot 120^\circ$$

**Przykład 9.** Rozwiązać równanie

$$\operatorname{tg} 3x = 1 \quad (107.13)$$

Postępując jak w przykładzie 3, dostajemy

$$3x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ \quad k \text{ — dow. l. całk.}$$

Stąd

$$x = 15^\circ + k \cdot 60^\circ \quad k \text{ — dow. l. całk.}$$

**Przykład 10.** Rozwiązać równanie

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \quad (107.14)$$

Stosujemy wzór na sumę cosinusów kątów  $x$  i  $5x$

$$(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x = 0$$

$$2 \cos \frac{x+5x}{2} \cos \frac{x-5x}{2} + \cos 3x = 0$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos(-2x) + \cos 3x = 0$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$\cos 3x (2 \cos 2x + 1) = 0$$

Stąd wnosimy, że musi być

$$\cos 3x = 0 \quad \text{lub} \quad 2 \cos 2x + 1 = 0$$

czyli

$$\cos 3x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 2x = -0,5$$

Wyznaczamy rozwiązanie ogólne

$$3x = \pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 2x = \pm 120^\circ + n \cdot 360^\circ$$

gdzie  $n$  jest dowolną liczbą całkowitą. Wynik ten można zapisać w postaci

$$3x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad 2x = \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą. Stąd dostajemy

$$x = 30^\circ + k \cdot 60^\circ \quad \text{lub} \quad x = \pm 60^\circ + k \cdot 180^\circ$$

**Przykład 11.** Rozwiązać równanie

$$\cos 5x + \sin x = 0 \quad (107.15)$$

Aby móc stosować wzory na sumę funkcji, należy uprzednio jedną z funkcji zastąpić kofunkcją

$$\cos 5x + \cos(90^\circ - x) = 0$$

$$2 \cos \frac{5x + (90^\circ - x)}{2} \cos \frac{5x - (90^\circ - x)}{2} = 0$$

$$2 \cos(2x + 45^\circ) \cos(3x - 45^\circ) = 0$$

$$\cos(2x + 45^\circ) = 0 \quad \text{lub} \quad \cos(3x - 45^\circ) = 0$$

$$2x + 45^\circ = \pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 3x - 45^\circ = \pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ$$

gdzie  $n$  jest dowolną liczbą całkowitą. Powyższy wynik można też zapisać w postaci

$$2x + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad 3x - 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą. Stąd dostajemy

$$2x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad 3x = 135^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$\text{Odp. } x = 22^\circ 30' + k \cdot 90^\circ \quad \text{lub} \quad x = 45^\circ + k \cdot 60^\circ$$

**Równanie  $a \sin x + b \cos x = c$ .** Jeśli jedna ze stałych  $a, b, c$  jest zerem, równanie rozwiązuje się łatwo. Załóżmy więc, że żadna z tych stałych nie jest zerem.

**Metoda kąta połówkowego**

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (107.16)$$

$$a \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + b \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = c \left( \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right)$$

$$(b+c) \sin^2 \frac{x}{2} - 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - (b-c) \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

Przypadek  $b+c \neq 0$

Dzieląc równanie przez  $\cos^2 \frac{x}{2}$  mamy

$$(b+c) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - (b-c) = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b+c}$$

Przypadek  $b+c = 0$

Wylączając  $\cos \frac{x}{2}$  przed nawias, mamy

$$\cos \frac{x}{2} \left( 2a \sin \frac{x}{2} + (b-c) \cos \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{c-b}{2a} \quad (107.17)$$

**Przykład 12**

$$4 \sin x + 3 \cos x = 2 \quad (107.18)$$

Jest to równanie typu (107.16). Stosując (107.17), dostajemy

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5} = -0,1165 \quad \text{lub} \quad +1,7165$$

$$\frac{x}{2} = 173^\circ 21' + k \cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad \frac{x}{2} = 59^\circ 46' + k \cdot 180^\circ$$

$$x = 346^\circ 42' + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 119^\circ 32' + k \cdot 360^\circ$$

**Metoda kąta pomocniczego.** Równanie  $a \sin x + b \cos x = c$  rozwiązać można za pomocą kąta pomocniczego, co pokażemy, rozwiązując powtórnie równanie (107.18).

**Przykład 13.**

$$4 \sin x + 3 \cos x = 2$$

$$\sin x + \frac{3}{4} \cos x = \frac{2}{4}$$

Wprowadzamy kąt pomocniczy  $\varphi$  taki, aby  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ . Taki kąt na pewno istnieje i w I i w III ćwiartce. Wybieramy ten, który jest w I ćwiartce i odczytujemy z tablicy  $\varphi = 36^\circ 52'$ . Ta wartość przyda się nam później. Obecnie w równaniu zastępujemy  $\frac{3}{4}$  przez  $\operatorname{tg} \varphi$

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{2}{4}$$

$$\sin x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos x = \frac{1}{2} \quad (\text{mnożymy przez } \cos \varphi)$$

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{1}{2} \cos \varphi \quad (107.20)$$

Wiemy, że  $\operatorname{tg} \varphi = 3/4$ , więc możemy wyznaczyć  $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5}$$

Podstawiając do (107.20), otrzymujemy

$$\sin(x+\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5} = 0,4000$$

Rozwiązanie podstawowe

$$x+\varphi = 23^\circ 35' \quad \text{lub} \quad x+\varphi = 180^\circ - 23^\circ 35' = 156^\circ 25'$$

$$x_1 = 23^\circ 35' - \varphi = 23^\circ 35' - 36^\circ 52' = -13^\circ 17' \quad \text{czyli} \quad 346^\circ 43';$$

$$x_2 = 156^\circ 25' - \varphi = 156^\circ 25' - 36^\circ 52' = 119^\circ 33'$$

Uwaga. Różnica o  $1'$  między wynikami różnych metod przy stosowaniu tablic jest dopuszczalna.

### Zadania

**Zadanie 1.** Znaleźć kąty  $x$  z zakresu  $0 \leq x < 360^\circ$  spełniające równania:

- a)  $\operatorname{tg} x = -0,3793$       c)  $\sin x = -0,3567$   
b)  $\operatorname{ctg} x = 1,6932$       d)  $\cos x = 0,6345$  (odp. str. 221)

**Zadanie 2.** Rozwiązać równania:

- a)  $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$       c)  $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$   
b)  $3 + 3 \cos x = 2 \sin^2 x$       d)  $3 \cos x = \sqrt{3} \sin x$

**Zadanie 3.** Rozwiązać równania:

- a)  $\operatorname{tg}^4 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$  (Wskazówka: podstawić  $\operatorname{tg}^2 x = u$ )  
b)  $5 \sin 2x = 3$       c)  $\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos x$       d)  $\sin x + \sin 3x = 0$   
e)  $\cos x + \cos 5x = 0$       f)  $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$       g)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -1$   
h)  $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$       i)  $\frac{\sin 3x}{1 - \cos x} = 0$   
j)  $\frac{6 \sin x + 5 \cos x}{4 \sin x + \cos x} = 2$  (Wskazówka: podzielić licznik i mianownik lewej strony przez  $\cos x$  i rozwiązać równanie względem  $\operatorname{tg} x$ )

**Zadanie 4.** Rozwiązać równania:

- a)  $8 \sin x + 3 \cos x = 6$       b)  $3 \sin x - 2 \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
c)  $3 \sin x + 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} x$

**Zadanie 5.** Rozwiązać równania (odpowiedzi podajemy obok):

1.  $\sin 6x = 0$        $k \cdot 30^\circ$   $k$  — dowolna l. całkowita  
2.  $\cos 5x = 0$        $18^\circ + k \cdot 36^\circ$   
3.  $\operatorname{tg} 10x = 0$        $k \cdot 18^\circ$

4.  $\operatorname{ctg} 4x = 0$   $22^{\circ}30' + k \cdot 45^{\circ}$
5.  $\cos(x + 10^{\circ}) = 0$   $80^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$
6.  $\sin \frac{5}{2}x = 0$   $k \cdot 72^{\circ}$
7.  $\cos \frac{x}{3} = 0$   $270^{\circ} + k \cdot 540^{\circ}$
8.  $\operatorname{tg} \frac{3x}{2} = 0$   $k \cdot 120^{\circ}$
9.  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$   $180^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$
10.  $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 50^{\circ}\right) = 0$   $260^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$
11.  $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$   $60^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, 120^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$
12.  $\sin x = -0,5$   $210^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, 330^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$
13.  $\sin x = -1$   $270^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$
14.  $\operatorname{tg} x = 1$   $45^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$
15.  $\operatorname{tg} x = -1$   $135^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$
16.  $\operatorname{ctg} x = 1$   $45^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$
17.  $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$   $30^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$
18.  $\operatorname{tg} x = -0,1165$   $173^{\circ}21' + k \cdot 180^{\circ}$
19.  $\operatorname{tg} x = 1,7165$   $59^{\circ}46' + k \cdot 180^{\circ}$
20.  $\cos 3x = 0,5$   $\pm 20^{\circ} + k \cdot 120^{\circ}$
21.  $\cos 5x + 1 = 0$   $36^{\circ} + k \cdot 72^{\circ}$
22.  $\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$   $67^{\circ}30' + k \cdot 90^{\circ}$
23.  $\sin 6x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$   $10^{\circ} + k \cdot 60^{\circ}, 20^{\circ} + k \cdot 60^{\circ}$
24.  $\cos 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$   $\pm 45^{\circ} + k \cdot 120^{\circ}$
25.  $\sin 4x (\sin 6x - \sin 2x) = 0$   $k \cdot 22^{\circ}30'$
26.  $\sin 3x - \cos 2x = 0$   $18^{\circ} + k \cdot 72^{\circ}, 90^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$
27.  $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$   $k \cdot 360^{\circ}, 90^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}, 36^{\circ} + k \cdot 72^{\circ}$
28.  $\sin 4x + \sin 2x = \cos x$   $90^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}, 10^{\circ} + k \cdot 120^{\circ}, 50^{\circ} + k \cdot 120^{\circ}$
29.  $\sin x + \cos x = 1$   $k \cdot 360^{\circ}, 90^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$
30.  $4 \sin x \cos^3 x = \sin 2x - \cos 2x$   $45^{\circ} + k \cdot 90^{\circ}$
31.  $2\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x$   $\pm 30^{\circ} + k \cdot 360^{\circ},$
32.  $\sin^2 x = \sin x$   $k \cdot 180^{\circ}, 90^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$
33.  $\sqrt{6} \sin^2 x - \sin x - 2\sqrt{6} = 0$  nie ma rozwiązań
34.  $6 \cos^2 x + \sin x - 5 = 0$   $30^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, 150^{\circ} + k \cdot 360^{\circ},$
35.  $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$   $199^{\circ}28' + k \cdot 360^{\circ}, 340^{\circ}32' + k \cdot 360^{\circ}$
36.  $\operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \operatorname{ctg} x - \cos x + 1 = 0$   $135^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$
37.  $\sin x + \cos x = 1$   $45^{\circ} + k \cdot 180^{\circ},$

37.  $2 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = 2$   
 38.  $\sqrt{3} \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \sin x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = -1$   
 39.  $\operatorname{tg} 2x = 9 \operatorname{tg} x$   
 40.  $4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$

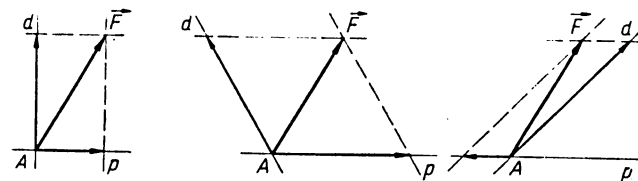
$71^\circ 34' + k \cdot 180^\circ$ ,  $45^\circ + k \cdot 180^\circ$   
 $45^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  
 $\pm 41^\circ 22' + k \cdot 180^\circ$ ,  $k \cdot 180^\circ$   
 $45^\circ + k \cdot 90^\circ$

## Odpowiedzi do rozdziału XV

98

4. Dla kątów skierowanych nie ma relacji „jest większy”. Kąt pełny.
5. Wektor wypadkowy: a) ma kierunek ten sam, co oba składowe; długość równą sumie długości składowych; b) ma kierunek składowego o większej długości i długość równą różnicy długości składowych; w przypadku wektorów przeciwnych (o równych modułach) jest wektorem zerowym; c) wyznacza się według prawa równoległoboku.

7.



Rys. 107-7

9. IV, II, I, III. 10. a)  $y = 0$ ; b)  $x = 0$ ; c)  $y > 0$ ; d)  $x > 0$ ; e)  $x$  tego samego znaku, co  $y$ , czyli  $xy > 0$ ; f)  $x = y > 0$ ; g)  $-x = y > 0$ . 11. a) IV ćwiartka; b) ujemna półoś  $OY$ .
12.  $B(-3, -2)$ ;  $C(3, -2)$ ;  $D(-3, 2)$ .
13.  $OA = 5$ ,  $OB = 10$ ,  $OC = \sqrt{13}$ ,  $OD = 4$ ,  $OE = 15$ ,  $OF = 5$ .
14. a) Jednoznacznie, przy dowolnych wartościach  $x$  i  $y$ .  
b) Niejednoznacznie (nieskończenie wiele możliwości).  
c) Jeśli  $|x| < r$ , dwie możliwości; jeśli  $|x| = r$ , jedna możliwość; jeśli  $|x| > r$ , niemożliwe.  
d) Jednoznacznie, przy dowolnych wartościach  $r$  i  $\varphi$ .  
e) Jednoznacznie, o ile dane nie są sprzeczne między sobą.

100

3. a)  $\sin \alpha = \pm \frac{13}{85}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{13}{84}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{84}{13}$ ;  
b)  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \mp \frac{\sqrt{5}}{2}$ ;

$$c) \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = \frac{\pm \sqrt{\cos^2 \alpha}}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \pm \frac{1}{3}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$d) \operatorname{tg} \alpha \text{ nieokreślony, } \cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha = 0,$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm 1.$$

$$4. a) \sin x = -\frac{13}{85}; b) \text{ niemożliwe}; c) \sin x = \pm \frac{13}{85}; d) \text{ niemożliwe.}$$

$$5. a) 2 \cos \alpha; b) -\sin^2 \alpha; c) 1 + \sin \alpha; d) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

$$6. \text{ Oznaczając } \operatorname{tg} \alpha = t, \text{ można daną wiadomość zapisać w postaci równania}$$

$$t + \frac{1}{t} = 6, \text{ skąd wyliczamy } t = 3 \pm \sqrt{8}, \quad \frac{1}{t} = 3 \mp \sqrt{8}.$$

$$a) 34; b) 198. \text{ Inny sposób (bez obliczania } t):$$

$$a) t^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + 2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 - 2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = 6^2 - 2 = 34;$$

$$b) t^3 + \left(\frac{1}{t}\right)^3 = \left(t + \frac{1}{t}\right)\left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2}\right) = 6 \cdot (34 - 1) = 198.$$

$$7. \text{ Podnosząc daną równość do kwadratu, otrzymujemy}$$

$$a) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = c^2, \text{ czyli } 2 \sin \alpha \cos \alpha = c^2 - 1; b) \sin \alpha - \cos \alpha =$$

$$= \mp \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \mp \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \mp \sqrt{1 - (c^2 - 1)} =$$

$$= \mp \sqrt{2 - c^2}.$$

101

$$2. \text{ Funkcja sinus, rozumiana jako funkcja stopniowej miary kąta jest okresowa —}$$

oznacza to, że istnieje liczba  $T$  różna od 0 i taka, że dla każdej wartości  $\alpha$  zachodzi równość

$$\sin(\alpha + T) = \sin \alpha$$

Liczbę  $T$  o takiej własności nazywamy okresem. Okresem funkcji sinus jest  $360^\circ$ , jest to okres podstawowy. Okresem podstawowym funkcji cosinus jest  $360^\circ$ , a funkcji tangens i cotangens  $180^\circ$ .

$$3. \text{ Gdyż równość wymieniona w pytaniu zachodzi dla } \alpha = 30^\circ, \text{ ale nie dla dowolnego } \alpha.$$

102

$$1. a) \sin 42^\circ, b) -\cos 75^\circ, c) -\operatorname{tg} 15^\circ, d) \sin 70^\circ, e) -\cos 10^\circ, f) -\operatorname{tg} 60^\circ, g) -\sin 80^\circ,$$

$$h) \cos 80^\circ, k) -\operatorname{tg} 80^\circ.$$

$$3. a) -\sin 25^\circ, b) \cos 20^\circ, c) -\operatorname{ctg} 30^\circ, d) -\cos 10^\circ, e) -\sin 45^\circ.$$

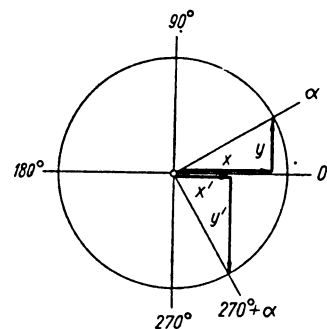
$$4. a) \frac{\sqrt{3}}{2}, b) -\frac{\sqrt{3}}{2}, c) -\frac{\sqrt{3}}{2}, d) -\frac{\sqrt{3}}{2}, e) -\frac{\sqrt{2}}{2}, f) -\frac{\sqrt{3}}{3}, g) -1, h) -1,$$

$$k) -\sqrt{3}, l) -\sqrt{3}.$$

5. Sposób I. Z rys. 107-8 odczytujemy  $x' = y, y' = -x$ . Zatem

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \frac{y'}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos \alpha$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$



Rys. 107-8

Dzieląc obustronnie przez siebie te równości, dostajemy

$$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Sposób II. Korzystając z okresowości sinusa, mamy

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \sin(270^\circ + \alpha - 360^\circ) = \sin(\alpha - 90^\circ)$$

Teraz skorzystamy ze wzoru  $\sin(-x) = -\sin x$ , podstawiając  $x = \alpha - 90^\circ$ . Otrzymujemy

$$\sin(\alpha - 90^\circ) = -\sin(90^\circ - \alpha)$$

wreszcie, korzystając ze wzoru redukcyjnego dla  $90^\circ - \alpha$ , dostajemy

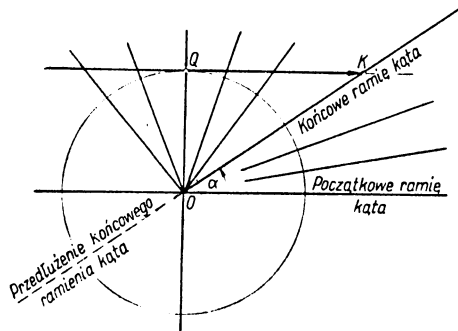
$$-\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

Łącząc te równości, otrzymamy wzór redukcyjny dla  $\sin(270^\circ + \alpha)$ . Analogiczne wyprowadzenie wzoru na  $\cos(270^\circ + \alpha)$  pozostawiamy Czytelnikowi.

|              |        |              |             |
|--------------|--------|--------------|-------------|
| 0° i 180°    | ± 90°  | 0° i 180°    | ± 90°       |
| 90°          | 0°     | 45° i 225°   | 45° i 225°  |
| -90°         | 180°   | -45° i 135°  | -45° i 135° |
| 30° i 150°   | ± 60°  | 60° i 240°   | 30° i 210°  |
| -30° i -150° | ± 120° | -60° i 120°  | -30° i 150° |
| 60° i 120°   | ± 150° | -45° i -135° | ± 135°      |

$$7. a) 0; b) -\cos^2 x; c) 1; d) 0; e) 0; f) 2 \cos x; g) 0; h) -\sin x; k) -\cos x; l) -\operatorname{ctg} x.$$

1. Dla  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  jest  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ .
2. Niech kąt  $\alpha$  rośnie od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Wówczas  
w ćwiartce I cosinus jest dodatni i maleje od 1 do 0,  
w ćwiartce II cosinus jest ujemny i maleje od 0 do  $-1$ ,  
w ćwiartce III cosinus jest ujemny i rośnie od  $-1$  do 0,  
w ćwiartce IV cosinus jest dodatni i rośnie od 0 do  $+1$ .  
Cosinus jest ograniczony od góry przez 1 i od dołu przez  $-1$ .
3. Jeśli promień  $OQ = 1$ , to miara wektora  $\vec{OQ}$ , odciętego przez końcowe ramię kąta (względnie przedłużenie tego ramienia) przedstawia cotangens (rys. 107-9).



Rys. 107-9

Gdy kąt  $\alpha$  rośnie od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ , to

- dla  $0^\circ$  cotangens jest nieokreślony,
- w ćwiartce I cotangens jest dodatni i maleje od  $+\infty$  do 0,
- dla  $90^\circ$  cotangens jest równy 0,
- w ćwiartce II cotangens jest ujemny i maleje od 0 do  $-\infty$ ,
- dla  $180^\circ$  cotangens jest nieokreślony,
- w ćwiartce III cotangens jest odcinany na stycznej przez przedłużenie ramienia kąta i zachowuje się dokładnie, jak w ćwiartce I,
- w ćwiartce IV cotangens jest odcinany na stycznej przez przedłużenie ramienia kąta i zachowuje się dokładnie, jak w ćwiartce II.

Cotangens jest funkcją malejącą w każdej ćwiartce,

Cotangens jest funkcją nieograniczoną.

5. 1) parzysta; 2) parz.; 3) parz.; 4) parz.; 5) nieparz.; 6) nieparz.; 7) parzysta; 8) nieparz.; 9) nieparz.; 10) ani parzysta ani nieparzysta, gdyż np. dla  $x = 45^\circ$  jest  $f(x) = 2$ ,  $f(-x) = 0$ .
6.  $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = -\cos 210^\circ$ ;  $\cos 60^\circ = \cos 120^\circ = -\sin 210^\circ$ ;  $\operatorname{tg} 60^\circ = -\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{ctg} 210^\circ$ .
7. Sinus maleje od 1 do 0, cosinus maleje od 0 do  $-1$ , tangens rośnie od  $-\infty$  do 0, cotangens maleje od 0 do  $-\infty$ .

2. a)  $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ ; b)  $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ ; c)  $2+\sqrt{3}$ ;  
d)  $\cos(44^\circ-14^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ; e)  $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ ; f)  $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ .
3.  $\frac{98}{100}$ ;  $\pm \frac{2\sqrt{99}}{100}$ ;  $\frac{2\sqrt{99}}{98}$ .
5.  $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1$ .
6. a)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{-1}{2}$ ; c)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $\pm \sqrt{2}$ .
8.  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{3}$ .
10. a)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ; b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; c)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ; d)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
11. a)  $2 \cos 280^\circ \sin 40^\circ = 2 \cos 80^\circ \sin 40^\circ$ ; b)  $2 \cos^2 40^\circ$ ;  
c)  $2 \sin(45^\circ + \alpha) \cos(45^\circ - \alpha)$ ; d)  $\sqrt{2} \cos(\alpha - 45^\circ)$ ;  
e)  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$ ; f)  $-\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$ ; g)  $-\sqrt{3} \sin 10^\circ$ ;  
h)  $-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$ .

## 107.

1. a)  $159^\circ 14'$ ,  $339^\circ 14'$ ; b)  $30^\circ 34'$ ,  $210^\circ 34'$ ;  
c)  $200^\circ 54'$ ,  $339^\circ 06'$ ; d)  $50^\circ 37'$ ,  $309^\circ 23'$ .

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \\
 & 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0, \\
 & 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \quad \cos x = u \\
 & 2u^2 + u - 1 = 0, \quad u = -1 \quad \text{lub} \quad u = \frac{1}{2} \\
 & \cos x = -1 \quad \text{lub} \quad \cos x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie podstawowe  $x = 180^\circ$  lub  $x = 60^\circ$  lub  $x = 300^\circ$ .

Rozwiązanie ogólne można napisać w postaci

$$x = 60^\circ + k \cdot 120^\circ, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- b) Rozwiązanie podstawowe  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  
c) Rozwiązanie podstawowe  $90^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  
d) Rozwiązanie podstawowe  $60^\circ$ ,  $240^\circ$ .

$$3. \quad a) \quad x = \pm 45^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad x = \pm 60^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$b) \quad 5 \sin 2x = 3, \quad \sin 2x = \frac{3}{5} = 0,6000$$

$$2x = 36^\circ 52' + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 2x = 180^\circ - 36^\circ 52' + k \cdot 360^\circ = 143^\circ 08' + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 18^\circ 26' + k \cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad x = 71^\circ 34' + k \cdot 180^\circ$$

$$c) \cos 4x + \cos 2x = 2 \cos x$$

$$2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} = 2 \cos x$$

$$2 \cos 3x \cos x = 2 \cos x$$

$$2 \cos x (\cos 3x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 3x = 1$$

$$x = \pm 90^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 3x = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = \pm 90^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad x = 0^\circ + k \cdot 120^\circ$$

$$d) x = k \cdot 90^\circ$$

$$e) x = 30^\circ + k \cdot 60^\circ \quad \text{lub} \quad x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$$

$$f) \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad \frac{x}{2} = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 60^\circ + k \cdot 720^\circ \quad \text{lub} \quad x = 300^\circ + k \cdot 720^\circ$$

$$g) \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -1, \quad \frac{x}{2} = -45^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad x = -90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

- h) Sprowadzić do jedności kąta stosując do lewej strony wzór na tangens podwójnego kąta. Podstawić za  $\operatorname{tg} x$  dowolną literę, np.  $z$ , i rozwiązać otrzymane równanie algebraiczne względem  $z$ .

$$x = k \cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad x = \pm 30^\circ + k \cdot 180^\circ$$

- i)  $x = k \cdot 60^\circ$ , gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą niepodzielną przez 6

$$j) \operatorname{tg} x = 1,5000, \quad x = 56^\circ 19' + k \cdot 180^\circ$$

$$4. a) x = 24^\circ 03' + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 114^\circ 51' + k \cdot 360^\circ$$

$$b) x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad x = 202^\circ 22' + k \cdot 360^\circ,$$

$$c) \text{wprowadzając oznaczenie } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \text{ dostajemy } t^2 = \frac{1}{2},$$

$$x = 70^\circ 32' + k \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad x = 289^\circ 28' + k \cdot 360^\circ.$$

## Rozdział XVI

### ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW DOWOLNYCH

Stosując trygonometrię do zadań z planimetrii, będziemy kąty zwykle występujące w figurach geometrycznych zastępować kątami skierowanymi o tych samych ramionach, a mianowicie: kąty ostre — kątami I ćwiartki, kąt prosty — kątem  $+90^\circ$ , a kąty rozwarte — kątami II ćwiartki.

Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych omówiliśmy w p. 94. Obecnie zajmiemy się rozwiązywaniem trójkątów dowolnych.

#### 108. Twierdzenia sinusów, cosinusów i tangensów

**Twierdzenie sinusów.** *W dowolnym trójkącie stosunki boków do sinusów przeciwległych kątów są równe i równają się średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (108.1)$$

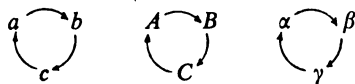
**Twierdzenie cosinusów (Carnota).** *W dowolnym trójkącie kwadrat jednego boku równa się sumie kwadratów dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwójny iloczyn tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \quad (108.2)$$

**Twierdzenie tangensów.** *W dowolnym trójkącie różnica dwóch boków ma się do sumy tych boków tak, jak tangens połowy różnicy przeciwległych im kątów do tangensa połowy sumy tych kątów*

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad \frac{a-c}{a+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2}} \quad (108.3)$$

Uwaga. Różnica dwóch boków może być brana w dowolnej kolejności, jednak różnica odpowiednich kątów musi być brana w tej samej kolejności, co różnica boków. W grupie wzorów (108.3), a także w grupie wzorów (108.2) występuje *zależność cykliczna*, polegająca na tym, że przez *cykliczną zamianę liter*



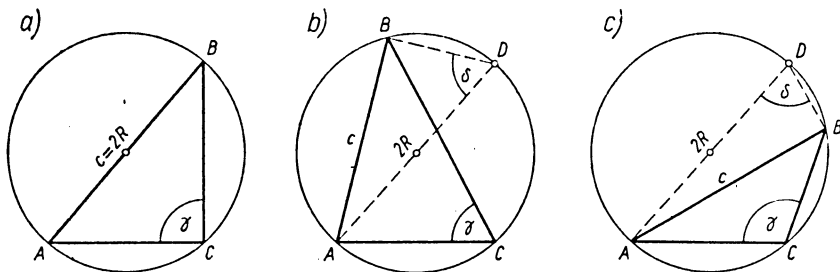
otrzymujemy z pierwszego wzoru — drugi, z drugiego — trzeci, a z trzeciego — pierwszy.

**Dowód twierdzenia sinusów.** Udowodnimy równość  $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ . Dowody równości  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ ,  $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$  są analogiczne. Zamiast równości  $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$  wystarczy dowieść równości

$$\frac{c}{2R} = \sin \gamma \quad (108.4)$$

Na trójkącie  $ABC$  opisujemy okrąg i rozważamy trzy przypadki.

Przypadek  $\gamma = 90^\circ$  (rys. 108-1a). Jest  $\sin \gamma = 1$  oraz  $c = 2R$ , więc równość (108.4) jest spełniona.



Rys. 108-1.

Przypadek  $\gamma < 90^\circ$  (rys. 108-1b). Z punktu  $A$  kreślimy średnicę  $\overline{AD}$  i rozważamy pomocniczy trójkąt  $ABD$ . Kąt  $ABD$  jest prosty, więc oznaczając  $\sphericalangle ADB$  literą  $\delta$ , mamy

$$\frac{AB}{AD} = \sin \delta \quad (108.5)$$

Alc.  $AB = c$ ,  $AD = 2R$ , zaś  $\delta = \gamma$  (jako kąty wpisane w okrąg i oparte na tej samej cięciwie), co podstawione do (108.5) daje (108.4).

Przypadek  $\gamma > 90^\circ$  (rys. 108-1c). Postępując analogicznie, dochodzimy do związku (108.5). Wprawdzie  $\delta \neq \gamma$ , ale  $\delta = 180^\circ - \gamma$  i  $\sin \delta = \sin \gamma$ , więc i w tym przypadku z równości (108.5) wynika (108.4).

**Dowód twierdzenia cosinusów.** Wystarczy udowodnić pierwszą z równości (108.2)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (108.2')$$

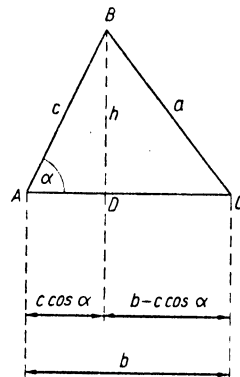
gdyż pozostałe otrzymuje się przez cykliczną zamianę liter.

Przypadek  $\alpha = 90^\circ$ . Jest  $\cos \alpha = 0$ , ostatni wyraz równości (108.2') odpada i równość  $a^2 = b^2 + c^2$  jest prawdziwa, gdyż wyraża twierdzenie Pitagorasa.

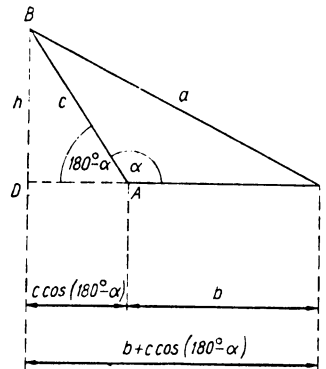
Przypadek  $\alpha < 90^\circ$  (rys. 108-2). Spodek  $D$  wysokości  $BD = h$  dzieli podstawę  $AC = b$  na dwie części  $AD = c \cos \alpha$ ,  $DC = b - c \cos \alpha$ . Stosując do trójkątów  $BDA$  i  $BDC$  twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$c^2 - (c \cos \alpha)^2 = h^2 = a^2 - (b - c \cos \alpha)^2 \quad (108.6)$$

skąd po wyrugowaniu  $h^2$ , wykonaniu działań i zredukowaniu otrzymujemy (108.2').



Rys. 108-2



Rys. 108-3

Przypadek  $\alpha > 90^\circ$  (rys. 108-3). Spodek  $D$  wysokości dzieli podstawę  $AC$  zewnątrz na odcinki  $DA = c \cos (180^\circ - \alpha)$ ,  $DC = b + c \cos (180^\circ - \alpha)$ . Stosując do trójkątów  $BDA$  i  $BDC$  twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy po uwzględnieniu wzoru redukcyjnego  $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$  równość (108.6), skąd wynika (108.2'). Wykonanie rachunków pozostawiamy Czytelnikowi.

**Dowód twierdzenia tangensów.** Z twierdzenia sinusów wynika  $a = 2R \sin \alpha$ ,  $b = 2R \sin \beta$ , zatem

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= \frac{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \\ &= \frac{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}} \end{aligned}$$

Podobnie udowadnia się pozostałe dwie równości twierdzenia.

**Zastosowanie twierdzenia sinusów.** Twierdzenie sinusów stosujemy do rozwiązywania trójkątów w dwóch przypadkach:

— gdy dane są dwa kąty i jeden bok (przypadek KBK);  
 — gdy dane są dwa boki i kąt leżący naprzeciw jednego z nich, w tym przypadku są dwie możliwości, z których jedną nazywamy *przypadkiem jednoznacznym*, a drugą — *przypadkiem zawilym*. Wyjaśnimy to na przykładach.

**Przykład 1.** Rozwiązać trójkąt, jeśli są dane

$$\alpha = 72^\circ 40', \quad \beta = 53^\circ 17', \quad a = 6,45$$

Rozwiązanie. Jest to przypadek KBK. Najpierw obliczamy trzeci kąt

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (72^\circ 40' + 53^\circ 17') = 54^\circ 03'$$

Piszemy twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

i bierzemy z niego proporcję przydatną do obliczenia boku  $b$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

W tym równaniu  $b$  jest jedyną niewiadomą, którą obliczamy

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\lg b = \lg a + \lg \sin \beta - \lg \sin \alpha$$

$$\begin{array}{rcl} \lg a = \lg 6,45 & = & 0,8096 \\ \lg \sin \beta = \lg \sin 53^\circ 17' & = & \overline{1,9040} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +$$

$$\begin{array}{rcl} & & 0,7136 \\ \lg \sin \alpha = \lg \sin 72^\circ 40' & = & \overline{1,9798} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -$$

$$\lg b = \quad \quad \quad \underline{0,7338}$$

$$b = 5,42$$

Teraz wybieramy z twierdzenia sinusów proporcję, przydatną do obliczenia boku  $c$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\lg c = \lg a + \lg \sin \gamma - \lg \sin \alpha$$

$$\lg a \quad \quad \quad = 0,8096$$

$$\begin{array}{rcl} \lg \sin \gamma = \lg \sin 54^\circ 03' & = & \overline{1,9083} \\ & & 0,7179 \end{array}$$

$$\lg \sin \alpha \quad \quad \quad = \overline{1,9798}$$

$$\lg c \quad \quad \quad = \underline{0,7381}$$

$$c = 5,47$$

**Przypadek jednoznaczny.** Jeśli są dane dwa boki i kąt leżący naprzeciwko większego z nich, to trójkąt jest przez te dane wyznaczony jednoznacznie.

**Przykład 2.** Rozwiązać trójkąt; jeśli są dane

$$a = 41,63, \quad b = 34,79, \quad \alpha = 50^\circ 34'$$

Rozwiązanie. Bok  $a$ , leżący naprzeciwko danego kąta  $\alpha$ , jest większy od boku  $b$ ; mamy więc przypadek jednoznaczny

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{41,63}{\sin 50^\circ 34'} = \frac{34,79}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{34,79 \cdot \sin 50^\circ 34'}{41,63}$$

$$\begin{array}{rcl} \lg 34,79 & = & 1,5414 \\ \lg \sin 50^\circ 34' & = & \overline{1,8878} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +$$

$$\begin{array}{rcl} & & 1,4292 \\ \lg 41,63 & = & \overline{1,6194} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -$$

$$\lg \sin \beta \quad \quad \quad \underline{\overline{1,8098}}$$

Tej wartości  $\lg \sin \beta$  odpowiada kąt ostry, który odczytujemy z tablic

$$\beta = 40^\circ 12'$$

oraz kąt rozwarty  $180^\circ - 40^\circ 12'$ . Wiemy, że w trójkącie naprzeciw mniejszego boku leży mniejszy kąt, więc ponieważ  $b < a$ , to musi być  $\beta < \alpha = 50^\circ 34'$ , zatem  $\beta$  nie może być rozwarty.

Obliczamy teraz trzeci kąt

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (50^\circ 34' + 40^\circ 12') = 89^\circ 14'$$

i na koniec trzeci bok

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{skąd} \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\lg a = \lg 41,63 \quad \quad \quad = 1,6194$$

$$\lg \sin \gamma = \lg \sin 89^\circ 14' = 0,0000^{1)}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 1,6194 \\ \lg \sin \alpha = \lg \sin 50^\circ 34' & = & \overline{1,8878} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -$$

$$\lg c \quad \quad \quad = 1,7316$$

$$\lg c \quad \quad \quad = \underline{53,88}$$

<sup>1)</sup> Odczyt jest poprawny. W tablicach pięciocyfrowych znajdujemy  $\overline{1,99996}$ , opuszczając piątą cyfrę po przecinku musimy podnieść poprzednią i dostajemy istotnie 0,0000.

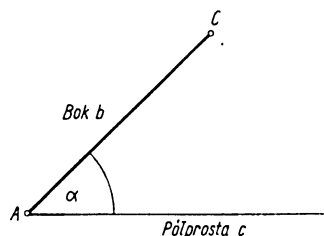
**Przypadek „zawily”.** Jeśli są dane dwa boki i kąt leżący naprzeciwko mniejszego z nich, to istnieją 3 możliwości:

I — albo istnieją dwa trójkąty, różne między sobą, ale obydwa odpowiadające powyższemu danym;

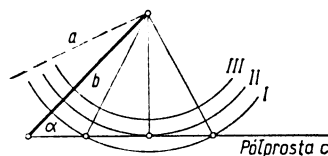
II — albo istnieje tylko jeden trójkąt odpowiadający powyższemu danym;

III — albo nie istnieje trójkąt odpowiadający powyższemu danym. Przekonamy się o tym konstruując trójkąt o takich danych:  $a, b, \alpha$ , przy czym  $a < b$ .

Konstrukcję rozpoczynamy od kąta  $\alpha$ . Kąt ten leży między bokami  $b$  i  $c$ , ale że długości boku  $c$  nie znamy, więc zamiast boku  $c$  nakreślimy półprostą; w ten sposób kąt  $\alpha$  będzie zawarty między odcinkiem  $b$  i półprostą (rys. 108-4). Aby powstał trójkąt, należy z końca boku  $b$  zatoczyć okrąg o promieniu  $a$ . Jeśli okrąg ten przetnie półprostą, to powstanie trójkąt. Otóż zależnie od długości  $a$  istnieją 3 możliwości wymienione powyżej (rys. 108-5).



Rys. 108-4



Rys. 108-5

**Przykład 3.** Rozwiązać trójkąt, jeśli są dane

$$c = 5,13, \quad b = 7,53, \quad \gamma = 36^\circ$$

**Rozwiązanie.** Z twierdzenia sinusów dostajemy

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{b \sin \gamma}{c} & \lg b &= \lg 7,53 &= 0,8768 \\ \lg \sin \gamma &= \lg \sin 36^\circ &= 1,7692 \\ \lg \sin \beta &= \lg b + \lg \sin \gamma - \lg c && 0,6460 \\ \lg c &= \lg 5,13 &= 0,7101 \\ \lg \sin \beta & &= 1,9359 \end{aligned}$$

Tej wartości  $\lg \sin \beta$  odpowiadają dwa kąty

$$\beta_1 = 59^\circ 38' \quad \beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 120^\circ 22'$$

Ponieważ kąt  $\gamma$  jest znany, więc odpowiednie wartości trzeciego kąta w trójkącie obliczymy odejmując sumę dwóch od  $180^\circ$

$$\alpha_1 = 84^\circ 22' \quad \alpha_2 = 23^\circ 38'$$

Bok  $a$  obliczymy z twierdzenia sinusów  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

Wobec dwóch wartości kąta  $\alpha$  dostaniemy dwie wartości  $a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$

$$\begin{aligned} \lg c &= 0,7101 \\ \lg \sin \gamma &= 1,7692 \\ \lg \sin \alpha_1 &= 1,9979 \\ \lg a_1 &= 0,9388 \\ a_1 &= 8,686 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &- \\ &+ \\ &+ \\ \lg a_2 &= 0,5439 \\ a_2 &= 3,499 \end{aligned}$$

**Zastosowania twierdzenia cosinusów.** Twierdzenie cosinusów stosujemy przy rozwiązywaniu trójkąta w dwóch przypadkach:

— gdy są dane 2 boki i kąt między nimi (przypadek  $BKB$ );

— gdy dane są 3 boki (przypadek  $BBB$ ); w tym przypadku cosinusy kątów obliczamy z równości (108.2), otrzymując wzory

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (108.7)$$

**Przykład 4.** W trójkącie są dane dwa boki:  $a = 5$ ,  $b = 7$  i kąt między nimi  $\gamma = 60^\circ$ . Obliczyć trzeci bok i pozostałe kąty.

**Rozwiązanie**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 39$$

$$c = \sqrt{39} = 6,245$$

Teraz, kiedy już znamy trzeci bok, obliczymy kąty  $\alpha, \beta$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 39 - 25}{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{39}} = 0,7206 \quad \text{skąd} \quad \alpha = 43^\circ 54'$$

Znając dwa kąty moglibyśmy obliczyć trzeci, jako dopełniający sumę tamtych dwóch do  $180^\circ$ ; ale lepiej posłużyć się twierdzeniem cosinusów, a potem skontrolować wynik przez co wykryje się ewentualny błąd

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25 + 39 - 49}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{39}} = 0,2402 \quad \text{skąd} \quad \beta = 76^\circ 06'$$

Kontrola:  $\alpha + \beta + \gamma = 43^\circ 54' + 76^\circ 06' + 60^\circ = 180^\circ 00'$ .

**Przykład 5.** W trójkącie dane są trzy boki:  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 6$ , obliczyć kąty.

**Rozwiązanie**

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16 + 36 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{43}{48} = 0,8958 \quad \alpha = 26^\circ 23'$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{29}{36} = 0,8056 \quad \beta = 36^\circ 20'$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{9 + 16 - 36}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{11}{24} = -0,4583 \quad \gamma = 117^\circ 17'$$

Kontrola:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Uwaga. Cosinusowi dodatniemu odpowiada w trójkącie kąt ostry, cosinusowi równemu 0 — kąt prosty, a cosinusowi ujemnemu — kąt rozwarty. Wartość cosinusa wyznacza kąt w trójkącie jednoznacznie. Nie można tego powiedzieć o sinusie: każdej wartości  $y$  sinusa, spełniającej nierówność  $0 < y < 1$ , odpowiadają dwa kąty, z których jeden jest ostry, a drugi rozwarty i dopiero dyskusja rozstrzyga, która z tych ewentualności jest możliwa do przyjęcia.

**Zastosowania twierdzenia tangensów.** Jeśli spośród 6 elementów trójkąta:  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  dane są którekolwiek trzy, w tym co najmniej jedna z liczb  $a, b, c$ , to do rozwiązania trójkąta wystarczy w zasadzie posłużyć się twierdzeniem sinusów lub twierdzeniem cosinusów.

Ponieważ jednak postać twierdzenia cosinusów jest nielogarytmowalna, przeto korzystamy z twierdzenia tangensów, które pozwala użyć logarytmów.

Niech będą dane:  $a, b, \gamma$ . Wobec równości  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  jest  $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ , skąd

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \quad (108.8)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

Wstawiając to do (108.3) dostajemy równanie

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}$$

w którym  $a, b, \gamma$  są wiadome, więc rozwiązujemy je łatwo

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \quad (108.9)$$

Obliczamy według tego wzoru wartość  $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$ , a następnie odczytujemy z tablic wartość kąta  $\frac{\alpha - \beta}{2}$ . Ale również wartość  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  jest nam wiadoma, podaje ją wzór (108.8). Możemy więc bez trudu obliczyć dwa kąty, albowiem

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (108.10)$$

W ten sposób, mając dane  $a, b, \gamma$  dzięki twierdzeniu tangensów obliczamy  $\alpha$  i  $\beta$ . Pozostały element: bok  $c$  — obliczymy za pomocą twierdzenia sinusów.

**Przykład 6.** Rozwiązać trójkąt, jeśli są dane

$$a = 0,9378, \quad b = 0,3562, \quad \gamma = 62^\circ 38'$$

**Rozwiązanie.** Stosujemy twierdzenie tangensów w postaci (108.9)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 0,9378 \\ b = 0,3562 \\ a - b = 0,5816 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a = 0,9378 \\ b = 0,3562 \\ a + b = 1,2940 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \lg(a - b) = \overline{1,7646} \\ \lg(a + b) = 0,1120 \\ \lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 0,2158 \end{array} \right\} +$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \overline{1,8684}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - 31^\circ 19' = 58^\circ 41' \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = 36^\circ 27'$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = 58^\circ 41' + 36^\circ 27' = 95^\circ 08'$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = 58^\circ 41' - 36^\circ 27' = 22^\circ 14'$$

Obliczamy następnie bok  $c$  ze wzoru sinusów  $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$  mianowicie

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lg a = \lg 0,9378 = \overline{1,9721} \\ \lg \sin \gamma = \lg \sin 62^\circ 38' = \overline{1,9484} \end{array} \right\} +$$

$$\overline{1,9205}$$

$$\lg \sin \alpha = \lg \sin 95^\circ 08' = \overline{1,9982}$$

$$\lg c = \overline{1,9223}$$

$$c = 0,8362$$

Dla kontroli można posłużyć się twierdzeniem sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

obliczając oddzielnie wartość każdego ułamka; wszystkie powinny mieć tę samą wartość. Oczywiście, posługujemy się logarytmami

$$\left. \begin{array}{l} \lg a = 1,9721 \\ \lg \sin \alpha = 1,9982 \end{array} \right\} - \quad \left. \begin{array}{l} \lg b = 1,5517 \\ \lg \sin \beta = 1,5778 \end{array} \right\} - \quad \left. \begin{array}{l} \lg c = 1,9223 \\ \lg \sin \gamma = 1,9484 \end{array} \right\} -$$

$$\overline{1,9739} \quad \overline{1,9739} \quad \overline{1,9739}$$

**Zadania**

Rozwiązać trójkąt mając dane:

- |                          |                     |                          |
|--------------------------|---------------------|--------------------------|
| 1. $\alpha = 60^\circ$ , | $b = 2$ ,           | $a = \sqrt{3}$           |
| 2. $\alpha = 120^\circ$  | $b = 2$ ,           | $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 3. $\alpha = 60^\circ$   | $b = 4$ ,           | $a = 2$                  |
| 4. $\alpha = 18^\circ$   | $\alpha = 42^\circ$ | $\beta = 62^\circ$       |

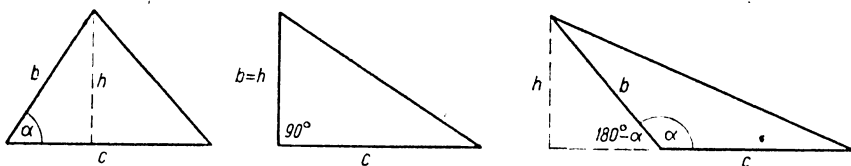
|                 |                         |                                                    |
|-----------------|-------------------------|----------------------------------------------------|
| 5. $c = 20$ ,   | $\beta = 124^\circ$     | $\gamma = 31^\circ$                                |
| 6. $b = 0,731$  | $\alpha = 28^\circ 14'$ | $\gamma = 109^\circ 32'$                           |
| 7. $a = 5,386$  | $b = 2,687$             | $\alpha = 102^\circ 32'$                           |
| 8. $a = 177$    | $b = 216,6$             | $\alpha = 35^\circ 26'$                            |
| 9. $b = 4$      | $c = \sqrt{3}$          | $\alpha = 30^\circ$                                |
| 10. $b = 5$     | $c = 10$                | $\alpha = 102^\circ$                               |
| 11. $a = 283,4$ | $b = 268,5$             | $\gamma = 63^\circ 38'$                            |
| 12. $c = 0,024$ | $b = 0,015$             | $\alpha = 19^\circ$                                |
| 13. $a = 40$    | $b = 41$                | $c = 19$                                           |
| 14. $a = 5$     | $b = 4$                 | $c = 2$                                            |
| 15. $a = 86,75$ | $b = 52,34$             | $\gamma = 72^\circ 40'$ (zastosować tw. tangensów) |

### 109. Wzory na pole trójkąta, promień koła wpisanego, promień koła opisanego i promienie kół dopisanych

**Podstawowy wzór na pole trójkąta.** Jeśli  $h$  jest wysokością trójkąta odpowiadającą bokowi  $c$ , to pole  $S$  tego trójkąta wyraża się wzorem

$$S = \frac{1}{2} ch \quad (109.1)$$

**Obliczenie pola trójkąta, gdy dane są dwa boki i kąt między nimi.** Niech będą dane  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ . Rozważymy trzy przypadki (rys. 109-1):



Rys. 109-1

- kąt  $\alpha$  jest ostry; wtedy  $h = b \sin \alpha$ ;
- kąt  $\alpha$  jest prosty; wtedy  $h = b$ ;
- kąt  $\alpha$  jest rozwarty; wtedy  $h = b \sin (180^\circ - \alpha)$ .

W każdym z tych przypadków zachodzi równość

$$h = b \sin \alpha$$

Uwzględniając tę równość we wzorze (109.1), otrzymujemy wzór na pole trójkąta

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \quad (109.2)$$

Przez cykliczną zamianę liter otrzymujemy stąd dwa dalsze wzory

$$S = \frac{1}{2} ca \sin \beta \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad (109.2')$$

**Obliczenie pola trójkąta, gdy dany jest jeden bok i dwa kąty.** Niech będą dane  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Wówczas kąt  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$  też jest znany. Z twierdzenia sinusów dostajemy

$$b = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

co podstawione do (109.2) daje wzór na pole trójkąta

$$S = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \quad (109.3)$$

Przez cykliczną zamianę liter otrzymujemy stąd dwa dalsze wzory

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad S = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{\sin \beta} \quad (109.3')$$

**Wzór Herona na pole trójkąta, gdy dane są trzy boki** ma postać

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (109.4)$$

gdzie  $p$  oznacza połowę obwodu trójkąta

$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad (109.5)$$

**Dowód wzoru Herona.** Skorzystamy ze wzoru (109.2). Występujący tam  $\sin \alpha$  wyrazimy przez boki

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 = \\ &= \left( 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left( 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \\ &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \\ &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \cdot \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \end{aligned}$$

Ponieważ  $p$  oznacza połowę obwodu trójkąta, więc

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2p \\ a+b-c &= 2p-2c = 2(p-c) \\ a-b+c &= 2p-2b = 2(p-b) \\ -a+b+c &= 2p-2a = 2(p-a) \\ \sin^2 \alpha &= \frac{2p \cdot 2(p-a)}{2bc} \cdot \frac{2(p-c)2(p-b)}{2bc} = \\ &= \frac{4}{b^2 c^2} p \cdot (p-a)(p-b)(p-c) \\ \sin \alpha &= \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (109.6) \end{aligned}$$

Podstawiając (109.6) do (109.2), dostajemy wzór Herona (109.4)

**Przykład 1.** Obliczyć pole trójkąta o bokach  $a = 0,9$ ,  $b = 1,1$  i  $c = 1,4$ .

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} 2p &= 0,9 + 1,1 + 1,4 = 3,4 \\ p &= 3,4 : 2 = 1,7 & \lg p &= 0,2304 \\ p-a &= 1,7 - 0,9 = 0,8 & \lg(p-a) &= 1,9031 \\ p-b &= 1,7 - 1,1 = 0,6 & \lg(p-b) &= 1,7782 \\ p-c &= 1,7 - 1,4 = 0,3 & \lg(p-c) &= 1,4771 \\ \hline \lg S^2 &= 1,3888 \end{aligned}$$

Aby podzielić 1,3888 przez 2, uprzednio przekształcamy ten logarytm

$$1,3888 = -2 + 1,3888$$

$$\lg S = (-2 + 1,3888) : 2 = -1 + 0,6944 = \bar{1},6944$$

Odp.  $S = 0,4948$  (odpowiednich jednostek kwadratowych).

Pole trójkąta jest iloczynem połowy obwodu przez promień koła wpisanego

$$S = pr \tag{109.7}$$

**Dowód.**  $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$

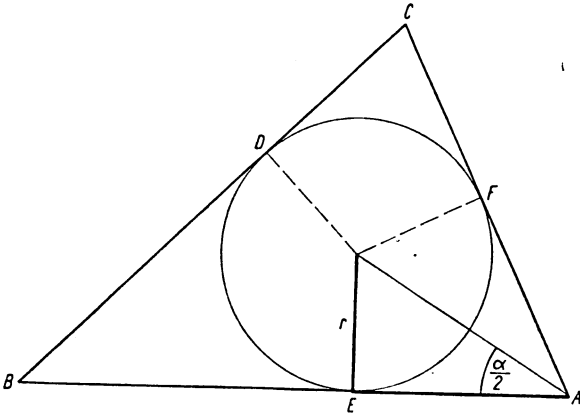
Wzór na promień koła wpisanego

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \tag{109.8}$$

**Dowód.** Wzór ten otrzymujemy z porównania prawych stron wzorów (109.7) i (109.4).

Wzory połówkowe

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c} \tag{109.9}$$



Rys. 109-2

**Dowód** (rys. 109-2). Niech  $D, E, F$  będą punktami styczności okręgu wpisanego odpowiednio z bokami  $a, b, c$ . Ponieważ  $BC = a$ , zaś  $BE = BD$  oraz  $CF = CD$ , przeto długość łamanej  $EBCF$  jest równa  $2a$ . Wobec tego łamana  $EAF$  stanowiąca resztę obwodu trójkąta ma długość  $2p-2a$ . Zatem  $EA = p-a$ . Z trójkąta  $OEA$  mamy

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OE}{EA} = \frac{r}{p-a}$$

Podobnie udowadnia się pozostałe dwa wzory połówkowe.

**Przykład 2.** Rozwiązać trójkąt o bokach  $a = 163,6$ ,  $b = 397,5$ ,  $c = 253,7$ .

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(a+b+c) = 407,4 & p-a &= 243,8 \\ p-b &= 9,9 \\ p-c &= 153,7 \end{aligned}$$

Obliczmy  $r$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad \lg r = \frac{1}{2} [\lg(p-a) + \lg(p-b) + \lg(p-c) - \lg p]$$

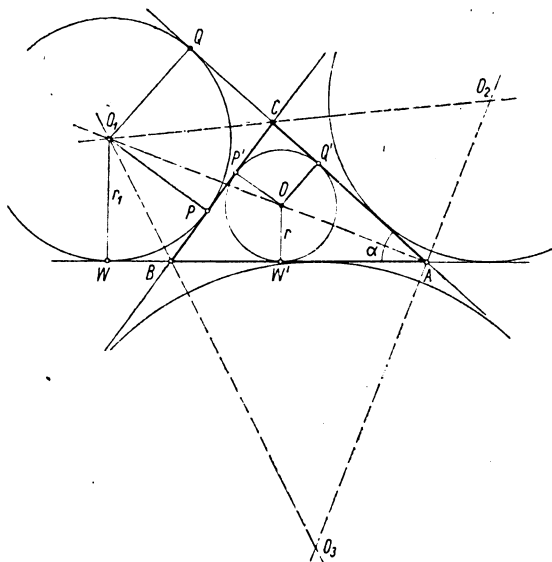
|                     |   |   |
|---------------------|---|---|
| $\lg(p-a) = 2,3870$ | } | + |
| $\lg(p-b) = 0,9956$ |   |   |
| $\lg(p-c) = 2,1867$ |   |   |
| $\hline = 5,5693$   |   |   |
| $\lg p = 2,6100$    | } | - |
| $\hline 2,9593 : 2$ |   |   |
| $\lg r = 1,4797$    |   |   |

Teraz stosujemy wzory połówkowe

|                                                      |                                                   |                                                                |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$ | $\lg r = 1,4797$                                  | $\frac{\alpha}{2} = 7^\circ 03', \quad \alpha = 14^\circ 06'$  |
|                                                      | $\lg(p-a) = 2,3870$                               |                                                                |
|                                                      | $\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1,0927$ |                                                                |
|                                                      | $\hline$                                          |                                                                |
| $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}$  | $\lg r = 1,4797$                                  | $\frac{\beta}{2} = 71^\circ 50', \quad \beta = 143^\circ 40'$  |
|                                                      | $\lg(p-b) = 0,9956$                               |                                                                |
|                                                      | $\lg \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 0,4841$  |                                                                |
|                                                      | $\hline$                                          |                                                                |
| $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}$ | $\lg r = 1,4797$                                  | $\frac{\gamma}{2} = 11^\circ 07', \quad \gamma = 22^\circ 14'$ |
|                                                      | $\lg(p-c) = 2,1867$                               |                                                                |
|                                                      | $\lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1,2630$ |                                                                |
|                                                      | $\hline$                                          |                                                                |

Kontrola rachunku:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ 00'$ .

**Promień kół dopisanych.** *Kolem dopisanym* do danego trójkąta nazywamy koło styczne do jednego boku i do przedłużeń dwóch pozostałych boków tego trójkąta (rys. 109-3). Środek  $O$  koła dopisanego do boku  $BC = a$  leży w punkcie przecięcia się



Rys. 109-3

dwusiecznych kąta wewnętrznego przy  $A$  i kątów zewnętrznych przy  $B$  i przy  $C$ . Dla dowolnego trójkąta istnieją trzy koła dopisane.

*Promienie kół dopisanych stycznych do boków  $a, b, c$  są równe*

$$r_1 = \frac{S}{p-a} \quad r_2 = \frac{S}{p-b} \quad r_3 = \frac{S}{p-c} \quad (109.10)$$

**Dowód.**  $WA + AQ =$  obwód trójkąta  $= 2p$ , ale  $WA = AQ$ , więc  $WA = p$ . Teraz łatwo obliczymy  $r_1$

$$\frac{r_1}{WA} = \frac{r_1}{p} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Z porównania ze wzorem (109.9) dostajemy  $r_1 : p = r : (p-a)$ , skąd  $r_1 = \frac{pr}{p-a}$ , a wobec (109.7) jest  $r_1 = \frac{S}{p-a}$  c.n.u. Podobnie dowodzi się wzorów na promienie  $r_2$  i  $r_3$ .

**Promień  $R$  koła opisanego na trójkącie** o bokach  $a, b, c$  i połu  $S$  wyraża się wzorem

$$R = \frac{abc}{4S} \quad (109.11)$$

**Dowód.** Twierdzenie sinusów dostarcza równości

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Stąd

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{abc}{2bc \sin \alpha}$$

a wobec równości (109.2) jest

$$R = \frac{abc}{4S}$$

### Zadania

**Zadanie 1.** Obliczyć pole trójkąta o bokach  $a = 0,1636$ ,  $b = 0,3975$ ,  $c = 0,2537$

**Zadanie 2.** Stosując wzory połówkowe rozwiązać trójkąt o bokach  $a = 9$ ;  $b = 10$ ;  $c = 13$  i wykonać kontrolę rachunku.

**Zadanie 3.** Rozwiązać trójkąt, obliczyć pole i promień koła wpisanego, mając dane

a)  $a = 1$ ,  $\beta = 135^\circ$ ,  $\gamma = 26^\circ 34'$

b)  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $\alpha = 110^\circ$

c)  $a = 45,84$ ,  $b = 51,4$ ,  $c = 36,24$

**Zadanie 4.** Udowodnić, że iloczyn promieni czterech kół: koła wpisanego i trzech kół dopisanych, równa się kwadratowi pola trójkąta

$$r r_1 r_2 r_3 = S^2$$

**Zadanie 5.** Obliczyć promień  $R$  koła opisanego na trójkącie o bokach  $a = 5$ ,  $b = 6$ ,  $c = 7$ .

## 110. Zastosowania trygonometrii do planimetrii

Zastosowania trygonometrii do planimetrii sprowadzają się zwykle do rozwiązywania trójkątów. Trudności pochodzić mogą stąd, że z tematu zadania nie zawsze jest widoczne, które trójkąty należy rozwiązać, a często elementy potrzebne do rozwiązania danego trójkąta trzeba obliczać z innego trójkąta.

Przy rozwiązywaniu zadań z tego zakresu zaleca się:

– sporządzić szkic;

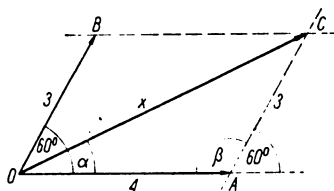
- oznaczyć długości odcinków i miary kątów pojedynczymi literami i ustalić, które z nich należy obliczyć dla uzyskania odpowiedzi;
- ustalić które trójkąty będą rozważane, które z nich są prostokątne i wybrać twierdzenia, które będziemy stosować;
- ułożyć równanie dla wyznaczenia niewiadomej; jeśli niewiadomych jest więcej, to dla wyznaczenia ich trzeba mieć tyle równań niezależnych między sobą, ile jest niewiadomych;
- w zadaniach bardziej złożonych nie spieszyć się ze wstawianiem danych numerycznych, lecz posługiwać się jak najdłużej oznaczeniami literowymi, to bowiem pozwala niekiedy na wydajne uproszczenie otrzymywanych wyrażeń;
- przed rozpoczęciem obliczeń numerycznych sprowadzić otrzymane wyrażenie do najprostszej postaci.

**Równoległobok sił.** Dwie siły 4 kG i 3 kG tworzą kąt  $60^\circ$ . Wyznaczyć moduł siły wypadkowej i kąt jej z siłą 4 kG.

**Rozwiązanie.** Szkic (rys. 110-1). W trójkącie  $OAC$  znamy  $OA = 4$ ,  $AC = 3$ ,  $\beta = \sphericalangle OAC = 120^\circ$ . Twierdzenie cosinusów daje

$$x^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 120^\circ = 37$$

$$x = \sqrt{37} = 6,083$$



Rys. 110-1

Kąt  $\alpha$  obliczamy z twierdzenia sinusów

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{3}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{3 \sin \beta}{x} = \frac{3 \sin 120^\circ}{\sqrt{37}} = \frac{3 \sin 60^\circ}{\sqrt{37}}$$

$$\lg \sin \alpha = \lg 3 + \lg \sin 60^\circ - \lg \sqrt{37}$$

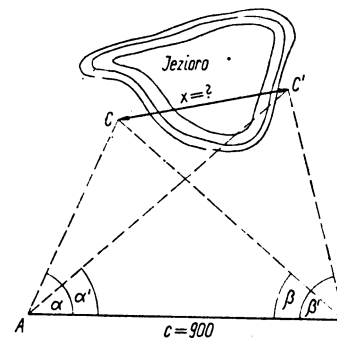
$$\begin{array}{r} \lg 3 = 0,4771 \\ \lg \sin 60^\circ = 1,9375 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} \lg 3 = 0,4771 \\ \lg \sin 60^\circ = 1,9375 \end{array}} \right\} +$$

$$\begin{array}{r} 0,4146 \\ \lg \sqrt{37} = \lg 6,083 = 0,7841 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 0,4146 \\ \lg \sqrt{37} = \lg 6,083 = 0,7841 \end{array}} \right\} -$$

$$\lg \sin \alpha = 1,6305 \quad \text{skąd} \quad \alpha = 25^\circ 17'$$

Odp. Siła wypadkowa ma moduł 6,083 kG i tworzy z siłą 4 kG kąt  $25^\circ 17'$ .

**Wcinanie się w przód do dwóch punktów** — tak nazywa się jedno z zadań w miernictwie polegające na wyznaczeniu odległości między dwoma niedostępnymi punktami  $C$  i  $C'$  (rys. 110-2), gdy wykonane zostały odpowiednie pomiary z dwóch dostępnych punktów  $A$  i  $B$ .



Rys. 110-2

**Przykład.** Zakładamy, że punkty  $A, B, C, C'$  leżą w jednej płaszczyźnie i że  $AB = c = 900$  m,  $\alpha = 61^\circ$ ,  $\alpha' = 28^\circ$ ,  $\beta = 39^\circ$ ,  $\beta' = 75^\circ$ .

Plan rozwiązania.

- 1) Z trójkąta  $ABC$  obliczymy  $BC$ , stosując twierdzenie sinusów;
- 2) z trójkąta  $ABC'$  obliczymy  $BC'$ , stosując twierdzenie sinusów;
- 3) z trójkąta  $CBC'$  obliczymy  $CC'$ , stosując twierdzenie cosinusów.

**Rozwiązanie**

1)

$$BC = \frac{AB \sin \alpha}{\sin \sphericalangle ACB} = \frac{900 \sin 61^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$\begin{array}{r} \lg 900 = 2,9542 \\ \lg \sin 61^\circ = 1,9413 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} \lg 900 = 2,9542 \\ \lg \sin 61^\circ = 1,9413 \end{array}} \right\} +$$

$$\begin{array}{r} 2,8960 \\ \lg \sin 80^\circ = 1,9934 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2,8960 \\ \lg \sin 80^\circ = 1,9934 \end{array}} \right\} -$$

$$\lg BC = 2,9026$$

2)

$$BC' = \frac{AB \sin \alpha'}{\sin \sphericalangle AC'B} = \frac{900 \sin 28^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$\begin{array}{r} \lg 900 = 2,9542 \\ \lg \sin 28^\circ = 1,6716 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} \lg 900 = 2,9542 \\ \lg \sin 28^\circ = 1,6716 \end{array}} \right\} +$$

$$\begin{array}{r} 2,6258 \\ \lg \sin 75^\circ = 1,9849 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2,6258 \\ \lg \sin 75^\circ = 1,9849 \end{array}} \right\} -$$

$$\lg BC' = 2,6409$$

$$3) \quad x^2 = BC^2 + BC'^2 - 2 \cdot BC \cdot BC' \cdot \cos(\beta - \beta')$$

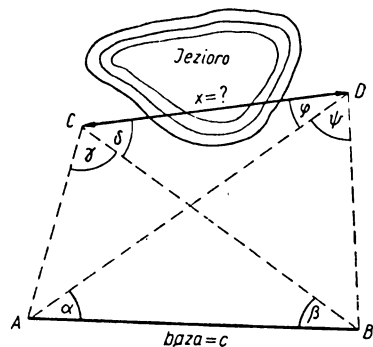
Za pomocą logarytmów obliczamy oddzielnie każdy składnik prawej strony. Ostatni składnik oznaczamy  $y$ .

Korzystamy ze znalezionych powyżej logarytmów

$$\begin{array}{rcl}
 \lg BC'^2 = & 2 \lg BC = 5,8052 & \text{skąd} \\
 \lg BC'^2 = & 2 \lg BC' = 5,2818 & \text{skąd} \\
 & \frac{BC^2 = 638\,600}{BC'^2 = 191\,400} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lg BC'^2 \\ \lg BC'^2 \end{array}} \right\} + \\
 & 830\,000 & \\
 \lg 2 = 0,3010 & & \\
 \lg BC = 2,9026 & & \\
 \lg BC' = 2,6409 & & \\
 \lg \cos(\beta' - \beta) = 1,8965 & & \\
 \hline
 \lg y = 5,7410 & \text{skąd} & y = 550\,800 \\
 & & CC'^2 = 279\,200 \\
 & & \lg(CC'^2) = 5,4459 : 2 \\
 & & \lg CC' = 2,7230
 \end{array}$$

Odp.  $CC' = 528,4$  m.

**Wcinanie się wstecz do dwóch punktów.** W punkcie  $C$  (rys. 110-3) dokonano pomiarów kątów  $\gamma, \delta$ , w punkcie  $D$  zmierzono kąty  $\varphi, \psi$ , długość bazy  $AB = c$  jest wiadoma. Wyznaczyć odległość  $CD = x$ .



Rys. 110-3

**Rozwiązanie.** Zadanie sprowadzimy do poprzedniego, jeśli wyznaczymy jeden z kątów  $\alpha, \beta$ . Z trójkątów  $DBC$  i  $DBA$  mamy

$$\frac{x}{BD} = \frac{\sin(\delta + \varphi + \psi)}{\sin \delta}, \quad \frac{BD}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \quad \text{skąd} \quad \frac{x}{c} = \frac{\sin \alpha \sin(\delta + \varphi + \psi)}{\sin \delta \sin \psi}$$

Z trójkątów  $CAD$  i  $CAB$  otrzymujemy analogicznie

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin \beta \sin(\delta + \varphi + \gamma)}{\sin \varphi \sin \gamma}$$

Z porównania prawych stron dwóch ostatnich równań mamy

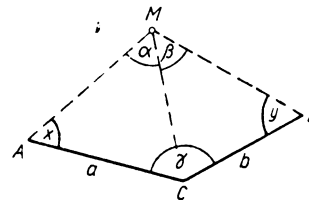
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin(\delta + \varphi + \psi) \sin \varphi \sin \gamma}{\sin(\delta + \varphi + \gamma) \sin \psi \sin \delta}$$

Wartość prawej strony, znaną z pomiarów, oznaczmy  $k$ . Mamy więc dla  $\alpha, \beta$  dwa równania

$$\sin \alpha = k \sin \beta \quad \alpha + \beta = \delta + \varphi$$

Rugując  $\beta$ , dostaniemy dla  $\alpha$  równanie typu  $a \sin \alpha + b \cos \alpha = c$ .

**Wcinanie się wstecz do trzech punktów, czyli zagadnienie Pothenota.** Obserwator w punkcie  $M$  (rys. 110-4) zmierzył kąty  $\alpha, \beta$ , a z mapy odczytał długości  $a, b$  i kąt  $\gamma$ . Wyznaczyć położenie punktu  $M$ . Punkty  $A, B, C, M$  leżą w jednej płaszczyźnie.



Rys. 110-4

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia kątów  $x, y$ . Z tw. sinusów w trójkącie  $ACM$  mamy  $CM = \frac{a \sin x}{\sin(\alpha + x)}$ . Z tw. sinusów w trójkącie  $BCM$  mamy  $CM = \frac{b \sin y}{\sin(\beta + y)}$ . Z porównania dostajemy równanie

$$\frac{a \sin x}{\sin(\alpha + x)} = \frac{b \sin y}{\sin(\beta + y)}$$

Nadto mamy równanie  $x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$ . Rugując  $y$ , dostajemy na  $x$  równanie typu  $a \sin x + b \cos x = c$ .

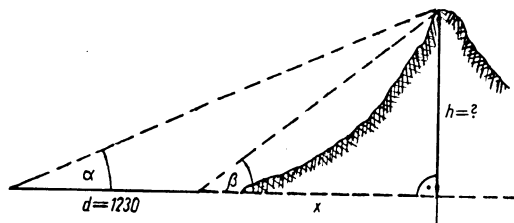
**Elewacja i depresja.** Jeśli przedmiot obserwowany znajduje się powyżej obserwatora, to kąt między kierunkiem patrzenia a płaszczyzną poziomą (horyzontalną) nazywamy *kątem elewacji* (wzniesienia).

Jeśli przedmiot obserwowany znajduje się poniżej obserwatora, to kąt między kierunkiem patrzenia a płaszczyzną poziomą nazywamy *kątem depresji* (obniżenia).

Kąt elewacji znajduje się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez punkt obserwacyjny i przedmiot obserwowany. Kąty elewacji dwóch przedmiotów obserwowanych mogą się znajdować w dwóch różnych płaszczyznach pionowych; jednak każda z tych płaszczyzn przechodzi przez pion punktu obserwacyjnego. To samo odnosi się do kąta depresji. W astronomii kąt elewacji jest nazywany *wysokością* (horyzontalną).

**Przykład.** Z dwóch punktów leżących na brzegu jeziora i oddalonych od siebie o  $d = 1230$  m obserwujemy szczyt góry pod kątami elewacji  $\alpha = 25^\circ 30'$  i  $\beta = 31^\circ 50'$ .

Szczyt góry i oba punkty obserwacyjne leżą w tej samej płaszczyźnie pionowej. Dla uproszczenia zakładamy, że punkty obserwacyjne leżą na wysokości poziomu jeziora. Obliczyć wysokość szczytu góry względem poziomu jeziora.



Rys. 110-5

Rozwiązanie (rys. 110-5). Niewiadomą wysokość szczytu oznaczamy  $h$ . Prócz niej trzeba wprowadzić drugą niewiadomą:  $x$  = odległość punktu obserwacyjnego od pionu przeprowadzonego przez szczyt góry. Jest

$$\frac{x+d}{h} = \operatorname{ctg} \alpha \quad \frac{x}{h} = \operatorname{ctg} \beta \quad \text{skąd} \quad h = \frac{d}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Otrzymane rozwiązanie można sprowadzić do postaci logarytmowalnej

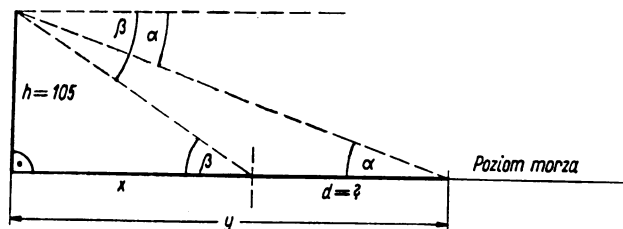
$$h = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Obliczenie numeryczne

$$\begin{array}{rcl} \lg d & = \lg 1230 & = 3,0899 \\ \lg \sin \alpha & = \lg \sin 25^\circ 30' & = 1,6340 \\ \lg \sin \beta & = \lg \sin 31^\circ 50' & = 1,7222 \\ \hline & & 2,4461 \\ \lg \sin(\beta - \alpha) & = \lg \sin 6^\circ 20' & = 1,0426 \\ \hline \lg h & & = 3,4035 \end{array}$$

Odp.  $h = 2533$  m.

**Zadanie.** Ze szczytu latarni morskiej wznoszącej się 105 m nad poziomem morza widać łódź żeglującą wprost ku latarni. Łódź tę zaobserwowano najpierw pod kątem



Rys. 110-6

depresji  $\alpha = 6^\circ 20'$ , a nieco później pod kątem depresji  $\beta = 15^\circ 10'$ . Jaką odległość przeplynęła łódź w czasie pomiędzy tymi obserwacjami?

Odp. 
$$d = \frac{h \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} = 558,8 \text{ m}$$

### Zadania

**Zadanie 1.** Dwie siły  $P = 36$  kG,  $Q = 83$  kG tworzą kąt  $77^\circ 12'$ . Obliczyć wielkość siły wypadkowej i kąt, jaki ona tworzy z siłą  $Q$ .

**Zadanie 2.** Z punktów  $A, B$  odległych o 500 m i leżących na szosie o kierunku równoleżnikowym obserwujemy punkty  $C$  i  $C'$  leżące na północ od szosy pod kątami

$$\angle CAB = 120^\circ, \quad \angle C'AB = 90^\circ, \quad \angle CBA = 30^\circ, \quad \angle C'BA = 45^\circ$$

Obliczyć odległość  $CC'$ .

**Zadanie 3.** Stojąc w odległości 20 m od fasady gmachu obserwujemy na niej kolumnę pod kątami elewacji: podstawy kolumny  $\alpha = 60^\circ$  i szczytu kolumny  $\beta = 65^\circ$ . Obliczyć wysokość kolumny.

**Zadanie 4.** Ze szczytu pagórka wzniesionego o  $h = 45$  m nad poziomem jeziora obserwujemy chmurę pod kątem elewacji  $\alpha = 36^\circ$  oraz odbicie chmury w jeziorze pod kątem depresji  $\beta = 37^\circ$ . Obliczyć wysokość chmury nad poziomem jeziora.

**Zadanie 5.** W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli bok przeciwległy w stosunku  $m:n$ ,  $m > n$ . Obliczyć stosunek promienia koła opisanego do promienia koła wpisanego.

**Zadanie 6.** Pole trójkąta prostokątnego o kącie  $\alpha$  ostrym wynosi  $S$ . Obliczyć pole koła opisanego na tym trójkącie.

**Zadanie 7.** Wykazać, że dla dowolnego trójkąta zachodzi równość

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}$$

**Zadanie 8.** W trójkącie dane są boki  $a, b$  oraz związek  $\gamma = 2\alpha$ . Wyznaczyć bok  $c$ .

**Zadanie 9.** Wykazać, że w trójkącie spełniającym związek  $a^2 = b^2 + bc$  zachodzi musi równość  $\alpha = 2\beta$ .

**Zadanie 10.** W trapezie dłuższa podstawa jest równa  $a$ , trzy pozostałe boki są równe między sobą, a przedłużenia ramion przecinają się pod kątem  $2\alpha$ . Obliczyć obwód trapezu.

**Zadanie 11.** Wykazać, że w trójkącie, którego kąty spełniają równość  $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0$ , jeden z kątów równa się  $60^\circ$ .

**Zadanie 12.** Środki  $n$  kół o jednakowych promieniach leżą na okręgu o danym promieniu  $R$ . Każde z tych kół styka się z dwoma sąsiednimi. Obliczyć promień  $r$  tych kół.

**Zadanie 13.** Obliczyć stosunek pól  $n$ -kąta foremnego wpisanego w koło i  $n$ -kąta foremnego opisanego na tym kole.

**Zadanie 14.** Siła  $\vec{F}$  rozkłada się na dwie składowe o równych modułach, rozchylone pod kątem  $2\varphi$ . Wyznaczyć ich moduł.

**Zadanie 15.** Na czym polega wcinanie w przód do dwóch punktów? Obliczyć  $CC'$ , jeśli wiadomo, że  $AB = 6$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle BAC' = 45^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$  i  $\angle ABC' = 45^\circ$ .

**Zadanie 16.** Wyznaczyć promień koła dopisanego do najdłuższego boku trójkąta o bokach 3, 4 i 5.

**Zadanie 17.** Wyznaczyć promień koła opisanego na trójkącie o bokach 8, 6 i 4. Nakreślić rysunek i porównać z nim wynik obliczeń.

### Odpowiedzi do rozdziału XVI

108

1.  $c = 1$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ .
2. Jest  $b > a$ , więc musiałoby być  $\beta > \alpha = 120^\circ$ . Trójkąt o dwóch kątach rozwartych nie może istnieć.
3. Z prawa trójkąta  $c > |b - a|$  wynika, że  $c > 2$ , więc  $a$  jest najkrótszym bokiem, przeto  $\alpha$  najmniejszym kątem. Ale  $\alpha = 60^\circ$ , więc  $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ , co jest niemożliwe. Trójkąt nie istnieje.

- |                                |                             |                           |
|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 4. $b = 23,8$ ;                | $c = 26,1$ ;                | $\gamma = 76^\circ$       |
| 5. $a = 16,4$ ;                | $b = 32,2$ ;                | $\alpha = 25^\circ$       |
| 6. $a = 0,5144$ ;              | $c = 1,025$ ;               | $\beta = 42^\circ 14'$    |
| 7. $c = 4,122$ ;               | $\beta = 29^\circ 08'$ ;    | $\gamma = 48^\circ 14'$   |
| 8. $c_1 = 301,2$ ;             | $\beta_1 = 45^\circ 12'$ ;  | $\gamma_1 = 99^\circ 22'$ |
| $c_2 = 51,79$ ;                | $\beta_2 = 134^\circ 48'$ ; | $\gamma_2 = 9^\circ 46'$  |
| 9. $a = \sqrt{7}$              | $\beta = 130^\circ 54'$ ;   | $\gamma = 19^\circ 06'$   |
| 10. $a = 12,1$ ;               | $\beta = 23^\circ 54'$ ;    | $\gamma = 54^\circ 06'$   |
| 11. $c = 291,2$ ;              | $\alpha = 60^\circ 40'$ ;   | $\beta = 55^\circ 42'$    |
| 12. $a = 0,011$ ;              | $\beta = 26^\circ 37'$ ;    | $\gamma = 134^\circ 12'$  |
| 13. $\alpha = 73^\circ 30'$ ;  | $\beta = 79^\circ 24'$ ;    | $\gamma = 27^\circ 06'$   |
| 14. $\alpha = 108^\circ 13'$ ; | $\beta = 49^\circ 27'$ ;    | $\gamma = 22^\circ 20'$   |
| 15. $\gamma = 72^\circ 16'$ ;  | $\beta = 35^\circ 04'$ ;    | $c = 86,96$               |

109

1.  $S = 0,01229$
2.  $\alpha = 43^\circ 42'$      $\beta = 50^\circ 08'$      $\gamma = 86^\circ 10'$
3. a)  $\alpha = 18^\circ 26'$      $b = 2,2361$      $c = 1,4142$ ;  
 $S = 0,5$      $r = 0,2155$

$$\text{b) } S = 3 \sin 70^\circ; \quad a = \sqrt{17,104} = 4,14; \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 4,57;$$

$$r = S/p = 0,6169$$

$$\text{c) } \alpha = 60^\circ 10'; \quad \beta = 76^\circ 34'; \quad \gamma = 43^\circ 16'$$

$$S = 808; \quad r = 12,1$$

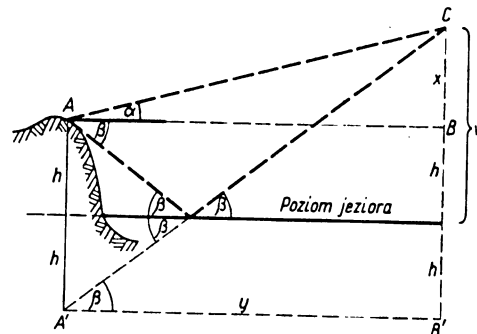
4. Skorzystać z (109.7), (109.10) i (109.4).

$$\text{5. Stosując (109.11) i wzór Herona, dostajemy } R = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 6 \sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}.$$

110

1. 97,5 kG,  $21^\circ 06'$ . 2. 259 m. 3. 8,26 m.

4. Sporządzić szkic (rys. 110-7) uwzględniając prawo fizyczne, które mówi, że kąt odbicia promienia świetlnego jest równy kątowi padania. Przedłużając promień



Rys. 110-7

światlny padający od chmury na jezioro aż do przecięcia się z pionem punktu obserwacyjnego otrzymujemy trójkąt prostokątny  $A'B'C$  o kącie ostrym  $\beta$  i przyprostokątnych:  $y$ ,  $2h+x$ , gdzie  $y$  jest horyzontalną odległością chmury od punktu obserwacyjnego, a  $x$  — wysokością chmury względem punktu obserwacyjnego. Drugim trójkątem prostokątnym jest trójkąt  $ABC$ ; ma on kąt ostry  $\alpha$  i przyprostokątne  $x$ ,  $y$ . Z trójkątów  $ABC$  i  $A'B'C$  otrzymujemy  $y = x \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $y = (2h+x) \operatorname{ctg} \beta$ . Z tych dwóch równań rugujemy  $y$  i dostajemy

$$x = \frac{2h \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} \quad \text{skąd} \quad w = x + h = h \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = h \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} = 2465 \text{ m}$$

$$\text{5. } \frac{m}{2n} \left( 1 + \sqrt{\frac{m+n}{m-n}} \right). \quad \text{6. } \frac{S\pi}{\sin 2\alpha}. \quad \text{8. } \sqrt{a(a+b)}. \quad \text{10. } a \frac{4+2 \sin \alpha}{1+2 \sin \alpha}.$$

$$\text{12. } r = R \sin \frac{180^\circ}{n}. \quad \text{13. } \cos^2 \frac{180^\circ}{n}. \quad \text{14. } \frac{F}{2 \cos \varphi}. \quad \text{15. } \sqrt{30-12\sqrt{3}}.$$

$$\text{16. 6.} \quad \text{17. } \frac{16}{\sqrt{15}}$$

## Rozdział XVII

# FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

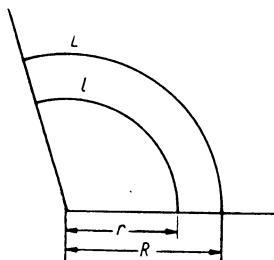
### 111. Łukowa miara kąta. Inne miary kąta

**Łukowa miara kąta nieskierowanego.** Niech będzie dany na płaszczyźnie dowolny kąt nieskierowany. Zatoczmy z jego wierzchołka okrąg o dowolnym promieniu  $r$ . Niech  $l$  oznacza łuk będący częścią wspólną tego okręgu i obszaru danego kąta. Stosunek długości tego łuku do promienia nazywamy *łukową miarą kąta*.

$$\text{Łukowa miara kąta} = \frac{\text{łuk}}{\text{promień}} = \frac{l}{r} \quad (111.1)$$

Łukowa miara kąta nie zależy od długości promienia, bowiem łuki  $L$ ,  $l$  zatoczone z wierzchołka danego kąta (rys. 111-1) i zawarte w tym kącie są proporcjonalne do swych promieni  $R$ ,  $r$

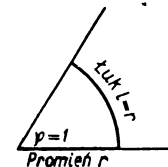
$$\frac{L}{R} = \frac{l}{r}$$



Rys. 111-1

**Radian. Definicja 111.1.** *Radianem* nazywamy kąt, którego miara łukowa jest równa 1.

Radian jest to kąt, w którym łuk jest równy promieniowi (rys. 111-2).



Rys. 111-2. Radian, czyli kąt o mierze łukowej  $\varphi = 1$

Kąt pełny ma miarę łukową równą  $2\pi$ ; mówimy też, że kąt pełny równa się  $2\pi$  radianów

$$2\pi \text{ radianów} = 360^\circ$$

Stąd

$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 45''$$

**Obliczenie miary łukowej** dowolnego kąta opiera się na dwóch faktach:

- kąt pełny ma miarę łukową równą  $2\pi$  lub, co na jedno wychodzi, kąt półpełny ma miarę łukową równą  $\pi$ ,
- miara łukowa kąta jest proporcjonalna do kąta.

**Przykład.** Dany jest kąt  $37^\circ$ , wyznaczyć jego miarę łukową.

**Rozwiązanie**

kątowi  $180^\circ$  odpowiada miara łukowa  $\pi$

kątowi  $37^\circ$  odpowiada miara łukowa  $x$

$$180^\circ : 37^\circ = \pi : x$$

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 37^\circ = 0,6458$$

Odp. Kąt  $37^\circ$  ma miarę łukową 0,6458, co można też odczytać z tablicy II.

**Przykład.** Dany jest kąt 1,5 radiana, wyznaczyć jego miarę stopniową.

**Rozwiązanie**

kątowi  $\pi$  radianów odpowiada  $180^\circ$

kątowi 1,5 radiana odpowiada  $x^\circ$

$$\pi : 1,5 = 180^\circ : x^\circ$$

$$x^\circ = \frac{1,5}{\pi} 180^\circ = 85,96^\circ$$

Odp.

$$x^\circ = 85,96^\circ = 85^\circ 57,6' = 85^\circ 57' 36''$$

**Wzór na zamianę miary stopniowej na łukową i odwrotnie.** Jeśli miarę łukową kąta  $\varphi$  oznaczmy  $\widehat{\varphi}$ , a miarę stopniową tego kąta  $\varphi^\circ$ , to zachodzi proporcja

$$\widehat{\varphi} : \pi = \varphi^\circ : 180^\circ \quad (111.2)$$

Miarę łukową oznacza się też symbolem  $\varphi$ , ale tam, gdzie nie ma wątpliwości o jaką miarę chodzi, pisze się po prostu  $\varphi$ . Radian oznacza się skrótem rad. Ze wzoru (111.1) widać, że miara łukowa kąta ma wymiar  $\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$ , dlatego niekiedy nie używa się skrótu rad i kąt  $\varphi$  radianów zapisuje się po prostu  $\varphi$ .

Tablica 111-1

| Kąt                                                   | Miara stopniowa | Miara łukowa                                    |
|-------------------------------------------------------|-----------------|-------------------------------------------------|
| Kąt pełny                                             | 360°            | $2\pi = 6,2832$                                 |
| kąt półpełny                                          | 180°            | $\pi = 3,1416$                                  |
| kąt prosty                                            | 90°             | $\frac{\pi}{2} = 1,5708$                        |
| kąt w trójkącie równobocznym                          | 60°             | $\frac{\pi}{3} = 1,0472$                        |
| kąt między przekątną a bokiem kwadratu                | 45°             | $\frac{\pi}{4} = 0,7854$                        |
| kąt między dwusieczną a bokiem trójkąta równobocznego | 30°             | $\frac{\pi}{6} = 0,5236$                        |
| stopień                                               | 1°              | $\frac{2\pi}{360} = 0,01745$                    |
| minuta                                                | 1'              | $\frac{2\pi}{360 \cdot 60} = 0,000291$          |
| sekunda                                               | 1''             | $\frac{2\pi}{360 \cdot 60 \cdot 60} = 0,000005$ |

**Własności miary łukowej.** Wadą miary łukowej jest niewspółmierność radiana z kątami 90°, 60°, 45°, które występują w najprostszych figurach geometrycznych. Wady tej nie ma miara stopniowa i dlatego tablice funkcji trygonometrycznych są układane zwykle dla kątów wyrażonych w stopniach. Miara łukowa ma jednak też zalety, które występują w zagadnieniach związanych z długością łuku i polem wycinka kołowego oraz w pewnych zagadnieniach teoretycznych dotyczących samych funkcji trygonometrycznych. Oto przykłady tych zagadnień.

**Długość łuku okręgu** o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\widehat{\varphi}$  wyrażonym w mierze łukowej dana jest wzorem

$$\boxed{\text{łuk}} = \boxed{\text{promień}} \cdot \boxed{\text{kąt w radianach}} \quad (111.3)$$

Wynika to bezpośrednio z definicji miary łukowej (111.1).

**Prędkość i przyspieszenie w ruchu po kole.** Jeśli w pewnym mechanizmie jakieś koło obróciło się w czasie  $t$  sekund o  $\varphi$  radianów, to cząstka tego koła znajdująca się

w odległości  $r$  centymetrów od osi obrotu przebyła łuk o długości danej wzorem (111.3). Dzieliąc tę równość przez czas, dostajemy

$$\boxed{\text{prędkość obwodowa}} = \boxed{\text{promień}} \cdot \boxed{\text{prędkość kątowa}} \quad (111.4)$$

Przechodząc do przyspieszeń dostajemy wzór

$$\boxed{\text{przyspieszenie obwodowe}} = \boxed{\text{promień}} \cdot \boxed{\text{przyspieszenie kątowe}} \quad (111.5)$$

**Energia kinetyczna w ruchu obrotowym** wyraża się wzorem

$$E_{\text{kin.obr.}} = \frac{1}{2} B \omega^2 \quad (111.6)$$

gdzie  $B$  oznacza moment bezwładności obracającego się ciała (tj. sumę mas poszczególnych cząstek tego ciała pomnożonych przez kwadraty ich odległości od osi obrotu), a  $\omega$  jest prędkością kątową wyrażoną w radianach na sekundę. Wzór ten jest odpowiednikiem znanego wzoru  $E = \frac{1}{2} m v^2$  na energię kinetyczną w ruchu postępowym. Prostotę wzorów (111.3) — (111.6) zawdzięczamy mierze łukowej.

**Pole wycinka kołowego** równa się połowie iloczynu łuku przez promień. Korzystając ze wzoru (111.3), dostajemy wzór na pole wycinka kołowego.

$$S = \frac{1}{2} r^2 \widehat{\varphi} \quad (111.7)$$

Aby przejść do miary stopniowej, należy  $\widehat{\varphi}$  zastąpić przez  $\frac{\pi}{180} \varphi^\circ$ .

**Sinus jako funkcja łukowej miary kąta.** Funkcje trygonometryczne łukowej miary kąta okazują się pod pewnymi względami prostsze niż funkcje trygonometryczne stopniowej miary kąta, czego ilustracją niech będzie zestawienie paru wzorów matematyki wyższej (tablica 111-2).

Tablica 111-2

| $x$ — łukowa miara kąta               | $x$ — stopniowa miara kąta                                                           |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $(\sin x)' = \cos x$                  | $(\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x$                                                 |
| $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$     | $\int \sin x \, dx = -\frac{180}{\pi} \cos x + C$                                    |
| $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$ | $\sin x = \frac{\pi}{180} x - \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \frac{x^3}{3!} + \dots$ |

**Miara łukowa kąta skierowanego** jest określona w zupełności przez definicję 98.1 i 98.2, jeśli występującą w tych definicjach rozwartość kąta oraz miarę kąta pełnego wyrazimy w radianach.

Łukowa miara *główna* jest liczbą należącą do przedziału  $(-\pi; +\pi)$  i jeśli ją oznaczymy

$$x_0$$

to łukowa miara *wieloznaczna* tego kąta wyraża się wzorem

$$x_0 + 2k\pi \quad k - \text{dowolna liczba całkowita}$$

**Inne miary kąta.** Artyleryjską miarą kąta jest w naszej armii „tysięczna” stanowiąca 1/6000 kąta pełnego. W armiach zachodnich jednostką artyleryjską jest „mil” równy 1/6400 kąta pełnego. Każdy z tych dwóch kątów jest w przybliżeniu kątem, pod jakim przedmiot o wysokości 1 m jest widziany z odległości 1 km.

W geodezji jest używany „grad” równy 1/100 kąta prostego.

## 112. Określenie funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej

*Funkcją zmiennej rzeczywistej* nazywamy funkcję, w której wartości argumentu i wartości funkcji należą do zbioru liczb rzeczywistych. Do funkcji takich nie należą funkcje trygonometryczne kąta ostrego lub skierowanego, natomiast należą do nich funkcje trygonometryczne rozważane jako funkcje miary kąta. W p. 101 rozważaliśmy funkcje trygonometryczne stopniowej miary kąta. Wobec wyraźnych zalet łukowej miary kąta (p. 111) umawiamy się, że pod nazwą „*funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej*” będziemy rozumieli funkcje trygonometryczne łukowej miary kąta.

**Sinus zmiennej rzeczywistej.** Definicja 112.1. *Sinusem liczby  $x$  nazywamy sinus kąta skierowanego, którego miarą łukową jest  $x$ .*

Analogicznie określamy pozostałe funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej.

Wszystkie własności funkcji trygonometrycznych i związki między nimi wprowadzone w rozdz. XIV—XVI zachowują swą moc dla funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej pod warunkiem, że występujące w nich miary stopniowe zastąpimy miarami łukowymi. Twierdzenia te otrzymają więc obecnie nowe sformułowanie. Oto przykłady.

Okresem podstawowym funkcji  $\sin x$  jest liczba  $2\pi$ .

Okresem podstawowym funkcji  $\lg x$  jest liczba  $\pi$ .

Funkcje  $\sin x$  i  $\cos x$  są określone w przedziale  $(-\infty; +\infty)$ .

Funkcja  $\lg x$  jest określona w przedziale  $(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$  oraz w przedziałach, które otrzymujemy z tego przedziału przez przesunięcie po osi  $x$  o dowolną wielokrotność liczby  $\pi$ .

Funkcja  $\ctg x$  jest określona w przedziałach  $(k\pi; (k+1)\pi)$ , gdzie  $k$  jest dowolną liczbą całkowitą.

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (\text{okresowość sinus})$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad (\text{okresowość cosinusa})$$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad (\text{nieparzystość sinus})$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad (\text{parzystość cosinusa})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (\text{wzór redukcyjny})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad (\text{wzór redukcyjny})$$

$$\lg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ctg x \quad (\text{wzór redukcyjny})$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad (\text{wzór redukcyjny})$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad (\text{wzór redukcyjny})$$

Wartości funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej, które trzeba znać na pamięć

$$\sin 0 = 0 \quad \cos 0 = 1 \quad \lg 0 = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \lg \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \lg \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \lg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \lg \frac{\pi}{2} \text{ jest nieokreślony}$$

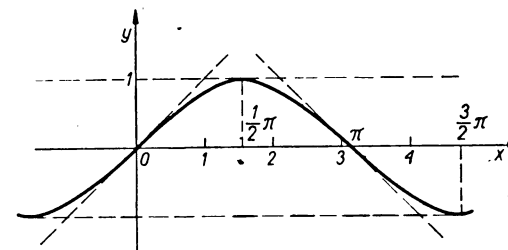
$$\dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots$$

$$\sin \pi = 0 \quad \cos \pi = -1 \quad \lg \pi = 0$$

$$\sin \frac{3}{2}\pi = -1 \quad \cos \frac{3}{2}\pi = 0 \quad \lg \frac{3}{2}\pi \text{ jest nieokreślony}$$

$$\sin 2\pi = 0 \quad \cos 2\pi = 1 \quad \lg 2\pi = 0$$

**Wykres funkcji  $\sin x$**  w układzie prostokątnym, w którym na obu osiach przyjęto takie same jednostki, jest sinusoidą, której styczna w początku układu jest nachylna do osi  $Ox$  pod kątem  $45^\circ$ <sup>1)</sup> (rys. 112-1).

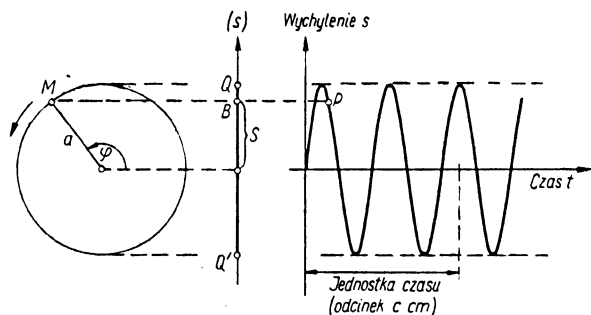


Rys. 112-1. Wykres funkcji  $y = \sin x$ , gdy kąt  $x$  jest mierzony w radianach, a na obu osiach układu, jest taka sama jednostka

<sup>1)</sup> dla  $x \rightarrow 0$  stosunek  $\frac{\sin x}{x}$  dąży do 1, gdy  $x$  jest łukową miarą kąta.

**Wykres drgań.** Załóżmy, że po okręgu o promieniu  $a$  (rys. 112-2) krąży jednostajnie punkt  $M$  z częstością  $\nu$  obiegów na sekundę. Miara łukowa kąta  $\varphi$  wyznaczającego pozycję punktu  $M$  na okręgu wzrasta proporcjonalnie do czasu  $t$

$$\varphi = \omega t \quad (112.1)$$



Rys. 112-2. Krążenie po okręgu, drganie i wykres drgania

( $\omega = 2\pi\nu$  prędkość kątowa w radianach na sekundę,  $t$  — czas w sekundach). W płaszczyźnie tego okręgu leży oś  $(s)$ . Rzut punktu  $M$  na oś  $(s)$  oznaczmy  $B$ . Pozycja punktu  $B$  na osi  $(s)$  jest dana wzorem

$$s = a \sin \varphi = a \sin \omega t \quad (112.2)$$

*Ruchem harmonicznym* nazywamy ruch rzutu punktu krążącego jednostajnie po okręgu na dowolną prostą leżącą w płaszczyźnie tego okręgu. Zatem (112.2) jest równaniem ruchu harmonicznego (mówimy też: drgania harmonicznego).

### Zadania

**Zadanie 1.** Wypełnić poniższą tabelę, wpisując łukowe miary kątów podanych w stopniach.

| Stopnie | 30°             | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 270° | 360° |
|---------|-----------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| Radiany | $\frac{\pi}{6}$ |     |     |     |      |      |      |      |      |      |

**Zadanie 2.** Wyrazić w mierze łukowej kąt  $\alpha = 34^\circ 50'$ .

**Zadanie 3.** Wyrazić w mierze stopniowej kąt  $\alpha = 1,7153$  rad.

**Zadanie 4.** Wyznaczyć:  $\lg 1$ ,  $\cos 1,5$ ,  $\sin 2$ .

**Zadanie 5.** Obliczyć długość łuku i pole wycinka koła o promieniu  $r = 9,2$  m, gdy kąt środkowy wynosi  $\alpha = 35^\circ$ . Wskazówka: wyrazić najpierw kąt w mierze łukowej.

**Zadanie 6.** Ile radianów ma kąt środkowy, którego łuk wynosi 7 cm, jeżeli promień równa się 8 cm?

**Zadanie 7.** Wyrazić najpierw w radianach, a potem w mierze stopniowej kąt między pionem w Warszawie a pionem w Poznaniu, przyjmując, że odległość między tymi miastami równa się 280 km, promień kuli ziemskiej 6370 km i że piony przechodzą przez środek kuli ziemskiej.

**Zadanie 8.** Wyrazić w radianach kąt, o który obraca się duża wskazówka zegara w ciągu 2 godzin.

**Zadanie 9.** Koło zamachowe o promieniu  $r = 1,5$  m wykonuje 120 obrotów na minutę. Obliczyć prędkość kątową w stopniach na sekundę i radianach na sekundę. Obliczyć prędkość obwodową w metrach na sekundę.

**Zadanie 10.** Ułożyć proporcję z następujących czterech wielkości, które tu są wymienione w kolejności przypadkowej:  $K$  = pole koła,  $S$  = pole wycinka,  $\varphi$  = środkowy kąt wycinka,  $\Omega$  = kąt pełny i wyprowadzić stąd wzory na pole wycinka w dwóch przypadkach:

1. gdy kąt środkowy jest wyrażony w radianach,
2. gdy kąt środkowy wyrażony jest w stopniach.

**Zadanie 11.** Obliczyć pole wycinka i odcinka koła o promieniu  $r = 9$  przy kącie środkowym  $40^\circ$ .

**Zadanie 12.** Wahadło o długości 40 cm wychyla się o  $2^\circ 30'$  w jedną i w drugą stronę od pozycji równowagi. Obliczyć długość łuku, wzdłuż którego wahadło waha się.

**Zadanie 13.** Narysować wykresy funkcji:  $\cos x$ ,  $\lg x$ , przyjmując na obu osiach taki sam odcinek jednostkowy i wyrażając kąt  $x$  w mierze łukowej.

## 113. Funkcje cyklometryczne

**Funkcje cyklometryczne (kołowe)** są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej. Oznaczamy je symbolami

$$\arcsin, \arccos, \arctg, \operatorname{arccotg}$$

Warunkiem wystarczającym na to, aby dla danej funkcji istniała funkcja odwrotna, jest warunek, by dana funkcja była rosnąca albo malejąca. Funkcje trygonometryczne, po zawężeniu do odpowiednich przedziałów, spełniają ten warunek:

— funkcja sinus jest rosnąca w przedziale  $\langle -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} \rangle$ ;

— funkcja cosinus jest malejąca w przedziale  $\langle 0; \pi \rangle$ ;

— funkcja tangens jest rosnąca w przedziale  $\left( -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} \right)$ ;

— funkcja cotangens jest malejąca w przedziale  $(0; \pi)$ .

i w tych przedziałach istnieją funkcje odwrotne, które określamy poniżej.

### Definicja funkcji arcus sinus

$$y = \arcsin x \quad \text{oznacza, że} \quad x = \sin y \quad \text{oraz} \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}$$

**Przykład.** Wyznaczyć wartość  $y = \arcsin \frac{1}{2}$

**Rozwiązanie.** Należy w równości  $x = \sin y$  podstawić  $x = \frac{1}{2}$ . Otrzymamy równanie

$$\frac{1}{2} = \sin y$$

Równanie to ma w zakresie zmiennej rzeczywistej nieskończenie wiele rozwiązań:  $y = \frac{\pi}{6}$ ,  $y = \frac{5\pi}{6}$  oraz wszystkie te wartości, które otrzymamy dodając do  $\frac{\pi}{6}$  lub  $\frac{5\pi}{6}$  całkowitą wielokrotność okresu  $2\pi$ . Jednakże warunek  $|y| \leq \frac{\pi}{2}$  znajdujący się w definicji dopuszcza tylko  $\frac{\pi}{6}$ , a wyklucza inne wartości.

$$\text{Odp. } \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

### Definicja funkcji arcus cosinus

$$y = \arccos x \quad \text{oznacza, że} \quad x = \cos y \quad \text{oraz} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

**Przykład.** Wyznaczyć wartość  $y = \arccos 1$ .

$$\text{Odp. } \arccos 1 = 0.$$

### Definicja funkcji arcus tangens

$$y = \arctg x \quad \text{oznacza, że} \quad x = \tg y \quad \text{oraz} \quad |y| < \frac{\pi}{2}$$

**Przykład.** Wyznaczyć wartość  $\arctg 1$ .

**Rozwiązanie.**  $y = \arctg 1$  oznacza, że  $1 = \tg y$  oraz że  $|y| < \frac{\pi}{2}$ . Równanie  $\tg y = 1$  przy warunku ograniczającym  $|y| < \frac{\pi}{2}$  ma tylko jedno rozwiązanie. Jest nim  $y = \frac{\pi}{4}$ .

$$\text{Odp. } \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

### Definicja funkcji arcus cotangens

$$y = \text{arctg} x \quad \text{oznacza, że} \quad x = \text{ctg} y \quad \text{oraz} \quad 0 < y < \pi$$

**Przykład.** Wyznaczyć wartość  $\text{arctg} 4$ .

**Rozwiązanie.**  $\text{arctg} 4$  jest to główna miara łukowa kąta I lub II ćwiartki, którego cotangens równa się 4. W tablicy naturalnych wartości funkcji trygonometrycz-

nych odszukujemy w kolumnie „ctg” wartość najbliższą danej wartości 4. Jest to 4,0108. Tej wartości cotangensa odpowiada kąt  $14^\circ$ . Jednak odpowiedź musi być wyrażona w radianach. W tej książce na str. 261 oprócz miary stopniowej podana jest też miara łukowa kąta, dzięki czemu odpowiedź mamy gotową  $\text{arctg} 4 = 0,24$  (dalsze cyfry można wyznaczyć przez interpolację).

Jeśli w tablicach nie ma podanych łukowych miar kątów, to musimy przeliczyć miarę stopniową na miarę łukową zgodnie z proporcją (111.2).

**Przykład.** Obliczyć  $\arcsin 0,6$ .

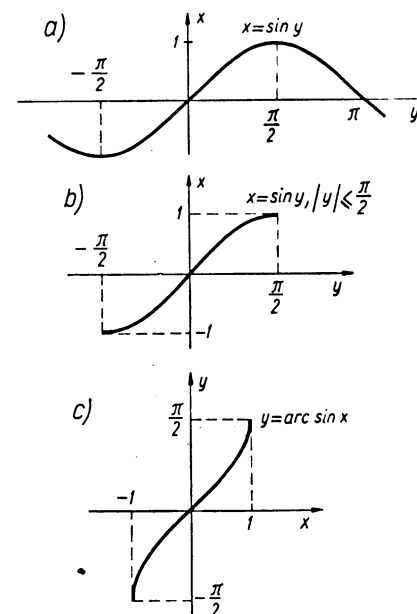
**Rozwiązanie.**  $\arcsin 0,6$  jest to główna łukowa miara kąta o sinusie równym 0,6, przy czym ma to być kąt I lub IV ćwiartki. Z tablicy odczytujemy  $36^\circ 52'$ , co należy zmienić na radiany.

Odp. 0,6434.

**Wykresy funkcji cyklometrycznych.** Wykres funkcji  $y = \arcsin x$  tworzymy zgodnie z definicją tej funkcji

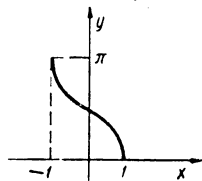
$$y = \arcsin x \quad \text{oznacza, że} \quad x = \sin y \quad \text{oraz} \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}$$

Zaczynamy od związku  $x = \sin y$ . W układzie, którego oś pozioma jest osią  $y$  kreślimy sinusoidę (rys. 113-1a). Następnie uwzględniamy warunek ograniczający  $|y| \leq \frac{\pi}{2}$

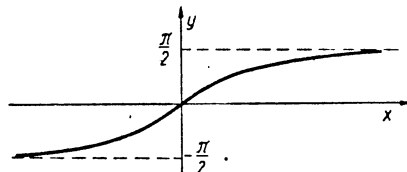


Rys. 113-1. Powstawanie wykresu funkcji  $y = \arcsin x$ : a) sinusoida  $x = \sin y$ , b) sinusoida  $x = \sin y$  obcięta zgodnie z warunkiem  $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ , c) ta sama część sinusoidy po obrocie w przestrzeni dookoła dwusiecznej kąta I i III ćwiartki

i z narysowanej sinusoidy zatrzymujemy tylko część odpowiadającą przedziałowi  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  (rys. 113-1b). Ta część już jest właściwie szukany wykresem, tylko że przywykliśmy zmienną niezależną odcinać na osi poziomej. Trzeba więc rys. 113-1b obrócić w przestrzeni dokoła dwusiecznej I i III ćwiartki tak, aby osie układu zamieniły się miejscami. Otrzymany w ten sposób rysunek 113-1c jest wykresem funkcji  $y = \arcsin x$ .

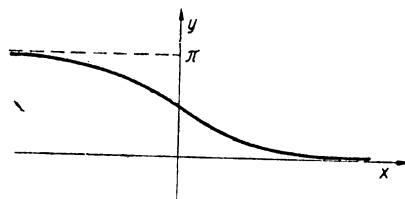


Rys. 113-2. Wykres funkcji  $y = \arccos x$



Rys. 113-3. Wykres funkcji  $y = \arctg x$

Rysunki 113-2, 3 i 4 przedstawiają wykresy pozostałych funkcji cyklometrycznych.



Rys. 113-4. Wykres funkcji  $y = \text{arcctg } x$

### Pytania i zadania

- Co to jest miara łukowa? Co to jest radian?
- Jak zamienia się miarę łukową na stopniową i odwrotnie?
- Napisać wzór na długość łuku i pole wycinka kołowego o kącie środkowym  $\varphi$  radianów.
- Wyznaczyć  $\sin \frac{13}{6} \pi$ ,  $\cos \frac{20}{3} \pi$ ,  $\text{tg} \frac{19}{4} \pi$ ,  $\sin 3\pi$ . Jakiego znaku są  $\sin 3$  i  $\cos 3$ ?
- Wyrazić w mierze łukowej kąty spełniające równanie:
  - $\sin x = 1$ ; b)  $\text{tg } x = 1$ ; c)  $\cos x = 1$ ; d)  $\cos x = \frac{1}{2}$ ; e)  $\sin x = \frac{1}{2}$ .
- Wyrazić w mierze łukowej kąty I i II ćwiartki spełniające nierówność  $\sin x > 0,5$ .

7. Czym różnią się drgania: a)  $s = \sin 5t$ ,  $s = 2 \sin 5t$ ,  $s = 4 \sin 5t$ ; b)  $s = \sin 5t$ ,  $s = \sin 10t$ ,  $s = \sin 20t$ ? Naszkicuj wykresy.

8. Dla jakich  $x$  (wyrażonych w mierze łukowej) ma sens wyrażenie:

a)  $\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}$ ; b)  $\sqrt{1 - \cos x}$ ?

9. Która z liczb  $\sin \frac{1^\circ}{2}$ ,  $\sin \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  jest największa?

10. Wyrazić: a) 1 tysięczną w minutach; b)  $12^\circ$  w tysięcznych.

11. Napisać określenia funkcji cyklometrycznych i narysować ich wykresy.

12. Czy równość  $\sin(\arcsin x) = x$  jest tożsamością?

Czy równość  $\arcsin(\sin x) = x$  jest tożsamością?

W jakim przedziale ta ostatnia równość jest prawdziwa?

13. Która z funkcji cyklometrycznych jest: — ograniczona? — parzysta? — nieparzysta? rosnąca? — malejąca?

14. Jak zachowują się funkcje  $\arctg x$ ,  $\text{arcctg } x$ , gdy  $x$  rośnie do nieskończoności?

15. Wyznaczyć kąt, którego tangens równa się 100 000.

### Odpowiedzi do rozdziału XVII

112

1.  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $2\pi$

2. 0,6079 rad

3.  $98^\circ 17'$

4. 1,5578; 0,0707;  $\sin 2 = \sin 114^\circ 35,5' = \cos 24^\circ 35,5' = 0,9090$

5.  $\alpha = 35^\circ = 0,6109$  rad;  $\tau = 5,62$  m;  $S = 25,84$  m<sup>2</sup>

6.  $\alpha = \frac{7}{8} = 0,875$

7.  $\alpha = 0,04396$  rad =  $2^\circ 31' 07''$

8.  $2 \cdot 2\pi$  rad = 12,5664 rad

9.  $\omega = \frac{\alpha}{t} = 720^\circ$  na sekundę = 12,56 rad/s;  $v = r\omega = 18,84$  m/s

10.  $S:K = \varphi:\Omega$   $S = \frac{1}{2} r^2 \varphi$   $S = \frac{\pi}{360} r^2 \varphi$

11.  $S_{\text{wyc}} = \frac{1}{2} r^2 \varphi = \frac{1}{2} 9^2 \cdot \frac{40^\circ}{180^\circ} \pi = 9\pi = 28,27$  (m<sup>2</sup>)

$S_{\text{odc}} = S_{\text{wyc}} - S_{\text{trójkąta}} = \frac{1}{2} r^2 \varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \sin \varphi) = 2,2396$  (m<sup>2</sup>)

12. 3,49 cm

4.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0, +, -$

5. a)  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , b)  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ , c)  $2k\pi$ , d)  $\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , e)  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ;  $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

6.  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

7. a) Amplitudami; b) częstotliwościami

8. a)  $-\frac{1}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ , b)  $x$  dowolne

9.  $\sin \frac{1^\circ}{2} < \sin \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

10. a) 3,6'; b) 200.

12. Tak, bezwarunkową. Nie, gdyż dla  $x = 2$  funkcja  $\arcsin(\sin x)$  ma wartość 0, a nie 2. Równość  $\arcsin(\sin x) = x$  jest prawdziwa dla  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ .

13. Wszystkie funkcje cyklotometryczne są ograniczone:  $\arcsin$  i  $\arctg$  są nieparzyste; żadna nie jest parzysta;  $\arcsin$  i  $\arctg$  są rosnące,  $\arccos$  i  $\operatorname{arctg}$  są malejące.

14.  $\arctg x$  dąży do  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\operatorname{arctg} x$  dąży do 0.

15. Jest  $\operatorname{tg} \alpha = 100\,000$ . W tabl. II nie znajdujemy tak wielkiej wartości. Oznaczmy  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Wówczas  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha = 0,00001$ . Kąt  $\beta$  jest mały. Dla małych kątów wyrażonych w mierze łukowej zachodzi przybliżona równość

$$\sin \beta \approx \beta \approx \operatorname{tg} \beta$$

Stąd  $\beta \approx 0,00001$  radiana, czyli (tabl. 111-1)  $\beta \approx 2''$ ;  $\alpha \approx 89^\circ 59' 58''$ .

#### Alfabet grecki

|                          |                             |
|--------------------------|-----------------------------|
| $A \alpha$ alfa          | $N \nu$ ni                  |
| $B \beta$ beta           | $\Xi \xi$ ksi               |
| $\Gamma \gamma$ gamma    | $O o$ omikron               |
| $\Delta \delta$ delta    | $\Pi \pi$ pi                |
| $E \varepsilon$ epsilon  | $P \rho$ ro                 |
| $Z \zeta$ dzeta          | $\Sigma \sigma$ sigma       |
| $H \eta$ eta             | $T \tau$ tau                |
| $\Theta \theta$ teta     | $\Upsilon \upsilon$ ypsilon |
| $I \iota$ jota           | $\Phi \phi$ fi              |
| $K \kappa$ kappa         | $X \chi$ chi                |
| $\Lambda \lambda$ lambda | $\Psi \psi$ psi             |
| $M \mu$ mi               | $\Omega \omega$ omega       |

#### Mantysy logarytmów

| N. | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| N. | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |

$$\pi = 3,1416$$

$$\lg \pi = 0,4971$$

$$e = 2,7183$$

$$\lg e = 0,4343$$

$$\ln N = 2,3026 \lg N$$

$$\lg N = 0,4343 \ln N$$

Tablica I

Mantysy logarytmów

| N.  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 55  | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56  | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57  | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58  | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59  | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60  | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61  | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62  | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63  | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64  | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65  | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66  | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67  | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68  | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69  | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 70  | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71  | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72  | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73  | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74  | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75  | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76  | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77  | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78  | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79  | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80  | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81  | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82  | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83  | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84  | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85  | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86  | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87  | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88  | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89  | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90  | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91  | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92  | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93  | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94  | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95  | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96  | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97  | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98  | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99  | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |
| 100 | 0000 | 0004 | 0009 | 0013 | 0017 | 0022 | 0026 | 0030 | 0035 | 0039 |
| N.  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |

Antylogarytmy są to tablice logarytmów ułożone w ten sposób, że na brzegu są mantysy, a wewnątrz — wartości liczb logarytmowanych. Tablice takie ułatwiają wyznaczenie liczby, której logarytm jest dany; spotyka się je w niektórych zbiorach tablic.

Tablica II

Funkcje trygonometryczne

| Kąt<br>w radianach | Kąt<br>w stopniach | sin    | cos    | tg     | ctg     | Kąt<br>w stopniach | Kąt<br>w radianach |
|--------------------|--------------------|--------|--------|--------|---------|--------------------|--------------------|
| 0,0000             | 0                  | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | —       | 90                 | 1,5708             |
| 0,0175             | 1                  | 0,0175 | 0,9998 | 0,0175 | 57,2900 | 89                 | 1,5533             |
| 0349               | 2                  | 0349   | 9994   | 0349   | 28,6363 | 88                 | 5359               |
| 0524               | 3                  | 0523   | 9986   | 0524   | 19,0811 | 87                 | 5184               |
| 0698               | 4                  | 0698   | 9976   | 0699   | 14,3007 | 86                 | 5010               |
| 0873               | 5                  | 0872   | 9962   | 0875   | 11,4301 | 85                 | 4835               |
| 0,1047             | 6                  | 0,1045 | 0,9945 | 0,1051 | 9,5144  | 84                 | 1,4661             |
| 1222               | 7                  | 1219   | 9925   | 1228   | 8,1443  | 83                 | 4486               |
| 1396               | 8                  | 1392   | 9903   | 1405   | 7,1154  | 82                 | 4312               |
| 1571               | 9                  | 1564   | 9877   | 1584   | 6,3138  | 81                 | 4137               |
| 1745               | 10                 | 1736   | 9848   | 1763   | 5,6713  | 80                 | 3963               |
| 0,1920             | 11                 | 0,1908 | 0,9816 | 0,1944 | 5,1446  | 79                 | 1,3788             |
| 2094               | 12                 | 2079   | 9781   | 2126   | 4,7046  | 78                 | 3614               |
| 2269               | 13                 | 2250   | 9744   | 2309   | 4,3315  | 77                 | 3439               |
| 2443               | 14                 | 2419   | 9703   | 2493   | 4,0108  | 76                 | 3265               |
| 2618               | 15                 | 2588   | 9659   | 2679   | 3,7321  | 75                 | 3090               |
| 0,2793             | 16                 | 0,2756 | 0,9613 | 0,2867 | 3,4874  | 74                 | 1,2915             |
| 2967               | 17                 | 2924   | 9563   | 3057   | 3,2709  | 73                 | 2741               |
| 3142               | 18                 | 3090   | 9511   | 3249   | 3,0777  | 72                 | 2566               |
| 3316               | 19                 | 3256   | 9455   | 3443   | 2,9042  | 71                 | 2392               |
| 3491               | 20                 | 3420   | 9397   | 3640   | 2,7475  | 70                 | 2217               |
| 0,3665             | 21                 | 0,3584 | 0,9336 | 0,3839 | 2,6051  | 69                 | 1,2043             |
| 3840               | 22                 | 3746   | 9272   | 4040   | 2,4751  | 68                 | 1868               |
| 4014               | 23                 | 3907   | 9205   | 4245   | 2,3559  | 67                 | 1694               |
| 4189               | 24                 | 4067   | 9135   | 4452   | 2,2460  | 66                 | 1519               |
| 4363               | 25                 | 4226   | 9063   | 4663   | 2,1445  | 65                 | 1345               |
| 0,4538             | 26                 | 0,4384 | 0,8988 | 0,4877 | 2,0503  | 64                 | 1,1170             |
| 4712               | 27                 | 4540   | 8910   | 5095   | 1,9626  | 63                 | 0996               |
| 4887               | 28                 | 4695   | 8829   | 5317   | 1,8807  | 62                 | 0821               |
| 5061               | 29                 | 4848   | 8746   | 5543   | 1,8040  | 61                 | 0647               |
| 5236               | 30                 | 5000   | 8660   | 5774   | 1,7321  | 60                 | 0472               |
| 0,5411             | 31                 | 0,5150 | 0,8572 | 0,6009 | 1,6643  | 59                 | 1,0297             |
| 5585               | 32                 | 5299   | 8480   | 6249   | 1,6003  | 58                 | 1,0123             |
| 5760               | 33                 | 5446   | 8387   | 6494   | 1,5399  | 57                 | 0,9948             |
| 5934               | 34                 | 5592   | 8290   | 6745   | 1,4826  | 56                 | 9774               |
| 6109               | 35                 | 5736   | 8192   | 7002   | 1,4281  | 55                 | 9599               |
| 0,6283             | 36                 | 0,5878 | 0,8090 | 0,7265 | 1,3764  | 54                 | 0,9425             |
| 6458               | 37                 | 6018   | 7986   | 7536   | 1,3270  | 53                 | 9250               |
| 6632               | 38                 | 6157   | 7880   | 7813   | 1,2799  | 52                 | 9076               |
| 6807               | 39                 | 6293   | 7771   | 8098   | 1,2349  | 51                 | 8901               |
| 6981               | 40                 | 6428   | 7660   | 8391   | 1,1918  | 50                 | 8727               |
| 0,7156             | 41                 | 0,6561 | 0,7547 | 0,8693 | 1,1504  | 49                 | 0,8552             |
| 7330               | 42                 | 6691   | 7431   | 0,9004 | 1,1106  | 48                 | 8378               |
| 7505               | 43                 | 6820   | 7314   | 0,9325 | 1,0724  | 47                 | 8203               |
| 7679               | 44                 | 6947   | 7193   | 0,9657 | 1,0355  | 46                 | 8029               |
| 7854               | 45                 | 7071   | 7071   | 1,0000 | 1,0000  | 45                 | 7854               |
|                    |                    | cos    | sin    | ctg    | tg      | Kąt<br>w stopniach | Kąt<br>w radianach |

1 radian = 57°17'44,8" = 57,29578 stopni

1 stopień = 0,0174533 radiana

| Kąt<br>w stopniach | lg sin | lg cos | lg tg  | lg ctg |                    |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------------------|
| 0                  |        | 0,0000 |        |        | 90                 |
| 1                  | 2,2419 | 1,9999 | 2,2419 | 1,7881 | 89                 |
| 2                  | 2,5428 | 9997   | 2,5431 | 1,4569 | 88                 |
| 3                  | 2,7188 | 9994   | 2,7194 | 1,2806 | 87                 |
| 4                  | 2,8436 | 9989   | 2,8446 | 1,1554 | 86                 |
| 5                  | 2,9403 | 9983   | 2,9420 | 1,0580 | 85                 |
| 6                  | 1,0192 | 1,9976 | 1,0216 | 0,9784 | 84                 |
| 7                  | 0859   | 9968   | 0891   | 9109   | 83                 |
| 8                  | 1436   | 9958   | 1478   | 8522   | 82                 |
| 9                  | 1943   | 9946   | 1997   | 8003   | 81                 |
| 10                 | 2397   | 9934   | 2463   | 7537   | 80                 |
| 11                 | 1,2806 | 1,9919 | 1,2887 | 0,7113 | 79                 |
| 12                 | 3179   | 9904   | 3275   | 6725   | 78                 |
| 13                 | 3521   | 9887   | 3634   | 6366   | 77                 |
| 14                 | 3837   | 9869   | 3968   | 6032   | 76                 |
| 15                 | 4130   | 9849   | 4281   | 5719   | 75                 |
| 16                 | 1,4403 | 1,9828 | 1,4575 | 0,5425 | 74                 |
| 17                 | 4659   | 9806   | 4853   | 5147   | 73                 |
| 18                 | 4900   | 9782   | 5118   | 4882   | 72                 |
| 19                 | 5126   | 9757   | 5370   | 4630   | 71                 |
| 20                 | 5341   | 9730   | 5611   | 4389   | 70                 |
| 21                 | 1,5543 | 1,9702 | 1,5842 | 0,4158 | 69                 |
| 22                 | 5736   | 9672   | 6064   | 3936   | 68                 |
| 23                 | 5919   | 9640   | 6279   | 3721   | 67                 |
| 24                 | 6093   | 9607   | 6486   | 3514   | 66                 |
| 25                 | 6259   | 9573   | 6687   | 3313   | 65                 |
| 26                 | 1,6418 | 1,9537 | 1,6882 | 0,3118 | 64                 |
| 27                 | 6570   | 9499   | 7072   | 2928   | 63                 |
| 28                 | 6716   | 9459   | 7257   | 2743   | 62                 |
| 29                 | 6856   | 9418   | 7438   | 2562   | 61                 |
| 30                 | 6990   | 9375   | 7614   | 2386   | 60                 |
| 31                 | 1,7118 | 1,9331 | 1,7788 | 0,2212 | 59                 |
| 32                 | 7242   | 9284   | 7958   | 2042   | 58                 |
| 33                 | 7361   | 9236   | 8125   | 1875   | 57                 |
| 34                 | 7476   | 9186   | 8290   | 1710   | 56                 |
| 35                 | 7586   | 9134   | 8452   | 1548   | 55                 |
| 36                 | 1,7692 | 1,9080 | 1,8613 | 0,1387 | 54                 |
| 37                 | 7795   | 9023   | 8771   | 1229   | 53                 |
| 38                 | 7893   | 8965   | 8928   | 1072   | 52                 |
| 39                 | 7989   | 8905   | 9084   | 0916   | 51                 |
| 40                 | 8081   | 8843   | 9238   | 0762   | 50                 |
| 41                 | 1,8169 | 1,8778 | 1,9392 | 0,0608 | 49                 |
| 42                 | 8255   | 8711   | 9544   | 0456   | 48                 |
| 43                 | 8338   | 8641   | 9697   | 0303   | 47                 |
| 44                 | 8418   | 8569   | 1,9848 | 0152   | 46                 |
| 45                 | 1,8495 | 1,8495 | 0,0000 | 0,0000 | 45                 |
|                    | lg cos | lg sin | lg ctg | lg tg  | Kąt<br>w stopniach |

## Rozdział XVIII

## AKSJOMATY STEREOMETRII

## 114. Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni

**Przestrzeń.** Zbiór wszystkich punktów nazywamy przestrzenią i oznaczamy  $\Omega$ . Inne zbiory punktów, np. proste i płaszczyzny są podzbiorami przestrzeni.

**Aksjomat XI** (o przestrzeni). *W przestrzeni istnieje co najmniej jedna płaszczyzna. Żadna płaszczyzna nie wypełnia całej przestrzeni; inaczej mówiąc: dla każdej płaszczyzny istnieje w przestrzeni co najmniej jeden punkt nie należący do tej płaszczyzny.*

**Aksjomat XII** (o płaszczyznach mających punkt wspólny). *Jeśli dwie płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają co najmniej jeszcze jeden punkt wspólny.*

**Aksjomat XIII** (o części wspólnej dwóch płaszczyzn). *Jeśli dwie różne płaszczyzny mają punkt wspólny, to ich częścią wspólną jest prosta.*

**Aksjomat XIV** (o płaszczyźnie przechodzącej przez trzy punkty). *Przez każde trzy punkty (niekoniecznie różne) przechodzi co najmniej jedna płaszczyzna.*

**Wniosek z aksjomatów XIII i XIV.** *Przez trzy punkty niewspółliniowe przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.*

**Aksjomat XV** (o związku między planimetrią i stereometrią). *Każda płaszczyzna w przestrzeni ma wszystkie własności przyjęte w planimetrii.*

W szczególności na każdej płaszczyźnie można, zgodnie z aksjomatem IV, określić odległość. Wartość liczbową odległości  $XY$  dwóch danych punktów  $X$  i  $Y$  jest zależna od wyboru jednostki odległości. Na każdej płaszczyźnie może być obrana inna jednostka odległości. Aby mieć w całej przestrzeni tę samą jednostkę odległości przyjmujemy następujący aksjomat:

**Aksjomat XVI** (o odległości punktów w przestrzeni). *Jeśli dwa punkty leżą na jednej płaszczyźnie i te same dwa punkty leżą na drugiej płaszczyźnie, to odległość między tymi punktami jest na każdej z tych płaszczyzn taka sama.*

**Wnioski z aksjomatów XI–XVI.** 1. *Jeśli prosta przechodzi przez dwa różne punkty pewnej płaszczyzny, to ta prosta zawiera się w tej płaszczyźnie (mówimy też: leży na tej płaszczyźnie).*

2. Przez dwa różne punkty przestrzeni przechodzi dokładnie jedna prosta. Inaczej mówiąc: Dwa różne punkty przestrzeni wyznaczają prostą.

3. Przez prostą i punkt nie leżący na tej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna. Inaczej mówiąc: Prosta i punkt nie leżący na tej prostej wyznaczają płaszczyznę.

4. Przez dwie proste przecinające się przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna. Inaczej mówiąc: Dwie proste przecinające się wyznaczają płaszczyznę.

### Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

**Twierdzenie 114.1.** Jeśli  $\alpha$  jest płaszczyzną i  $\beta$  jest płaszczyzną, to istnieją dokładnie trzy możliwości:

- 1 — płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  nie mają punktu wspólnego;
- 2 — część wspólna płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  jest prostą;
- 3 — płaszczyzna  $\alpha$  jest identyczna z płaszczyzną  $\beta$ .

**Definicja 114.1** (równoległości, przecinania się i pokrywania płaszczyzn). Jeśli płaszczyzny  $\alpha$ ,  $\beta$  nie mają punktu wspólnego, to mówimy, że płaszczyzny te są *równoległe* i piszemy

$$\alpha \parallel \beta$$

Jeśli część wspólna płaszczyzn  $\alpha$ ,  $\beta$  jest prostą, to mówimy, że płaszczyzny te *przecinają się*, a prostą stanowiącą ich część wspólną nazywamy ich *krawędzią przecięcia*. Jeśli krawędź przecięcia płaszczyzn  $\alpha$ ,  $\beta$  oznaczymy  $k$ , to możemy napisać

$$\alpha \cap \beta = k$$

Jeśli płaszczyzna  $\alpha$  jest identyczna z płaszczyzną  $\beta$ , to mówimy, że płaszczyzny te *pokrywają się* i zapisujemy to

$$\alpha = \beta$$

W tym ostatnim przypadku występuje jedna płaszczyzna o dwóch oznaczeniach. Przyjmujemy, że *każda płaszczyzna jest równoległa do siebie samej*

$$\alpha \parallel \alpha$$

Zatem w przypadku  $\alpha = \beta$  mamy prawo napisać  $\alpha \parallel \beta$ .

Jeśli więc o płaszczyznach  $\alpha$ ,  $\beta$  powiedziano, że są równoległe, to należy przez to rozumieć, że albo są to dwie płaszczyzny nie mające punktu wspólnego, albo  $\alpha$  i  $\beta$  stanowią jedną i tę samą płaszczyznę. Zapisując to symbolicznie, mamy

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow (\alpha \cap \beta = \emptyset \vee \alpha = \beta)$$

**Uwaga** (o symbolu  $\parallel$ ). Równoległość dwóch płaszczyzn w stereometrii i równoległość dwóch prostych w planimetrii — to dwie różne relacje; mimo to, tradycyjnie, oznacza się je tym samym symbolem  $\parallel$ . Tym samym symbolem będziemy też oznaczać równoległość prostej do płaszczyzny (def. 114.2).

### Wzajemne położenie płaszczyzny i prostej

**Twierdzenie 114.2.** Jeśli  $\alpha$  jest płaszczyzną, a  $l$  jest prostą, to istnieją dokładnie trzy możliwości:

- 1 — płaszczyzna  $\alpha$  i prosta  $l$  nie mają punktu wspólnego;
- 2 — częśćią wspólną płaszczyzny  $\alpha$  i prostej  $l$  jest punkt;
- 3 — prosta  $l$  zawiera się w płaszczyźnie  $\alpha$ .

**Definicja 114.2** (równoległości i przecinania się prostej z płaszczyzną). Jeśli płaszczyzna  $\alpha$  i prosta  $l$  nie mają punktu wspólnego, to mówimy, że są *równoległe* i piszemy

$$\alpha \parallel l \quad \text{lub} \quad l \parallel \alpha$$

Jeśli płaszczyzna  $\alpha$  i prosta  $l$  mają dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że *prosta  $l$  przebija płaszczyznę  $\alpha$*  lub że *płaszczyzna  $\alpha$  przecina prostą  $l$* , zaś ich jedyny punkt wspólny nazywamy *punktem przebicia* lub *punktem przecięcia*.

Jeśli prosta  $l$  jest zawarta w płaszczyźnie  $\alpha$ , to mówimy, że  *$l$  leży na  $\alpha$*  lub że  *$\alpha$  przechodzi przez  $l$*  oraz umawiamy się, żeby i w tym przypadku mówić, że  *$l$  jest równoległa do  $\alpha$* .

Tak więc powiedzenie, że prosta  $l$  jest równoległa do płaszczyzny  $\alpha$ , oznacza, że albo  $l$  nie ma punktu wspólnego z  $\alpha$  albo  $l$  zawiera się w  $\alpha$ . Zapisując to symbolicznie, mamy

$$l \parallel \alpha \Leftrightarrow (l \cap \alpha = \emptyset \vee l \subset \alpha)$$

### Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

**Twierdzenie 114.3.** Jeśli  $k$  jest prostą i  $l$  jest prostą, to istnieją dwie możliwości:

- 1 — istnieje płaszczyzna zawierająca obie proste  $k$  i  $l$ ;
- 2 — nie istnieje płaszczyzna, która zawierałaby obie proste  $k$  i  $l$ .

W pierwszym przypadku, gdy obie proste zawierają się w jednej płaszczyźnie, istnieją trzy możliwości omówione w planimetrii:

- proste  $k$ ,  $l$  nie mają punktu wspólnego; są równoległe i różne;
- proste  $k$ ,  $l$  mają jeden punkt wspólny; przecinają się;
- proste  $k$ ,  $l$  pokrywają się; umawiamy się i w tym przypadku mówić, że są równoległe i pisać  $k \parallel l$ .

W drugim przypadku, gdy nie istnieje płaszczyzna zawierająca obie proste, proste te nie mają punktu wspólnego; nie są to jednak proste równoległe i do tego przypadku odnosi się następująca definicja.

**Definicja 114.3** (prostych skośnych). Dwie proste nie zawierające się w jednej płaszczyźnie nazywamy *prostymi skośnymi*.

Jeśli więc o dwóch prostych w przestrzeni wiadomo, że nie mają punktu wspólnego, to są to albo proste równoległe albo proste skośne.

## Twierdzenia o równoległości prostych i płaszczyzn

Oznaczenia:  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$  – płaszczyzny;  $a, b, c, k, l$  – proste.

**Twierdzenie 114.4.** *Jeśli dwie płaszczyzny są równoległe, to każda prosta leżąca na jednej z tych płaszczyzn jest równoległa do drugiej płaszczyzny*

$$\alpha \parallel \beta \wedge k \subset \alpha \Rightarrow k \parallel \beta$$

**Twierdzenie 114.5.** *Jeśli dwie proste są równoległe, to każda płaszczyzna przechodząca przez jedną z tych prostych jest równoległa do drugiej prostej*

$$a \parallel b \wedge a \subset \sigma \Rightarrow b \parallel \sigma$$

**Twierdzenie 114.6.** *Jeśli prosta  $l$  jest równoległa do płaszczyzny  $\alpha$ , to przez każdy punkt płaszczyzny  $\alpha$  przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do  $l$  i prosta ta leży na  $\alpha$ .*

**Twierdzenie 114.7.** *Przez każdy punkt przestrzeni przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej (rozszerzenie aksjomatu Euklidesa).*

**Twierdzenie 114.8.** Równoległość prostych w przestrzeni jest relacją:

- zwrotną  $a \parallel a$
- symetryczną  $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$
- przechodnią  $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

**Twierdzenie 114.9.** Równoległość płaszczyzn w przestrzeni jest relacją:

- zwrotną  $\alpha \parallel \alpha$
- symetryczną  $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$
- przechodnią  $\alpha \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$

Poniższe dwa twierdzenia dotyczą związków między równoległością prostych, równoległością płaszczyzn i równoległością prostych do płaszczyzn.

**Twierdzenie 114.10.** *Jeśli płaszczyzna i prosta są równoległe do pewnej prostej, to są równoległe między sobą*

$$\alpha \parallel k \wedge a \parallel k \Rightarrow \alpha \parallel a$$

**Twierdzenie 114.11.** *Jeśli płaszczyzna i prosta są równoległe do pewnej płaszczyzny, to są równoległe między sobą*

$$\alpha \parallel \sigma \wedge a \parallel \sigma \Rightarrow \alpha \parallel a$$

**Wniosek** (kontrapozycja tw. 114.10). *Jeśli płaszczyzna przecina pewną prostą, to przecina także każdą prostą równoległą do tej prostej.*

**Wniosek** (kontrapozycja tw. 114.11). *Jeśli prosta przebija pewną płaszczyznę, to przebija także każdą płaszczyznę równoległą do tej płaszczyzny.*

**Twierdzenie 114.12** (analogon aksjomatu Euklidesa). *Jeśli  $\alpha$  jest dowolną płaszczyzną, a  $P$  jest dowolnym punktem przestrzeni, to istnieje dokładnie jedna płaszczyzna przechodząca przez punkt  $P$  i równoległa do płaszczyzny  $\alpha$ . Płaszczyzna ta zawiera wszystkie proste przechodzące przez punkt  $P$  i równoległe do płaszczyzny  $\alpha$ .*

## 115. Sfera i kula. Wnętrze, zewnątrz i brzeg figury. Bryła

**Sfera i kula.** Obierzmy w przestrzeni punkt  $C$  i odcinek  $\bar{r}$  o długości  $r > 0$ .

**Definicja 115.1** (sfery). Zbiór punktów przestrzeni, których odległości od punktu  $C$  są równe  $r$ , nazywamy *sferą* albo *powierzchnią kulistą o środku  $C$  i promieniu  $r$*  i oznaczamy

$$S(C, r) \quad (115.1)$$

Każdy punkt należący do sfery nazywamy *punktem sfery* i mówimy o nim, że *leży na sferze*. Odcinek łączący dowolny punkt sfery ze środkiem sfery nazywamy *promieniem sfery*.

**Definicja 115.2** (kuli). Zbiór punktów przestrzeni, których odległości od punktu  $C$  są nie większe od  $r$  nazywamy *kulą o środku  $C$  i promieniu  $r$*  i oznaczamy

$$K(C, r) \quad (115.2)$$

Każdy punkt należący do kuli nazywamy *punktem kuli*.

Sferę (115.1) nazywamy *brzegiem* lub *powierzchnią kuli* (115.2). Promień sfery (115.1) nazywamy też *promieniem kuli* (115.2).

Zbiór punktów kuli nie leżących na brzegu tej kuli nazywamy *wnętrzem tej kuli*. Punkt należący do wnętrza kuli nazywamy *punktem wewnętrznym kuli*. Punkt leżący na brzegu kuli nazywamy *punktem brzegowym tej kuli*. Punkt nie należący do kuli nazywamy *punktem zewnętrznym tej kuli*. Punkty kuli dzielą się więc na punkty wewnętrzne i punkty brzegowe. „Punkt zewnętrzny kuli” nie jest „punktem kuli”.

*Średnicą* sfery (kuli) nazywamy odcinek, który przechodzi przez środek sfery (kuli) i którego oba końce leżą na sferze (brzegu kuli).

Umowa: Zamiast mówić „promień o długości równej  $r$ ” i „średnica o długości równej  $2r$ ” mówimy krótko: „promień  $r$ ” i „średnica  $2r$ ”.

**Otoczenie. Definicja 115.3.** *Otoczeniem kulistym punktu  $P$  o promieniu  $r$  nazywamy kulę  $K(P, r)$ . Otoczeniem punktu  $P$  nazywamy każdą figurę, która zawiera jakąś kulę o środku  $P$ .*

W dalszym ciągu, mówiąc „otoczenie”, będziemy mieli na myśli otoczenie kuliste.

### Wnętrze, zewnątrz i brzeg figury

**Definicja 115.4.** Niech  $f$  będzie dowolną figurą w przestrzeni, tj. dowolnym zbiorem punktów przestrzeni. Niech  $P$  będzie dowolnym punktem przestrzeni.

Punkt  $P$  nazywamy *punktem wewnętrznym figury  $f$* , jeśli istnieje otoczenie tego punktu zawierające się w figurze  $f$ .

Punkt  $P$  nazywamy *punktem zewnętrznym figury  $f$* , jeśli istnieje otoczenie tego punktu nie zawierające ani jednego punktu należącego do figury  $f$ .

Punkt  $P$  nazywamy *punktem brzegowym figury  $f$* , jeśli punkt ten nie jest dla figury  $f$

ani punktem wewnętrznym ani punktem zewnętrznym, tj. jeśli w każdym otoczeniu tego punktu znajduje się co najmniej jeden punkt należący do  $f$  i co najmniej jeden punkt nie należący do  $f$ .

*Wnętrzem figury* nazywamy zbiór wszystkich punktów wewnętrznych tej figury.

*Zewnętrzem figury* nazywamy zbiór wszystkich punktów zewnętrznych względem tej figury.

*Brzegiem figury* nazywamy zbiór wszystkich punktów brzegowych tej figury.

**Figury domknięte i figury otwarte** w stereometrii definiujemy tak samo jak w planimetrii (def. 75.7), np. figura nazywa się *otwartą*, jeśli każdy punkt tej figury ma otoczenie zawierające się w tej figurze. Jednak różnica między sensem tej definicji w planimetrii a jej sensem w stereometrii jest istotna i pochodzi stąd, że w planimetrii otoczenie jest kołem, a w stereometrii – kulą. Figura płaska, bez względu na to, czy ją w planimetrii uznano za otwartą czy nie, nie może być uznana za otwartą w stereometrii, gdyż w figurze płaskiej nie mieści się żadna kula.

**Przykłady.** Kula jest figurą domkniętą. Sfera jest figurą domkniętą. Wnętrze kuli jest figurą otwartą. Kula, z której usunięto jej środek, nie jest ani figurą domkniętą ani otwartą. Wnętrze kuli po usunięciu środka jest nadal figurą otwartą.

#### Figury ograniczone, figury nieograniczone

**Definicja 115.6.** Figurę  $f$  nazywamy w stereometrii *ograniczoną*, gdy istnieje kula, w której ta figura zawiera się. W przeciwnym razie figurę nazywamy *nieograniczoną*.

#### Figury wypukłe

**Definicja 115.7.** Figurę nazywamy *wypukłą*, gdy odcinek łączący dwa dowolne punkty tej figury zawiera się w tej figurze. Definicja ta nie różni się niczym od definicji 75.9; figura wypukła w planimetrii jest również w stereometrii wypukła.

#### Figury spójne

**Definicja 115.8.** Figurę nazywamy *spójną*, gdy każde dwa punkty tej figury można połączyć łamaną zwyczajną zawartą w tej figurze.

Różnica między tą definicją a definicją 75.10 polega na tym, że łamana w stereometrii może być figurą przestrzenną, tj. figurą nie mieszczącą się w żadnej płaszczyźnie.

#### Bryły

**Definicja 115.9.** Figurę nazywamy *bryłą*, jeśli spełnia następujące cztery warunki:

- jest ograniczona;
- jest domknięta, tzn. każdy punkt brzegowy tej figury należy do tej figury;

– jest spójna;

– w każdym otoczeniu każdego punktu tej figury znajduje się co najmniej jeden punkt wewnętrzny tej figury.

**Przykłady.** Bryłą jest kula, a także suma dwóch kul mających co najmniej jeden punkt wspólny. Natomiast bryłą nie jest suma kuli i odcinka przechodzącego przez środek kuli i dłuższego od średnicy tej kuli. Sfera nie jest bryłą. Żadna figura płaska nie jest bryłą.

**Wzajemne położenie dwóch kul.** Podobnie jak dla dwóch okręgów w planimetrii (def. 75.12) istnieje 5 przypadków wzajemnego położenia dwóch kul  $K(A, a)$ ,  $K(B, b)$ ,  $a \geq b > 0$  i takie same są kryteria rozróżniania tych przypadków, np.

$$AB > a + b \Leftrightarrow \text{kule wzajemnie zewnętrzne}$$

### 116. Kąt dwuścienny. Kąt wielościenny. Wielościan

**Półprzestrzeń. Definicja 116.1.** Niech będą dane: płaszczyzna  $\sigma$  i dwa różne punkty  $A, B$  nie leżące na  $\sigma$ . O punktach  $A, B$  mówimy, że:

– *leżą po tej samej stronie* płaszczyzny  $\sigma$ , jeśli odcinek  $\overline{AB}$  jest rozłączny z płaszczyzną  $\sigma$ ;

– *leżą po przeciwnych stronach* płaszczyzny  $\sigma$ , jeśli odcinek  $\overline{AB}$  ma punkt wspólny z płaszczyzną  $\sigma$  (por. def. 74.3).

Zbiór wszystkich punktów leżących po jednej stronie płaszczyzny  $\sigma$  nazywamy *stroną płaszczyzny  $\sigma$*  albo *półprzestrzenią otwartą o płaszczyźnie brzegowej  $\sigma$* . Mówimy, że płaszczyzna *rozcina przestrzeń* na dwie półprzestrzenie otwarte.

Sumę półprzestrzeni otwartej i jej płaszczyzny brzegowej nazywamy *półprzestrzenią domkniętą*. Dwie półprzestrzenie domknięte, które mają wspólną płaszczyznę brzegową i których suma jest przestrzenią, nazywamy *półprzestrzeniami uzupełniającymi się wzajemnie do przestrzeni*.

**Półpłaszczyzna w przestrzeni.** Prosta  $k$  i punkt  $A$  nie leżący na tej prostej wyznaczają w przestrzeni półpłaszczyznę, o której mówimy, że jest to *półpłaszczyzna o krawędzi  $k$  przechodząca przez punkt  $A$* . Półpłaszczyznę tę oznaczamy

$$kA^+$$

**Kąt dwuścienny.** Obierzmy w przestrzeni dwie różne półpłaszczyzny

$$kA^+, kB^+ \quad (116.1)$$

o wspólnej krawędzi  $k$ . Suma tych półpłaszczyzn

$$kA^+ \cup kB^+ \quad (116.2)$$

rozcina przestrzeń  $\Omega$  na dwie figury otwarte  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ . Dołączając do każdej z tych figur obie półpłaszczyzny (116.1), utworzymy dwa zbiory

$$\{kA^+, kB^+, \Omega_1\} \quad \{kA^+, kB^+, \Omega_2\} \quad (116.3)$$

Każdy z tych zbiorów nazwiemy *kątem dwuściennym o krawędzi  $k$ , ścianach  $kA^+$ ,  $kB^+$  i wnętrzu  $\Omega_1$  względnie  $\Omega_2$* .

**Definicja 116.2.** Zbiór utworzony przez dwie różne półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi i jedną z dwóch figur wyciętych z przestrzeni przez te dwie półpłaszczyzny nazywamy *kątem dwuściennym*. Półpłaszczyzny nazywamy *ścianami* kąta dwuściennego, ich wspólną krawędź nazywamy *krawędzią* kąta dwuściennego, figurę wyciętą z przestrzeni przez ściany kąta dwuściennego nazywamy *wnętrzem* kąta dwuściennego, sumę wnętrza i ścian kąta dwuściennego nazywamy *obszarem* kąta dwuściennego.

Jeśli półpłaszczyzny (116.1) uzupełniają się do jednej płaszczyzny, to każdy z kątów (116.3) wyznaczonych przez nie nazywamy kątem dwuściennym *półpełnym*.

Jeśli półpłaszczyzny (116.1) nie uzupełniają się do jednej płaszczyzny, to jeden z kątów (116.3) ma obszar wypukły, a drugi niewypukły. Pierwszy z nich nazywamy kątem dwuściennym *wypukłym*. W dalszym ciągu mówiąc „kątem dwuściennym”, będziemy mieli na myśli kąt dwuścienny wypukły, którego ściany nie leżą w jednej płaszczyźnie.

**Kąt dwuścienny zerowy i kąt dwuścienny pełny.** Jeśli półpłaszczyzny (116.1) pokrywają się, to zamiast zbiorów (116.3) mamy zbiory

$$\{kA^-, kA^+, \emptyset\} \quad \{kA^-, kA^+, \Omega - kA^+\}$$

Pierwszy z nich ma wnętrze puste i nazywamy go *kątem dwuściennym zerowym*. Drugi ma obszar wypełniający całą przestrzeń i ten nazywamy *kątem dwuściennym pełnym*.

**Kąt płaski.** Kąty określone w planimetrii będziemy dla odróżnienia od kątów dwuściennych i wielościennych określanych w stereometrii, nazywali *kątami płaskimi*.

**Kąt liniowy kąta dwuściennego** jest to kąt płaski otrzymany przez przecięcie kąta dwuściennego płaszczyzną prostą<sup>1)</sup> do jego krawędzi. Miarę tego kąta będziemy uważali za *miarę kąta dwuściennego*. Miara ta nie zależy od wyboru płaszczyzny przecinającej kąt dwuścienny (byłe płaszczyzna ta była prostą do krawędzi kąta).

Przystępując do określenia kątów wielościennych, zaczniemy od przypadków najprostszych, gdy liczba ścian jest równa 3 lub 4.

**Kąt trójsienny.** *Kątem trójsiennym* nazywamy ciąg trzech półprostych mających wspólny początek i nie leżących w jednej płaszczyźnie. Półproste te nazywamy *krawędziami* kąta trójsiennego, a ich wspólny początek — *wierzchołkiem* kąta trójsiennego. Jeśli w kącie trójsiennym wierzchołek oznaczono  $W$ , a krawędzie:  $WA^-$ ,  $WB^-$ ,  $WC^-$ , to kąt trójsienny będziemy oznaczać  $W(ABC)$ .

Każde dwie krawędzie kąta trójsiennego wyznaczają w przestrzeni płaszczyznę i na niej kąt wypukły; obszar tego kąta nazywamy *ścianą* kąta trójsiennego, a sam kąt — *kątem płaskim* tej ściany. Suma trzech ścian kąta trójsiennego rozcina przestrzeń<sup>2)</sup> na dwie figury otwarte, z których jedna jest wypukłą<sup>3)</sup> i tę wypukłą

figurę nazywamy *wnętrzem kąta trójsiennego*<sup>1)</sup>. Sumę wnętrza i ścian nazywamy *obszarem kąta trójsiennego*.

W kącie trójsiennym występują 3 kąty płaskie (kąty ścian) oraz 3 kąty dwuściennne (kąty między ścianami). Można udowodnić, że w kącie trójsiennym każdy z kątów płaskich musi być mniejszy od sumy pozostałych dwóch kątów płaskich, a suma wszystkich trzech kątów płaskich musi być mniejsza od kąta pełnego.

**Kąt czworościenny.** Niech będzie dany ciąg czterech półprostych

$$WA^-, WB^-, WC^-, WD^- \quad (116.4)$$

o wspólnym początku  $W$  i takich, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej płaszczyźnie. Kolejność tych półprostych, wyznaczoną przez ciąg (116.4), uzupełnimy do kolejności cyklicznej, przyjmując, że po  $WD^-$  następuje  $WA^-$ . Mamy wtedy cztery pary kolejnych półprostych i każda z tych par wyznacza jedną płaszczyznę; są to płaszczyzny

$$WAB \quad WBC \quad WCD \quad WDA \quad (116.5)$$

Założmy, że wszystkie cztery półproste (116.4) zawierają się jednocześnie:

- w jednej półprzestrzeni domkniętej o płaszczyźnie brzegowej  $WAB$ ,
- w jednej półprzestrzeni domkniętej o płaszczyźnie brzegowej  $WBC$ ,
- w jednej półprzestrzeni domkniętej o płaszczyźnie brzegowej  $WCD$  oraz
- w jednej półprzestrzeni domkniętej o płaszczyźnie brzegowej  $WDA$ .

Ciąg czterech półprostych spełniających powyższe warunki nazywamy *kątem czworościennym* i oznaczamy  $W(ABCD)$ ; półproste (116.4) nazywamy *krawędziami*, a ich wspólny początek — *wierzchołkiem kąta czworościennego*; obszary kątów wypukłych  $\star AWB$ ,  $\star BWC$ ,  $\star CWD$  i  $\star DWA$  nazywamy *ścianami kąta czworościennego*. Suma ścian kąta czworościennego rozcina przestrzeń na dwie figury otwarte, z których jedna jest wypukłą<sup>2)</sup> i tę wypukłą figurę nazywamy *wnętrzem kąta czworościennego*. Sumę wnętrza i ścian nazywamy *obszarem kąta czworościennego*.

Kąt czworościenny ma 8 elementów: 4 kąty płaskie (kąty ścian) i 4 kąty dwuściennne (kąty między kolejnymi ścianami). Można udowodnić, że w kącie czworościennym każdy z kątów płaskich musi być mniejszy od sumy pozostałych trzech kątów płaskich, zaś suma wszystkich czterech kątów płaskich musi być mniejsza od kąta pełnego.

**Kąt wielościenny. Definicja 116.3.** Niech będzie dany ciąg  $n$  półprostych

$$WA_1^-, WA_2^-, \dots, WA_n^- \quad n \geq 3 \quad (116.6)$$

spełniający następujące trzy warunki:

- 1 — wszystkie półproste mają wspólny początek;
- 2 — żadne trzy z nich nie leżą w jednej płaszczyźnie;

<sup>1)</sup> Figurę tę można zdefiniować jako iloczyn trzech półprzestrzeni:

- półprzestrzeni o płaszczyźnie brzegowej  $WAB$ , zawierającej punkt  $C$ ;
- półprzestrzeni o płaszczyźnie brzegowej  $WBC$ , zawierającej punkt  $A$ ;
- półprzestrzeni o płaszczyźnie brzegowej  $WCA$ , zawierającej punkt  $B$ .

<sup>2)</sup> Figurę tę można zdefiniować jako iloczyn czterech półprzestrzeni: podobnie. Iak to uczyniliśmy w przypadku kąta trójsiennego.

<sup>1)</sup> Prostokątność w przestrzeni zob. str. 277.

<sup>2)</sup> Rozcinanie przestrzeni definiujemy analogicznie do rozcinania płaszczyzny (zob. def. 75.11).

<sup>3)</sup> W definicjach kątów wielościennych ograniczamy się do kątów o obszarach wypukłych, inaczej niż to było dla kątów płaskich i dwuściennych.

3 — jeśli  $\sigma$  oznacza którąkolwiek z płaszczyzn

$$WA_1A_2, WA_2A_3, \dots, WA_{n-1}A_n, WA_nA_1 \quad (116.7)$$

to wszystkie półproste (116.6) zawierają się w jednej półprzestrzeni domkniętej o płaszczyźnie brzegowej  $\sigma$ . Ciąg  $n$  półprostych (116.6) spełniający powyższe trzy warunki nazywamy *kątem wielościennym* i oznaczamy

$$W(A_1A_2 \dots A_n) \quad (116.8)$$

Półproste (116.6) nazywamy *krawędziami*, a ich wspólny początek  $W$  *wierzchołkiem kąta wielościennego*. Iloczyn  $n$  półprzestrzeni domkniętych wyróżnionych w warunku 3 jako półprzestrzenie o płaszczyznach brzegowych (116.7) zawierające wszystkie krawędzie (116.6) jest figurą wypukłą i nazywamy ją *obszarem kąta wielościennego*. Wnętrze tej figury nazywamy *wnętrzem kąta wielościennego*. Obszary kątów wypukłych

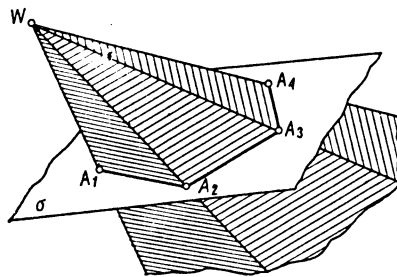
$$\angle A_1WA_2, \angle A_2WA_3, \dots, \angle A_{n-1}WA_n, \angle A_nWA_1 \quad (116.9)$$

nazywamy *ścianami kąta wielościennego*, a kąty (116.9) *kątami płaskimi* tych ścian.

Suma ścian kąta wielościennego rozcina przestrzeń na dwie figury otwarte, z których jedna jest wypukła i stanowi wnętrze kąta wielościennego.

Kąt wielościenny ma  $2n$  elementów:  $n$  kątów płaskich (kąty ścian) i  $n$  kątów dwuściennych (są nimi  $n-1$  kątów między kolejnymi ścianami (116.9) oraz kąt między ostatnią z nich i pierwszą). W dowolnym kącie wielościennym każdy kąt płaski jest mniejszy od sumy pozostałych kątów płaskich, a suma wszystkich kątów płaskich jest mniejsza od kąta pełnego.

Kąt wielościenny  $W(A_1A_2 \dots A_n)$  można łatwo wyznaczyć, jeśli obierzemy w pewnej płaszczyźnie  $\sigma$  dowolny wielokąt wypukły  $A_1A_2 \dots A_n$  oraz punkt  $W$  nie leżący w płaszczyźnie  $\sigma$  (rys. 116-1).



Rys. 116-1. Ostrosłup jako część wspólna obszaru kąta wielościennego i półprzestrzeni

**Ostrosłup.** Jeśli punkty  $A_1, \dots, A_n$  określające (wraz z punktem  $W$ ) kąt wielościenny (def. 116.3) leżą w jednej płaszczyźnie  $\sigma$  (a punkt  $W$  poza nią), to iloczyn obszaru kąta wielościennego  $W(A_1A_2 \dots A_n)$  i półprzestrzeni domkniętej, mającej płaszczyznę brzegową  $\sigma$  i zawierającej punkt  $W$ , nazywamy *ostrosłupem* o podstawie  $A_1A_2 \dots A_n$  i wierzchołku  $W$ . Odcinki  $WA_1, \dots, WA_n$  nazywamy *krawędziami bocznymi* ostrosłupa, wielokąt  $A_1A_2 \dots A_n$  nazywamy *podstawą* ostrosłupa (z definicji

116.3, warunek 3, i z twierdzenia 76.2b wynika, że jest to wielokąt wypukły), boki podstawy ostrosłupa nazywamy *krawędziami podstawy*, zaś trójkąty  $\triangle WA_1A_2, \triangle WA_2A_3, \dots, \triangle WA_{n-1}A_n$  i  $\triangle WA_nA_1$  nazywamy *ścianami bocznymi* ostrosłupa.

**Czworościan.** Ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt, nazywamy *czworościanem*. Czworościan ma brzeg składający się z czterech trójkątów i każdy z nich może być uważany za podstawę.

**Wielościán.** Będziemy rozważać wyłącznie wypukłe wielościány, nazywając je krótko wielościánami.

**Definicja 116.4.** Figurę nazywamy *wielościánem*, jeśli spełnia następujące warunki:

- jest ograniczona,
- jest domknięta,
- jest wypukła,
- zawiera co najmniej jeden punkt wewnętrzny,
- jej brzeg jest sumą skończonej liczby wielokątów.

*Ścianą* wielościánu nazywamy każdy wielokąt będący iloczynem brzegu wielościánu i pewnej płaszczyzny. Wierzchołki i boki ścian wielościánu nazywamy *wierzchołkami* i *krawędziami* wielościánu. Dwie ściany nazywamy *sąsiednimi*, jeśli mają wspólną krawędź. Dwie ściany wielościánu nazywamy *przeciwległymi*, jeśli ich płaszczyzny są równoległe. Kąty płaskie poszczególnych ścian wielościánu nazywamy *kątami płaskimi* wielościánu. Każda para ścian sąsiednich tworzy kąt dwuścienny wielościánu. Ściany schodzące się w jednym wierzchołku tworzą kąt wielościenny czyli *naroże*. Wielościán wypukły ma wewnątrz znajdujące się po jednej stronie płaszczyzny każdej z jego ścian.

**Uwaga 1.** Ostrosłup spełnia warunki powyższej definicji, a więc jest wielościánem.

**Uwaga 2.** Porównując warunki definicji 116.4 z warunkami definicji 115.9, zauważamy, że dwa pierwsze warunki są w obu definicjach identyczne; łatwo wykazać, że z wypukłości figury wynika jej spójność oraz że z wypukłości i zawierania co najmniej jednego punktu wewnętrznego wynika czwarty warunek definicji 115.9. Zatem każdy wielościán jest bryłą.

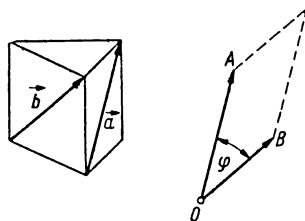
## 117. Wektory i translacje w przestrzeni

**Wektory w przestrzeni.** Podane w planimetrii definicje 81.1–81.6 i twierdzenia 81.1 i 81.2, dotyczące takich pojęć jak:

- kierunek, zwrot i moduł wektora,
- wektory równe, wektory przeciwne,
- suma i różnica wektorów,
- iloczyn wektora przez liczbę,
- twierdzenie o module sumy wektorów,

a także pojęcie wektora swobodnego — zachowują swą moc również w stereometrii w odniesieniu do wektorów w przestrzeni. Jednak niektóre z tych pojęć mogą mieć w przestrzeni ogólniejszy sens.

Jak wiemy, dwie proste w przestrzeni mogą być skośne, tj. nie mieścić się w jednej płaszczyźnie. Zatem i dwa wektory zaczepione w dwóch różnych punktach przestrzeni mogą nie zawierać się w jednej płaszczyźnie. Takimi są wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  (rys. 117-1) wyznaczone przez przekątne ścian bocznych graniastosłupa trójkątnego. Zawsze jednak istnieje płaszczyzna, do której dane dwa wektory niezerowe są równoległe.



Rys. 117-1. Kąt między wektorami w przestrzeni

Niech będzie dany wektor  $\vec{a}$  zaczepiony w pewnym punkcie. Jeśli w dowolnie obranym punkcie  $O$  utworzymy wektor  $\vec{OA}$  równy wektorowi  $\vec{a}$ , to mówimy, że *przenieśliśmy* wektor  $\vec{a}$  do nowego punktu zaczepienia.

Niech będą dane dwa wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ . Przenieśmy te wektory do wspólnego punktu zaczepienia, tzn. obierzmy punkt  $O$  i utworzmy wektory  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  odpowiednio równe wektorom  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b}$$

(rys. 117-1). Istnieje co najmniej jedna płaszczyzna zawierająca punkty  $O$ ,  $A$ ,  $B$ . Jest to płaszczyzna, w której leżą wektory  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  i do której są równoległe wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ . Można powiedzieć, że jest to płaszczyzna, w której mieszczą się wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  po odpowiednim ich przeniesieniu.

**Kolinearność i komplanarność.** O punktach należących do jednej prostej mówimy, że są *kolinearne* (*współliniowe*). O punktach należących do jednej płaszczyzny mówimy, że są *komplanarne* (*współpłaszczyznowe*).

O wektorach mówimy, że są *kolinearne*, jeśli po odpowiednim przeniesieniu wektory te mieszczą się w jednej prostej. O wektorach mówimy, że są *komplanarne*, jeśli po odpowiednim przeniesieniu wektory te mieszczą się w jednej płaszczyźnie.

Dwa wektory są zawsze komplanarne. Natomiast trzy wektory mogą nie być komplanarne (np. wektory  $\vec{WA}_1$ ,  $\vec{WA}_2$  i  $\vec{WA}_3$  na rys. 116-1).

**Kąt między dwoma wektorami w przestrzeni.** Definicja 117.1. Jeśli wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  są niezerowe i nierównoległe, to przenosząc je do wspólnego punktu zaczepienia  $O$ , otrzymujemy wektory  $\vec{OA} = \vec{a}$  i  $\vec{OB} = \vec{b}$  i w płaszczyźnie  $AOB$  otrzymujemy kąt

wypukły  $\sphericalangle AOB$  (rys. 117-1), który nazywamy *kątem* (*nieskierowanym*) między wektorami  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i oznaczamy

$$\sphericalangle \{\vec{a}, \vec{b}\}$$

Jeśli miara tego kąta jest równa  $\varphi$ , to piszemy

$$\sphericalangle \{\vec{a}, \vec{b}\} = \varphi$$

Jeśli wektory niezerowe  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  są równoległe i zgodnie skierowane, to mówimy, że tworzą kąt zerowy. Jeśli wektory niezerowe  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  są równoległe i przeciwnie skierowane, to mówimy, że tworzą kąt półpełny.

Zastąpienie jednego z wektorów  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  wektorem przeciwnym powoduje zmianę kąta między tymi wektorami na kąt dopełniający do półpełnego. Zastąpienie obu wektorów  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  wektorami przeciwnymi nie zmienia kąta między tymi wektorami.

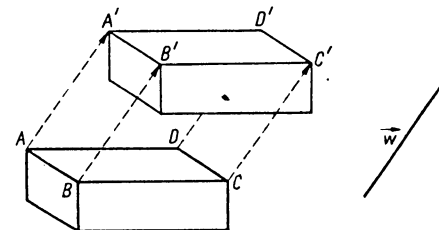
### Translacja (przesunięcie równoległe) w przestrzeni

**Definicja 117.2.** Translacją o wektor  $\vec{w}$  nazywamy przekształcenie przestrzeni, w którym obrazem dowolnego punktu  $P$  jest taki punkt  $P'$ , że

$$\vec{PP'} = \vec{w}$$

Wektor  $\vec{w}$  nazywamy *wektorem translacji*.

Definicja ta jest prawie dosłownym powtórzeniem definicji 81.7. Rys. 117-2 pokazuje translację o wektor  $\vec{w}$ ; w translacji obrazem wielościanu jest wielościan o krawędziach odpowiednio równych i równoległych.



Rys. 117-2. Translacja o wektor  $\vec{w}$

Twierdzenia 81.8–81.10 zachowują swą moc również w stereometrii:

- translacja jest izometrią, w której obrazem dowolnego wektora jest równy mu wektor;
- przekształcenie odwrotne do translacji o wektor  $\vec{w}$  jest translacją o wektor  $-\vec{w}$ ;
- złożenie translacji o wektor  $\vec{w}_1$  i translacji o wektor  $\vec{w}_2$  jest translacją o wektor  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ .

Odpowiednikiem twierdzenia 81.11 będzie twierdzenie 124.1 o translacji jako złożeniu dwóch symetrii płaszczyznowych.

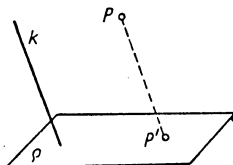
## 118. Rzut równoległy na płaszczyznę

**Definicja 118.1.** Niech będą dane w przestrzeni:

- płaszczyzna  $\rho$ , którą będziemy nazywali *płaszczyzną rzutów*, czyli *rzutnią* oraz
- prosta  $k$  nierównoległa do  $\rho$ , którą będziemy nazywali *kierunkiem rzutu*.

Rzutnia i kierunek rzutu tworzą razem tzw. *układ rzutowania*. Każdą prostą równoległą do kierunku rzutu nazywamy *prostą rzutującą*.

Niech  $P$  będzie dowolnym punktem przestrzeni. Poprowadźmy przez  $P$  prostą rzutującą; prosta ta przecina rzutnię w pewnym punkcie, który oznaczamy  $P'$  i nazywamy *rzutem równoległym punktu  $P$  na płaszczyznę  $\rho$  w kierunku  $k$*  (rys. 118-1). Wyznaczanie rzutu punktu  $P$  nazywamy *rzutowaniem punktu  $P$* . Rzutowanie figury polega na rzutowaniu wszystkich punktów tej figury.



Rys. 118-1. Rzut równoległy punktu  $P$  na płaszczyznę  $\rho$  w kierunku  $k$

Opisany powyżej rzut nazywamy *rzutem równoległym*, ponieważ wszystkie proste rzutujące są równoległe do kierunku rzutu i równoległe między sobą.

Rzut równoległy stanowi pewne przekształcenie przestrzeni w płaszczyznę. Rzut punktu  $P$  jest w tym przekształceniu obrazem punktu  $P$ . Rzut punktu leżącego na rzutni pokrywa się z tym punktem, zatem każdy punkt rzutni jest punktem stałym tego przekształcenia. Przekształcenie to jest jednoznaczne (każdy punkt ma w danym układzie rzutowania jeden rzut), ale nie jest wzajemnie jednoznaczne (każdy punkt rzutni jest rzutem nieskończenie wielu punktów przestrzeni).

### Własności rzutu równoległego na płaszczyznę

1. Obrazem prostej nierównoległej do kierunku rzutu jest prosta. Obrazem prostej równoległej do kierunku rzutu jest punkt.
2. Jeśli punkt  $X$  leży na prostej  $AB$  między punktami  $A, B$  i prosta  $AB$  nie jest równoległa do kierunku rzutu, to  $X'$  leży na prostej  $A'B'$  między punktami  $A', B'$ .
3. Rzut odcinka jest odcinkiem lub punktem.
4. Rzut środka odcinka jest środkiem rzutu tego odcinka.
5. Rzutem wektora  $\overrightarrow{AB}$  nazywamy wektor  $\overrightarrow{A'B'}$ , którego początek jest rzutem początku, a koniec – rzutem końca wektora  $\overrightarrow{AB}$ .
6. Rzuty wektorów równych są wektorami równymi

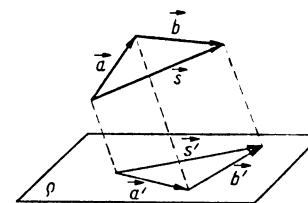
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$$

(implikacja odwrotna nie zachodzi).

7. Rzut sumy dwóch wektorów jest sumą rzutów tych wektorów

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{s}' = \vec{a}' + \vec{b}'$$

(rys. 118-2) (implikacja odwrotna nie zachodzi).



Rys. 118-2. Rzut sumy równa się sumie rzutów

8. Rzut iloczynu wektora przez liczbę jest iloczynem rzutu tego wektora przez tę liczbę

$$\vec{w} = k\vec{v} \Rightarrow \vec{w}' = k\vec{v}'$$

9. Jeśli figurę rzutowaną poddamy translacji o wektor  $\vec{w}$ , to jednocześnie rzut tej figury ulegnie translacji o wektor  $\vec{w}'$  będący rzutem wektora  $\vec{w}$  w danym układzie rzutowania.

Kreślenie figur w rzucie równoległym – zob. str.282.

## 119. Prostopadłość w przestrzeni

**Prostopadłość prostych. Definicja 119.1.** Dwie proste w przestrzeni nazywamy *prostopadłymi*, gdy dowolny niezerowy wektor zawarty w jednej prostej i dowolny niezerowy wektor zawarty w drugiej prostej tworzą kąt prosty.

**Uwaga.** Prostopadłość prostych w stereometrii i prostopadłość prostych w planimetrii – to dwie różne relacje. Wskazuje na to choćby ten fakt, że dwie proste prostopadłe w stereometrii mogą nie mieć punktu wspólnego, podczas gdy w planimetrii proste prostopadłe mają dokładnie jeden punkt wspólny. Należałoby więc tę nową relację oznaczać nowym symbolem. Aby jednak nie wprowadzać zbyt wielu symboli, w niektórych podręcznikach stereometrii prostopadłości prostych nie oznaczono w ogóle żadnym symbolem.

Ponieważ jednak wieloznaczności symbolu  $\perp$  nie da się uniknąć, gdyż oznacza się nim także prostopadłość prostej do płaszczyzny, a także prostopadłość płaszczyzny do płaszczyzny, więc w tej książce użyjemy tego symbolu również dla oznaczenia prostopadłości prostych w przestrzeni.

Poniższe zestawienie twierdzeń pokazuje, że prostopadłość prostych w przestrzeni i prostopadłość prostych na płaszczyźnie mogą być pod pewnym względem podobne, a pod innym względem – odmienne. Litery  $a, b, c, m, n, p$  oznaczają proste, zaś litery  $\alpha, \beta, \rho, \sigma$  oznaczają płaszczyzny.

1. Jeśli  $n \parallel m$  oraz  $m \perp a$ , to  $n \perp a$
2. Dwie proste prostopadłe mają dokładnie jeden punkt wspólny.
3. Jeśli na płaszczyźnie dane są punkt i prosta, to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez dany punkt i prostopadła do danej prostej.
4. Jeśli  $n \perp a$  oraz  $m \perp a$ , to  $n \parallel m$ .

1. Jeśli  $n \parallel m$  oraz  $m \perp a$  to  $n \perp a$ .
2. Dwie proste prostopadłe mają najwyżej jeden punkt wspólny.
3. Jeśli w przestrzeni dane są punkt i prosta, to istnieje nieskończenie wiele prostych przechodzących przez dany punkt i prostopadłych do danej prostej.
4. Jeśli  $n \perp a$  oraz  $m \perp a$ , to nie można stąd niczego wnosić o wzajemnym nachyleniu prostych  $n, m$ .

**Prostopadłość prostej i płaszczyzny. Definicja 119.2.** Prosta  $n$  nazywamy *prostopadłą* do płaszczyzny  $\sigma$ , co zapisujemy

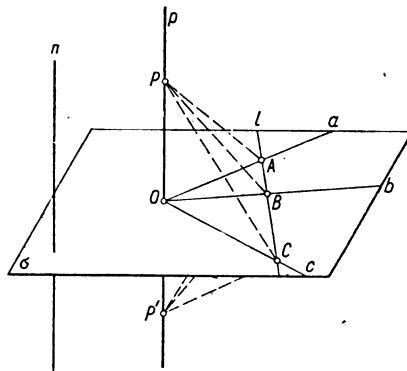
$$n \perp \sigma \quad \text{lub} \quad \sigma \perp n$$

gdy prosta  $n$  jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie  $\sigma$ .

Aby stwierdzić, że prosta jest prostopadła do płaszczyzny, wystarczy wiedzieć, że ta prosta jest prostopadła do dwóch prostych przecinających się i zawartych w tej płaszczyźnie – upewnia nas o tym następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 119.1.** (warunek wystarczający prostopadłości prostej do płaszczyzny). *Jeśli prosta  $n$  jest prostopadła do dwóch prostych  $a, b$  przecinających się, to jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te dwie proste.*

**Dowód.** Niech  $\sigma$  oznacza płaszczyznę wyznaczoną przez proste  $a, b$ . Niech  $p$  będzie prostą równoległą do  $n$  i przechodzącą przez punkt  $O$  przecięcia się prostych  $a, b$ . Niech  $c$  będzie dowolną prostą zawartą w  $\sigma$  i przechodzącą przez  $O$  (rys. 119-1).



Rys. 119-1

Poprowadźmy na  $\sigma$  pomocniczą prostą  $l$ , nie przechodzącą przez  $O$ , lecz przecinającą proste  $a, b, c$  w punktach  $A, B, C$ .

Na prostej  $p$  obierzmy po dwóch stronach punktu  $O$  dwa punkty  $P$  i  $P'$  tak, aby  $OP = OP'$ . Łącząc  $P$  i  $P'$  z punktami  $A, B, C$ , otrzymujemy trzy pary trójkątów:

$$AOP \text{ i } AOP' \quad BOP \text{ i } BOP' \quad COP \text{ i } COP'$$

Trójkąty pierwszej pary są przystające, bowiem  $OA = OA$ ,  $OP = OP'$ ,  $\sphericalangle AOP = 90^\circ$  i  $\sphericalangle AOP' = 90^\circ$  (cecha „BKB”). Tak samo trójkąty drugiej pary są przystające. Chcemy wykazać, że i trójkąty trzeciej pary są przystające, gdyż stąd wynika, że kąt  $COP$  jest równy kątowi  $COP'$ , a stąd, że jest to kąt prosty.

Aby wykazać przystawanie trójkątów trzeciej pary, musimy wykazać równość odcinków  $PC$  i  $P'C$ .

W tym celu wykazemy najpierw przystawanie trójkątów  $ABP$  i  $ABP'$ . Przystawanie to wynika z cechy „BBB”, bowiem  $AP = AP'$  (dzięki stwierdzonemu przystawianiu pierwszej pary trójkątów),  $BP = BP'$  (dzięki stwierdzonemu przystawianiu drugiej pary trójkątów), odcinek zaś  $AB$  jest wspólny. Z przystawiania trójkątów  $ABP$  i  $ABP'$  wynika równość  $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABP'$ , a także równość przyległych im kątów  $\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBP'$ .

Z równości tych kątów, z równości  $BP = BP'$  i  $BC = BC$  (według cechy „BKB”) wnioskujemy, że zachodzi przystawanie trójkątów  $BCP$  i  $BCP'$ . Z tego przystawiania otrzymujemy  $PC = P'C$ .

Teraz dzięki  $PC = P'C$ ,  $OP = OP'$ ,  $OC = OC$  według cechy „BBB” wnioskujemy, że zachodzi przystawanie trójkątów  $COP$  i  $COP'$ , skąd już wynika równość kątów  $COP$  i  $COP'$  czyli prostopadłość  $p$  do  $c$ . Dzięki równoległości  $p$  do  $n$  prostopadłość ta przenosi się łatwo na proste  $n$  i  $c$ , a także na prostą  $n$  i dowolną prostą płaszczyzny  $\sigma$ .

**Twierdzenie 119.2.** Jeśli w przestrzeni są dane punkt i prosta, to istnieje dokładnie jedna płaszczyzna przechodząca przez dany punkt i prostopadła do danej prostej. Płaszczyzna ta jest sumą wszystkich prostych przechodzących przez dany punkt i prostopadłych do danej prostej.

**Twierdzenie 119.3** (o dwóch prostych równoległych, z których jedna jest prostopadła do płaszczyzny). Jeśli  $n \parallel p$  oraz  $p \perp \sigma$ , to  $n \perp \sigma$ .

**Twierdzenie 119.4** (o dwóch prostych prostopadłych do tej samej płaszczyzny). Jeśli  $p \perp \sigma$  oraz  $n \perp \sigma$ , to  $p \parallel n$ .

Powyższe dwa twierdzenia są wzajemnie częściowo odwrotne.

**Twierdzenie 119.5** (o dwóch płaszczyznach prostopadłych do tej samej prostej). Jeśli  $n \perp \sigma$  oraz  $n \perp \rho$ , to  $\sigma \parallel \rho$ .

**Twierdzenie 119.6** (o dwóch płaszczyznach równoległych, z których jedna jest prostopadła do prostej). Jeśli  $\sigma \parallel \rho$  oraz  $n \perp \sigma$ , to  $n \perp \rho$ .

Powyższe dwa twierdzenia są wzajemnie częściowo odwrotne.

**Prostopadłość płaszczyzn. Definicja 119.3.** Dwie płaszczyzny nazywamy *prostopadłymi*, jeśli jedna przechodzi przez prostą prostopadłą do drugiej.

Można udowodnić, że jeśli jedna płaszczyzna przechodzi przez prostą prostopadłą do drugiej płaszczyzny, to jednocześnie ta druga płaszczyzna przechodzi przez

pewną prostą prostopadłą do pierwszej płaszczyzny. Dzięki temu twierdzeniu relacja prostopadłości dwóch płaszczyzn jest symetryczna

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$$

Prostopadłość dwóch płaszczyzn jest relacją różną od poprzednio wprowadzonych prostopadłości i nie wszystkie poprzednio sformułowane twierdzenia przenoszą się na tę relację. Oto zestawienie ( $p, n$  — proste;  $\alpha, \beta, \sigma$  — płaszczyzny):

Prostopadłość prostych  
do płaszczyzny

Jeśli  $p \perp \sigma$  oraz  $n \perp \sigma$ , to  $p \parallel n$ .

Prostopadłość płaszczyzn  
do płaszczyzny

Jeśli  $\alpha \perp \sigma$  oraz  $\beta \perp \sigma$ , to o wzajemnym nachyleniu płaszczyzn  $\alpha, \beta$  nie można niczego wnosić. Mogą to być płaszczyzny równoległe lub przecinające się pod dowolnym kątem.

**Twierdzenie 119.7** (o prostej i płaszczyźnie — prostopadłych do pewnej płaszczyzny). Jeśli  $p \perp \sigma$  oraz  $\alpha \perp \sigma$ , to  $p \parallel \alpha$ .

**Rzut prostokątny. Definicja 119.4.** Rzutem prostokątnym nazywamy rzut równoległy, w którym kierunek rzutu jest prostopadły do rzutni.

**Twierdzenie 119.8.** Jeśli  $P'$  jest rzutem prostokątnym punktu  $P$  na płaszczyznę  $\sigma$ , to odległość punktu  $P$  od  $P'$  jest mniejsza niż odległość punktu  $P$  od dowolnego innego punktu płaszczyzny  $\sigma$ .

**Definicja 119.5.** Odległość punktu  $P$  od płaszczyzny  $\sigma$  jest to odległość punktu  $P$  od prostokątnego rzutu tego punktu na płaszczyznę  $\sigma$ .

Odległość prostej od płaszczyzny równoległej do tej prostej jest to odległość dowolnego punktu tej prostej od płaszczyzny.

Odległość dwóch płaszczyzn równoległych jest to odległość dowolnego punktu jednej płaszczyzny od drugiej płaszczyzny.

**Definicja 119.6** (kąta między prostą i płaszczyzną). Jeśli prosta nie jest ani równoległa ani prostopadła do płaszczyzny, to *kątem między prostą i płaszczyzną* nazywamy kąt ostry między prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.

Jeśli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to mówimy że tworzy z tą płaszczyzną *kąt prosty*.

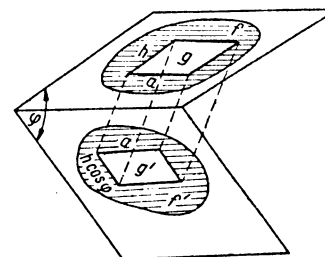
Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to umawiamy się, że *kąt* między nimi jest *zerowy*.

**Uwaga.** Często dla określenia wzajemnego nachylenia prostej i płaszczyzny posługujemy się kątem ostrym między daną prostą a prostą prostopadłą do danej płaszczyzny. Ten kąt jest dopełnieniem kąta, o którym mowa w definicji 119.6, do kąta prostego.

**Miara kąta dwuściennego.** Miarą kąta dwuściennego jest miara kąta płaskiego otrzymanego przez przecięcie danego kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą

do jego krawędzi. Mamy tu na myśli ten kąt płaski, którego obszar jest iloczynem obszaru kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do krawędzi. Kąt ten nazywamy *kątem liniowym* danego kąta dwuściennego.

**Zmiana pola figury płaskiej przy rzucie prostokątnym.** Niech będzie dany kąt dwuścienny o kącie liniowym ostrym  $\varphi$  i niech na jednej ścianie tego kąta będzie dana dowolna figura płaska  $f$ . Figurę tę rzutujemy prostopadłe na drugą ścianę kąta i otrzymujemy figurę  $f'$  (rys. 119-2). Wyznaczyć stosunek pola figury  $f'$  do pola figury  $f$ .



Rys. 119-2

**Rozwiązanie.** Weźmy najpierw pod uwagę prostokąt  $g$  leżący w pierwszej ścianie kąta dwuściennego, mający podstawę równą  $a$  i równoległą do krawędzi kąta oraz wysokość równą  $h$ . Jego rzut  $g'$  jest prostokątem o podstawie  $a$  i wysokości  $h \cdot \cos \varphi$ . Zatem

$$\frac{\text{pole } g'}{\text{pole } g} = \frac{a \cdot h \cos \varphi}{a \cdot h} = \cos \varphi$$

Ponieważ pole dowolnej figury aproksymuje się (tj. wyznacza jako granicę przybliżeń) za pomocą sieci kwadratowych (zob. p.89), więc i dla figury dowolnej  $f$  oraz jej rzutu  $f'$  otrzymamy

$$\frac{\text{pole } f'}{\text{pole } f} = \cos \varphi$$

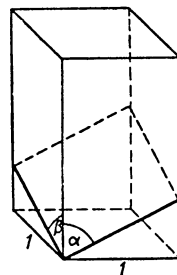
### Zadania

1. Płaszczyzny  $S$  i  $S'$  tworzą z prostą  $k$  kąty  $\alpha$  i  $\alpha'$ . Figura  $f$  zawarta w płaszczyźnie  $S$  została rzutowana w kierunku  $k$  na płaszczyznę  $S'$ , dając rzut  $f'$ . Obliczyć stosunek pola  $f'$  do pola  $f$ .
2. Graniastosłup kwadratowy prosty o krawędzi podstawy równej 1 przecięto płaszczyzną ukośną (rys. 119-3). Płaszczyzna ta przecięła wszystkie cztery ściany boczne w ten sposób, że ślady przecięcia tworzą z krawędzią boczną graniastosłupa kąty ostre  $\alpha$  i  $\beta$ . Obliczyć kąt  $\varphi$  nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy.
3. Niech będzie dana płaszczyzna  $\sigma$  oraz prosta  $p$  pochyla względem  $\sigma$  (tj. nieprostopadła i nierównoległa do  $\sigma$ ) i przebiegająca  $\sigma$  w punkcie  $O$ . Niech  $p'$  będzie rzu-

tem prostokątnym prostej  $p$  na  $\sigma$ . Niech  $b$  oznacza prostą leżącą na  $\sigma$  i przechodzącą przez  $O$ . Udowodnić, że

$$b \perp p \Leftrightarrow b \perp p'$$

Twierdzenie to jest nazywane *twierdzeniem o trzech prostokątnych*.



Rys. 119-3

Wskazówka: Można dowodzić podobnie jak tw. 119.1. Można też skorzystać trzykrotnie z twierdzenia Pitagorasa.

## 120. Kreślenie figur w rzucie równoległym

**Ogólne zasady rzutu równoległego.** Jeśli w przestrzeni obierzemy w dowolny sposób cztery punkty niekomplanarne  $A, B, C, D$  oraz na płaszczyźnie rysunku obierzemy w dowolny sposób cztery punkty niekolinearne  $A', B', C', D'$  jako rzuty punktów  $A, B, C, D$ , to wówczas rzut  $X'$  dowolnego punktu przestrzeni  $X$  jest już na tym rysunku jednoznacznie określony i aby go znaleźć stosujemy następującą metodę.

**Przypadek 1.** Jeśli  $X$  jest punktem prostej  $AB$  i dzieli odcinek  $AB$  wewnątrz lub zewnątrz w pewnym stosunku, to  $X'$  dzieli odcinek  $A'B'$  w taki sam sposób i w tym samym stosunku.

**Przypadek 2.** Załóżmy, że  $X$  należy do płaszczyzny  $ABC$ . Wówczas można wybrać jeden z punktów  $A, B, C$  tak aby prosta łącząca ten punkt z punktem  $X$  oraz prosta łącząca pozostałe dwa punkty przecinały się, a ich punkt przecięcia oznaczmy  $P$ .

Teraz, sposobem opisanym w przypadku 1, wyznaczamy na rysunku najpierw  $P'$ , a następnie tym samym sposobem wyznaczamy  $X'$ .

**Przypadek 3.** Załóżmy, że  $X$  nie leży na żadnej z płaszczyzn wyznaczonych przez którekolwiek trzy z punktów  $A, B, C, D$ . Wówczas można wybrać jeden z punktów  $A, B, C, D$  tak, aby prosta łącząca ten punkt z punktem  $X$  oraz płaszczyzna wyznaczona przez pozostałe trzy punkty przecinały się, a ich punkt przecięcia oznaczmy  $Q$ .

Teraz, sposobem opisanym w przypadku 2, wyznaczamy na rysunku najpierw  $Q'$ , a następnie, sposobem opisanym w przypadku 1, wyznaczamy  $X'$ .

**Praktyczne zasady rzutu równoległego.** Jeśli kierunek rzutu jest ukośny względem rzutni, to mamy rzut równoległy *ukośny*, krótko: *rzut równoległy*. Jeśli kierunek rzutu jest prostokątny do rzutni, to mamy rzut równoległy prostokątny, krótko: *rzut prostokątny*.

Rzut równoległy ukośny stanowi szeroko stosowaną metodę przedstawiania brył przestrzennych na rysunku płaskim. Metoda ta nosi nazwę *perspektywy równoległej*.

Oprócz rzutu równoległego istnieją inne rodzaje rzutów, np. *rzut środkowy*, czyli *perspektywa malarska*. Malarz rysuje bryłę tak, jak ją widzi, tzn. rzutuje bryłę za pomocą promieni zbieżnych w jego oku. Perspektywą-malarską nie będziemy się tu zajmować, natomiast przedstawimy zasady perspektywy równoległej.

Wyobraźmy sobie rzutnię, ustawioną przed obserwatorem pionowo, prostopadle do kierunku, w jakim on na nią patrzy. Może to być ściana, ekran lub tablica. Załóżmy, że przedmiot rzutowany znajduje się między obserwatorem a rzutnią i jest oświetlony promieniami słonecznymi, które — ze względu na wielką odległość Słońca — można uważać za równoległe, a które padają na przedmiot i ekran ukośnie z obserwatora: z tyłu, z góry i z prawej jego strony.

Wyobraźmy sobie, że przedmiotem rzutowanym jest sześcián, którego krawędzie są sporządzone ze sztywnego drutu. Wówczas obserwator zobaczy na ekranie cień tego sześciánu, a cień ten będzie rzutem równoległym ukośnym danego sześciánu. Jest oczywiste, że rzut każdej krawędzi sześciánu i w ogóle rzut każdego odcinka będzie odcinkiem (albo punktem, gdyby dany odcinek był równoległy do kierunku rzutów), jednak rzut odcinka może być krótszy lub dłuższy od samego odcinka i nie musi być równoległy do niego.

### Zasady rzutu równoległego ukośnego

1. Jeśli dany odcinek jest równoległy do rzutni, to jego rzut jest równym i równoległym do niego odcinkiem. Stąd już wynika, że jeśli dany kąt leży w płaszczyźnie równoległej do rzutni, to jego rzut jest równym mu kątem i jeśli dany wielokąt leży w płaszczyźnie równoległej do rzutni, to jego rzut jest wielokątem przystającym do niego i ma boki odpowiednio równoległe do boków danego wielokąta.

2. Jeśli dwa dane odcinki są równoległe, to ich rzuty, o ile nie są punktami, są odcinkami równoległymi i stosunek rzutów jest równy stosunkowi rzutowanych odcinków. Krótko: *rzut równoległy zachowuje stosunek długości odcinków równoległych*.

3. Rzut odcinka prostopadłego do rzutni może być, zależnie od kierunku rzutów, krótszy, dłuższy lub równy temu odcinkowi. Zwykle obieramy taki kierunek rzutów, aby rzut odcinka prostopadłego do rzutni był krótszy od rzutowanego odcinka.

Stosunek ich długości nazywamy **skróceniem**

$$A'B' : AB = s$$

Skrócenie  $s$  obieramy zwykle:  $s = \frac{2}{3}$ ,  $s = \frac{1}{2}$  lub  $s = \frac{1}{3}$ .

4. Jeśli na pionową rzutnię będziemy rzutować kąt prosty, leżący w płaszczyźnie poziomej i mający jedno ramie równoległe a drugie prostopadłe do rzutni, to otrzymamy jako rzut kąt ostry  $\alpha$  lub kąt rozwarty  $180^\circ - \alpha$ .

Kąt  $\alpha$  nazywamy **skręceniem** i przyjmujemy zwykle  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$  lub  $60^\circ$ .

Powyższe zasady pozwalają wykreślić rzuty równoległe figur płaskich i brył. Najpierw szukamy w danej figurze takiego odcinka (może to być krawędź, wysokość, przekątna lub cięciwa) lub — jeszcze lepiej — takiego przekroju bryły, który jest równoległy do rzutni i przerysowujemy go bez zmiany długości i kierunku. Następnie szukamy w danej figurze odcinków, które są prostopadłe do rzutni; rzuty tych odcinków rysujemy, stosując obrane skręcenie i skrócenie. Dla pozostałych odcinków danej figury, tj. tych, które nie są ani równoległe, ani prostopadłe do rzutni, podanie reguły nie jest konieczne, gdyż łącząc końce poprzednio narysowanych odcinków zazwyczaj łatwo uzupełniamy rysunek i otrzymujemy rzut danej figury.

**Przykład.** Narysować rzut równoległy ukośny czworościanu foremnego (str. 296) o krawędzi  $a$ , przyjmując skręcenie  $\alpha = 60^\circ$  i skrócenie  $s = \frac{1}{3}$ .

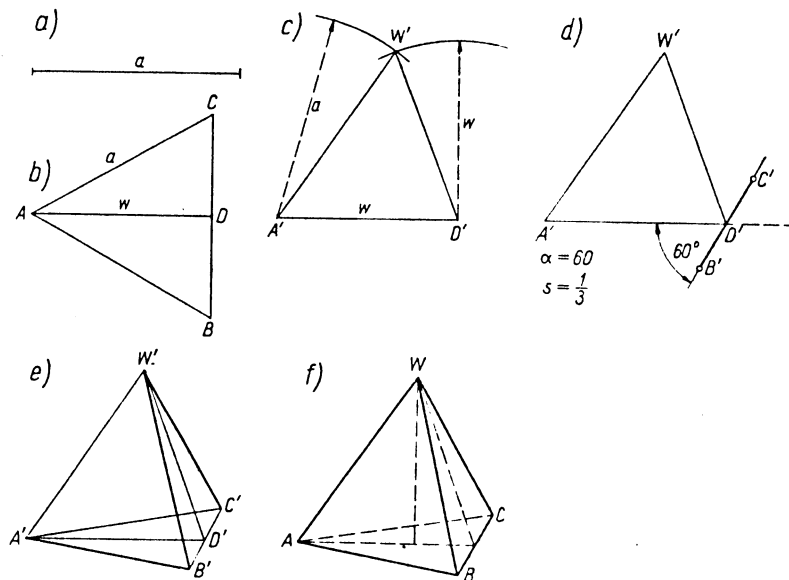
**Rozwiązanie.** Przy zadaniach tego rodzaju zazwyczaj pozostawia się rozwiązującemu swobodę wyboru ustawienia bryły względem rzutni. Obieramy tu takie ustawienie czworościanu, aby jego podstawa  $ABC$  była pozioma, a jedna z jego płaszczyzn symetrii przechodzących przez wierzchołek  $W$  czworościanu była równoległa do rzutni. Przekrój czworościanu tą płaszczyzną będzie się rzutował na rzutnię w swej naturalnej wielkości, natomiast krawędź podstawy prostopadła do tej płaszczyzny, a więc i do rzutni, ulegnie określonego w temacie skręceniu i skróceniu. Najpierw narysujemy omawiany przekrój i krawędź, a potem łącząc ich wierzchołki otrzymamy pozostałe krawędzie czworościanu.

Omawiany przekrój jest trójkątem, którego jeden bok jest krawędzią  $a$  czworościanu, drugi bok jest wysokością podstawy, a trzeci wysokością ściany bocznej, równą wysokości podstawy; jest to więc trójkąt równoramienny. Przystępujemy do kreślenia. Rys. 120-1 pokazuje etapy konstrukcji.

Stosownie do zadanej długości  $a$  krawędzi kreślimy najpierw w naturalnej wielkości podstawę  $ABC$  jako trójkąt równoboczny o boku  $a$ . Kreślimy ją tak, jak byśmy ją zobaczyli patrząc na nią z góry od wierzchołka. Wysokość  $AD = w$  posłuży nam do nakreślenia rzutu  $A'W'D'$  przekroju  $AWD$ ; mianowicie obok kreślimy odcinek  $A'D'$  jako podstawę trójkąta  $A'W'D'$  i zakreślamy łuki: z punktu  $A'$  promieniem równym  $a$  i z punktu  $D'$  promieniem równym  $w$ . W przecięciu tych łuków otrzymujemy punkt  $W'$ .

Teraz nakreślimy rzut  $B'C'$  krawędzi  $BC$ . Ponieważ  $D$  jest środkiem krawędzi  $BC$ , więc  $D'$  musi być środkiem jej rzutu  $B'C'$ . Kreślimy przez  $D'$  prostą nachyloną do prostej poziomej  $A'D'$  pod kątem  $\alpha = 60^\circ$  i odkładamy na niej po jednej stronie  $\frac{1}{3} CD$ , a po drugiej stronie  $\frac{1}{3} BD$ . W ten sposób otrzymujemy punkty  $B'$  i  $C'$ . Łącząc je z  $A'$  dostajemy rzut  $A'B'C'$  podstawy.

Wreszcie łącząc  $B'$  i  $C'$  z  $W'$  otrzymujemy brakujące dwie krawędzie boczne. Pozostaje tylko pogrubić krawędzie widoczne i usunąć zbędne linie pomocnicze. Często opuszczamy przy rzucie znaczki „prim” i zamiast  $A', B', \dots$  piszemy  $A, B \dots$



Rys. 120-1. Kolejne etapy kreślenia rzutu ukośnego ( $\alpha = 60^\circ, s = 1/3$ ) czworościanu foremnego: a) krawędź, b) podstawa, c) równoległy do rzutni przekrój przez krawędź i symetralne dwóch ścian, d) nakreślenie rzutu krawędzi  $BC$  prostopadłej do rzutni, e) nakreślenie rzutów czterech krawędzi ukośnych względem rzutni, f) ostateczne wykończenie rysunku

**Rzut równoległy walca i stożka** (definicje tych figur znajdują się na str. 299 i 300). Jak zwykle, zakładamy, że rzutnia jest pionowa, a walec i stożek są ustawione przed rzutnią tak, aby ich osie były pionowe. Zaczynamy od nakreślenia rzutu podstawy danej bryły.

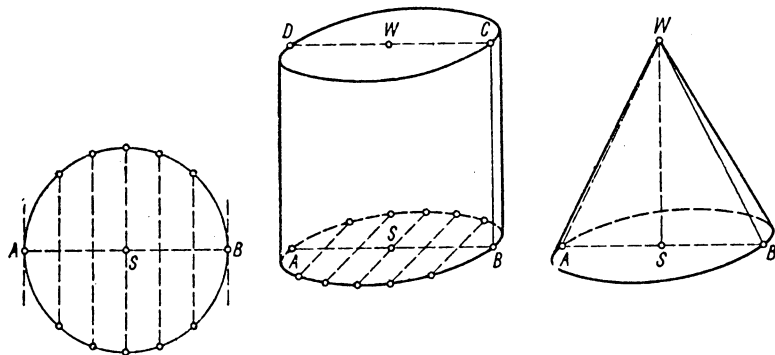
W kole stanowiącym podstawę bryły kreślimy średnicę równoległą do rzutni i kilka cięciw prostopadłych do niej, po czym stosujemy do nich zasady rzutu równoległego, a więc średnica równoległa do rzutni zostaje przerysowana bez zmiany, a cięciwy prostopadłe do rzutni ulegają skręceniu i skróceniu. Łącząc końce otrzymanych w ten sposób rzutów średnicy i cięciw, otrzymujemy zamkniętą linię krzywą, która nazywa się *elipsą* (str. 389).

Ponieważ oś bryły jest pionowa, a więc równoległa do rzutni, przeto jej rzut będzie równy jej i równoległy do niej. Kreślimy ten rzut i górny jego koniec jest — w przypadku walca lub stożka ściętego: rzutem środka górnej podstawy. — w przypadku stożka: rzutem wierzchołka.

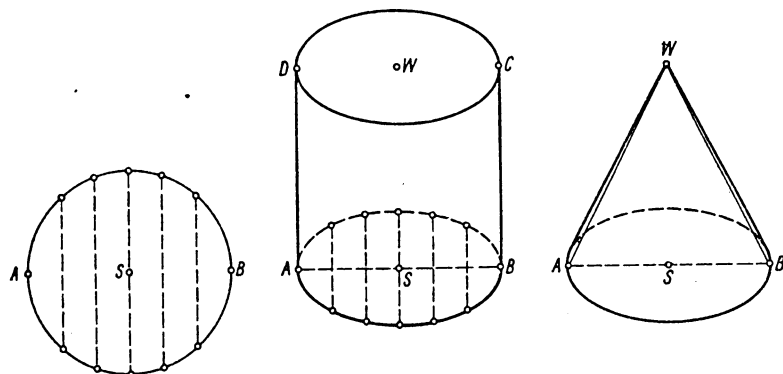
Następnie w przypadku walca lub stożka ściętego kreślimy rzut drugiej podstawy i uzupełniamy rysunek rzutami tworzących, a w przypadku stożka od razu kreślimy

rzuty tworzących, łącząc rzut wierzchołka z punktami elipsy, stanowiącej rzut podstawy (rys. 120-2).

Jednak obrazy walca i stożka, nakreślone w ten sposób, mimo swej prawidłowości i mimo tego, iż przy odpowiednim kierunku oświetlenia są faktycznymi cieniami tych brył, sprawiają nienaturalne wrażenie. Dzieje się tak z powodu ukośnego



Rys. 120-2. Rzut ukośny walca i stożka ( $\alpha = 45^\circ$ ,  $s = 1/2$ ). Przekrój osiowy walca  $ABCD$  i przekrój osiowy stożka  $ABW$  są widoczne w swym naturalnym kształcie

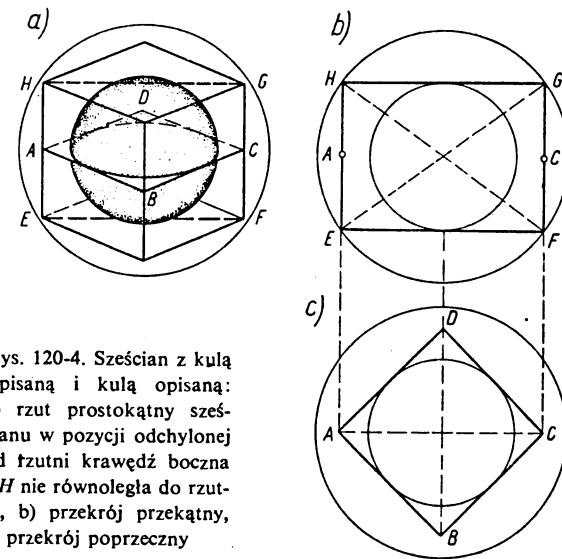


Rys. 120-3. Rzut ukośny walca i stożka ( $\alpha = 90^\circ$ ,  $s = 1/2$ ). Przekroje osiowe  $ABCD$  i  $ABW$  występują w naturalnym kształcie

wydlężenia elips stanowiących podstawy. Aby temu zapobiec, przy kreśleniu rzutów walca i stożka stosujemy skręcenie  $\alpha = 90^\circ$  i skrócenie  $s = \frac{1}{2}$  lub  $\frac{1}{3}$ , tj. przyjmujemy, że promienie rzutujące padają z tyłu i z góry (a nie z boku) i biegną w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do rzutni (rys. 120-3).

Rzut ukośny kuli jest zawsze elipsą, co sprawia nienaturalne wrażenie. Dlatego, mając do czynienia z bryłami wpisanymi lub opisanymi na kuli, stosujemy zwykle rzut prostokątny, przy czym często ustawiamy rzutowaną bryłę nieco ukośnie względem rzutni (rys. 120-4).

Zalecamy Czytelnikowi opisać w jaki sposób powstały rysunki 120-1, 120-2, i 120-3 i wykonać te rysunki powtórnie przy zmienionych wartościach skrócenia i skręcenia.



Rys. 120-4. Sześcian z kulą wpisaną i kulą opisaną: a) rzut prostokątny sześcianu w pozycji odchylonej od rzutni krawędź boczna  $EH$  nie równoległa do rzutni, b) przekrój przekątny, c) przekrój poprzeczny

## Odpowiedzi do rozdziału XVIII

119

1.  $\sin \alpha : \sin \alpha'$ . 2.  $\sec \varphi = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$ .

## Rozdział XIX

# PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE W PRZESTRZENI

## 121. Izometria i przystawanie figur w przestrzeni

**Definicja 121.1.** *Izometrią* nazywamy w stereometrii takie przekształcenie przestrzeni w przestrzeń, w którym odległość obrazów  $A', B'$  dwóch dowolnych punktów  $A, B$  równa się odległości tych punktów

$$A'B' = AB$$

Istnieją różnego rodzaju izometrie, ale każda izometria ma następujące własności.

**Własności izometrii.** 1. Przekształcenie odwrotne do izometrii jest izometrią.

2. Przekształcenie tożsamościowe jest izometrią.

3. Złożenie dwóch izometrii jest izometrią.

4. Powyższe trzy własności wyrażamy łącznie mówiąc, że *izometrie tworzą grupę przekształceń*.

5. Translacja jest izometrią.

6. Izometria zachowuje:

- współliniowość punktów,
- uporządkowanie punktów na prostej,
- wypukłość figury,
- równoległość i prostopadłość (wszelkiego rodzaju),
- komplanarność punktów.

**Definicja 121.2.** Dwie figury nazywamy *przystającymi*, gdy istnieje izometria przekształcająca jedną figurę w drugą. Jeśli izometria ta jest parzysta, to figury nazywamy przystającymi *wprost*. Jeśli izometria ta jest nieparzysta, to figury nazywamy przystającymi *odwrotnie*. (Parzystość izometrii definiujemy na str. 294).

Określenia powyższe są analogiczne do odpowiednich określeń w planimetrii. Mimo to występuje tu pewna odmiennność. Rozważmy w planimetrii dwie figury odwrotnie przystające, np. jakiś trójkąt różnoboczny i drugi trójkąt, symetryczny do niego osiowo. Przechodząc od pojęć abstrakcyjnych do przedmiotów konkretnych, wytnijmy dwa takie trójkąty z tektury i połóżmy je na stole tak, aby znalazły się

w symetrii osiowej. Nie odrywając ich od powierzchni stołu, nie można doprowadzić do ich wzajemnego pokrycia się. Dopiero oderwawszy jeden trójkąt (albo oba) od płaszczyzny stołu i obracając w przestrzeni dookoła osi symetrii (podobnie jak motyl stula swe skrzydła) możemy doprowadzić oba trójkąty do wzajemnego przystawania.

W stereometrii również istnieją figury odwrotnie przystające. Ilustracją wziętą z życia niech będzie para butów. But prawy i but lewy można ustawić tak, aby zaistniała między nimi symetria płaszczyznowa, ale nie można jednego z nich wstawić dokładnie w tę samą część przestrzeni, którą uprzednio zajmował drugi but. Innym przykładem figur odwrotnie przystających może być para śrub, z których jedna ma prawy gwint, a druga lewy. Dlatego rozróżnienie przystawania wprost i odwrotnie wydaje się w stereometrii bardzo istotne.

## 122. Symetrie w przestrzeni

### Symetria płaszczyznowa jako przekształcenie

**Definicja 122.1.** *Symetrią względem płaszczyzny  $\sigma$* , zwanej w dalszym ciągu *płaszczyzną symetrii*, nazywamy takie przekształcenie przestrzeni w przestrzeń

$$S_{\sigma}$$

które dowolnemu punktowi  $P$  przyporządkowuje punkt  $P'$

$$S_{\sigma}(P) = P'$$

wyznaczony przez następujące warunki:

- punkty  $P$  i  $P'$  leżą na jednej prostej prostopadłej do  $\sigma$ ;
- jeśli  $P$  leży po jednej stronie płaszczyzny  $\sigma$ , to  $P'$  leży po przeciwnej stronie płaszczyzny  $\sigma$ ;
- odległość  $P$  od  $\sigma$  jest równa odległości  $P'$  od  $\sigma$ .

O punkcie  $P'$  mówimy wówczas, że jest *symetryczny do punktu  $P$  względem płaszczyzny  $\sigma$* .

Z powyższej definicji wynika, że w symetrii płaszczyznowej obrazem dowolnego punktu płaszczyzny symetrii jest ten sam punkt, czyli każdy punkt płaszczyzny  $\sigma$  jest punktem stałym przekształcenia  $S_{\sigma}$

$$P \in \sigma \Rightarrow S_{\sigma}(P) = P$$

Można też udowodnić, że każdy punkt stały symetrii  $S_{\sigma}$  leży na  $\sigma$

$$S_{\sigma}(P) = P \Rightarrow P \in \sigma$$

### Symetria płaszczyznowa jako własność figury

**Definicja 122.2.** Jeśli dla danej figury  $f$  istnieje płaszczyzna  $\sigma$  taka, że obrazem figury  $f$  w symetrii płaszczyznowej względem  $\sigma$  jest ta sama figura  $f$

$$S_{\sigma}(f) = f$$

to mówimy że figura  $f$  jest *symetryczna płaszczyznowo* i że  $\sigma$  jest *plaszczyzną symetrii* figury  $f$ .

**Przykład.** Ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, a jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i nierówna krawędzi podstawy, posiada jedną płaszczyznę symetrii. Sześcian ma 9 płaszczyzn symetrii, są nimi: trzy płaszczyzny równoległe do ścian i przechodzące przez środki krawędzi oraz sześć płaszczyzn poprowadzonych przez przekątne przeciwległych ścian. Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma 4 płaszczyzny symetrii: trzy płaszczyzny symetrii przechodzące przez symetralne podstaw i jedną płaszczyznę symetrii przechodzącą przez środki krawędzi bocznych.

### Symetria osiowa jako przekształcenie

**Definicja 122.3.** Symetrią względem prostej  $a$ , zwanej w dalszym ciągu *osią symetrii*, nazywamy takie przekształcenie przestrzeni w przestrzeń

$$S_a$$

które dowolnemu punktowi przestrzeni  $P$  przyporządkowuje punkt  $P'$

$$S_a(P) = P'$$

wyznaczony przez następujące warunki:

- punkty  $P$  i  $P'$  leżą na jednej prostej przecinającej prostą  $a$  pod kątem prostym;
- jeśli  $P$  leży w pewnej półpłaszczyźnie o krawędzi  $a$ , to  $P'$  leży w półpłaszczyźnie uzupełniającej tamtą półpłaszczyznę do płaszczyzny;
- odległość  $P$  od  $a$  równa się odległości  $P'$  od  $a$ .

O punkcie  $P'$  mówimy, że jest *symetryczny do punktu  $P$  względem prostej  $a$* .

Z definicji powyższej wynika, że zbiór punktów stałych symetrii  $S_a$  jest prostą  $a$

$$P \in a \Leftrightarrow S_a(P) = P$$

### Symetria osiowa jako własność figury

**Definicja 122.4.** Jeśli dla danej figury  $f$  istnieje prosta  $a$  taka, że

$$S_a(f) = f$$

to mówimy, że figura  $f$  jest *symetryczna osiowo* i że prosta  $a$  jest *osią symetrii* figury  $f$ .

**Przykład.** Stożek ma jedną oś symetrii. Sześcian ma 9 osi symetrii; są nimi: trzy proste łączące środki przeciwległych ścian i sześć prostych łączących środki przeciwległych krawędzi. Ostrosłup prawidłowy trójkątny nie posiada osi symetrii. Walec ma nieskończenie wiele osi symetrii, gdyż oprócz osi walca także każda prosta przechodząca przez środek walca i prostopadła do osi walca jest jego osią symetrii.

Oś symetrii danej figury nie musi należeć do tej figury, może nawet nie mieć punktu wspólnego z tą figurą; przykładami są pierścień kołowy i torus (figura podobna do dętki samochodowej lub obrączki).

### Symetria środkowa jako przekształcenie

**Definicja 122.5.** Symetrią względem punktu  $O$ , zwanego w dalszym ciągu *środkiem symetrii*, nazywamy takie przekształcenie przestrzeni w przestrzeń

$$S_O$$

które dowolnemu punktowi  $P$  przyporządkowuje punkt  $P'$

$$S_O(P) = P'$$

wyznaczony przez następujący warunek:

- punkt  $O$  jest środkiem odcinka  $PP'$ .

O punkcie  $P'$  mówimy, że jest *symetryczny do punktu  $P$  względem  $O$  jako środka symetrii*.

W symetrii środkowej jedynym punktem niezmienniczym jest środek symetrii.

### Symetria środkowa jako własność figury

**Definicja 122.6.** Jeśli dla danej figury  $f$  istnieje punkt  $O$  taki, że obrazem figury  $f$  w symetrii względem  $O$  jako środka jest figura  $f$

$$S_O(f) = f$$

to mówimy, że figura  $f$  jest *symetryczna środkowo* i że  $O$  jest *środkiem symetrii* figury  $f$ .

**Przykład.** Kula, sześcian, walec, graniastosłup prawidłowy sześciokątny – posiadają po jednym środku symetrii. Graniastosłup prawidłowy pięciokątny nie posiada środka symetrii. Każda figura ograniczona i niepusta może posiadać co najwyżej jeden środek symetrii.

**Twierdzenie 122.1.** Wszystkie symetrie: płaszczyznowe, osiowe i środkowe – są izometriami.

## 123. Obrót przestrzeni dookoła osi

Przekształcenie przestrzeni generowane przez przekształcenie płaszczyzny.

**Definicja 123.1.** Niech będą dane:

- płaszczyzna  $\omega$ ;
- przekształcenie  $\varphi$ , które dowolnemu punktowi  $Q$  należącemu do płaszczyzny  $\omega$  przyporządkowuje pewien punkt  $\varphi(Q) = Q'$  również należący do  $\omega$ .

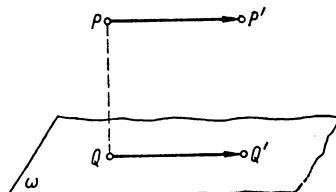
Przekształceniem przestrzeni generowanym przez przekształcenie  $\varphi$  nazywamy takie przekształcenie  $\Phi$ , które dowolnemu punktowi  $P$  przestrzeni przyporządkowuje punkt

$$\Phi(P) = P'$$

wyznaczony przez wykonanie następujących czynności (rys. 123-1):

- punkt  $P$  rzutujemy prostopadłe na płaszczyznę  $\omega$ ; otrzymany rzut oznaczamy  $Q$ ;

- punkt  $Q$  poddajemy przekształceniu  $\varphi$ , w wyniku czego otrzymujemy punkt  $\varphi(Q) = Q'$ ;
- tworzymy wektor  $\overrightarrow{QQ'}$ ;
- w punkcie  $P$  zaczynamy wektor  $\overrightarrow{PP'}$  równy wektorowi  $\overrightarrow{QQ'}$ ;
- koniec  $P'$  wektora  $\overrightarrow{PP'}$  przyjmujemy za obraz punktu  $P$  w przekształceniu  $\Phi$ .



Rys. 123-1

**Przykłady przekształceń generowanych przez przekształcenia płaszczyzny:**

- translacja przestrzeni o wektor  $\vec{w}$  jest przekształceniem generowanym przez translację o wektor  $\vec{w}$  określoną w dowolnej płaszczyźnie równoległej do  $\vec{w}$ ;
- symetria płaszczyznowa  $S_\sigma$  jest generowana przez symetrię osiową określoną w płaszczyźnie  $\omega$  prostopadłej do  $\sigma$  względem krawędzi przecięcia się płaszczyzn  $\omega$  i  $\sigma$ ;
- symetria osiowa względem prostej  $a$  jest generowana przez symetrię środkową określoną w płaszczyźnie  $\omega$  prostopadłej do  $a$ , gdzie środkiem symetrii jest punkt przebiecia  $\omega$  przez  $a$ .

Wymienione tu przykłady przekształceń generowanych są izometriami. Można udowodnić, że przekształcenie przestrzeni generowane przez izometrię płaszczyzny jest izometrią przestrzeni.

### Obrót przestrzeni dokoła osi

**Definicja 123.2.** *Obrotem przestrzeni dokoła prostej  $a$  o kąt skierowany  $\vec{\alpha}$  nazywamy przekształcenie generowane przez obrót w płaszczyźnie prostopadłej do  $a$  o kąt  $\vec{\alpha}$  dokoła punktu przebiecia tej płaszczyzny przez  $a$ . Prosta  $a$  nazywamy *osią obrotu*, a kąt  $\vec{\alpha}$  nazywamy *kątem obrotu*.*

**Przykład.** Jeśli prawidłowy ostrosłup pięciokątny obrócimy dokoła prostej przechodzącej przez wierzchołek prostopadle do podstawy o  $\frac{1}{5}$  kąta pełnego, to w wyniku tego przekształcenia otrzymamy figurę pokrywającą się z danym ostrosłupem.

Jeśli ostrosłup wyobraźmy sobie jako ruchomą bryłę materialną, to można mówić o „miejscu w przestrzeni”, które ten ostrosłup wypełnia w danej chwili. Jeśli ostrosłup ten obrócimy o  $\frac{1}{5}$  kąta pełnego dokoła wymienionej prostej, to po obrocie zajmie on to samo miejsce w przestrzeni, które zajmował przed obrotem.

Podobny rezultat otrzymamy stosując tu obrót o  $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$  lub  $\frac{5}{5}$  kąta pełnego. W takim przypadku mówimy, że figura posiada *oś symetrii 5-go rzędu*.

**Definicja 123.3.** Mówimy, że figura  $f$  posiada *oś symetrii rzędu  $n$* , jeśli dla tej figury istnieje prosta taka, że obrót figury  $f$  dokoła tej prostej o  $\frac{1}{n}$  kąta pełnego daje w wyniku figurę  $f$ .

Zwykła oś symetrii jest osią symetrii 2-go rzędu.

## 124. Rodzaje izometrii

**Punkty stałe izometrii.** Izometria w przestrzeni może nie mieć punktu stałego; takimi izometriami są np. translacja i ruch śrubowy, tj. złożenie obrotu z translacją w kierunku osi obrotu.

Izometria może mieć dokładnie jeden punkt stały; takimi izometriami są np. symetria względem punktu i złożenie obrotu z symetrią płaszczyznową względem płaszczyzny prostopadłej do osi obrotu.

Jeśli izometria przestrzeni ma dwa punkty stałe  $A, B$ , to każdy punkt prostej  $AB$  jest punktem stałym tej izometrii. Może się przy tym zdarzyć, że poza prostą  $AB$  nie ma punktów stałych (tak jest np. w obrocie dokoła prostej  $AB$ ) albo poza prostą  $AB$  istnieje jakiś punkt stały.

Jeśli izometria przestrzeni ma trzy niekolinearne punkty stałe  $A, B, C$ , to cała płaszczyzna  $ABC$  jest pokryta punktami stałymi. W tym przypadku izometria jest albo przekształceniem tożsamościowym albo symetrią płaszczyznową względem płaszczyzny  $ABC$ .

Izometria przestrzeni, która ma cztery niekomplanarne punkty stałe jest tożsamościowym przekształceniem przestrzeni.

### Rozkład izometrii przestrzeni na symetrie płaszczyznowe

**Twierdzenie 124.1.** *Każda izometria przestrzeni jest złożeniem co najwyżej pięciu symetrii płaszczyznowych.*

Dowód pomijamy. Ograniczymy się do przykładów.

1. Przekształcenie tożsamościowe jest złożeniem dowolnej symetrii płaszczyznowej z tą samą symetrią, powtórnie wykonaną.
2. Symetria osiowa  $S_a$  jest złożeniem dwóch symetrii płaszczyznowych  $S_\alpha, S_\beta$ , gdzie  $\alpha \cap \beta = a$  oraz  $\alpha \perp \beta$ .
3. Obrót przestrzeni dokoła osi  $a$  jest złożeniem dwóch symetrii płaszczyznowych  $S_\alpha, S_\beta$ , gdzie  $\alpha \cap \beta = a$  oraz kąt między  $\alpha$  i  $\beta$  jest połową kąta obrotu.
4. Translacja o wektor  $\vec{w}$  jest złożeniem dwóch symetrii płaszczyznowych  $S_\alpha, S_\beta$ , gdzie  $\alpha \parallel \beta \perp \vec{w}$  i odległość płaszczyzn  $\alpha, \beta$  jest równa połowie długości wektora  $\vec{w}$ .
5. Symetria względem punktu jest złożeniem trzech symetrii płaszczyznowych o płaszczyznach symetrii wzajemnie prostopadłych.

**Podział izometrii na parzyste i nieparzyste.** Zbiór wszystkich izometrii tworzy grupę (str. 288). Wszystkie izometrie przestrzeni dzielimy na *parzyste* i *nieparzyste* zależnie od tego z ilu symetrii płaszczyznowych można złożyć daną izometrię. Żadna izometria parzysta nie jest identyczna z żadną izometrią nieparzystą.

Złożenie dwóch izometrii parzystych jest izometrią parzystą, izometria odwrotna do parzystej jest parzystą, tożsamość jest izometrią parzystą; zatem zbiór wszystkich izometrii parzystych tworzy grupę. Izometrie parzyste są nazywane w geometrii *ruchami*, gdyż są to izometrie, którym odpowiadają ruchy ciała sztywnego w przestrzeni.

Złożenie dwóch izometrii nieparzystych jest izometrią parzystą; izometrie nieparzyste nie tworzą grupy. W izometrii nieparzystej obrazem prawoskrętnej trójki wektorów wzajemnie prostopadłych jest lewoskrętna trójka wektorów wzajemnie prostopadłych (zob. rys. 125-2b). Izometria nieparzysta zmienia skrętność na przeciwną. Izometria parzysta nie zmienia skrętności.

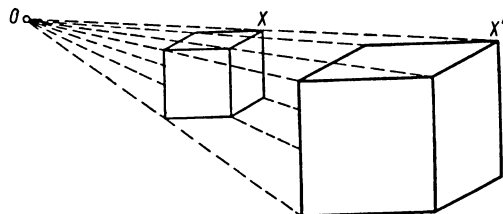
## 125. Jednokładność i podobieństwo w przestrzeni

**Definicja 125.1.** *Jednokładnością o środku  $O$  i skali  $s$ ,  $s \neq 0$ , nazywamy przekształcenie przestrzeni, które dowolnemu punktowi  $X$  przyporządkowuje punkt  $X'$  taki, że*

$$\overrightarrow{OX'} = s \cdot \overrightarrow{OX}$$

Dwie figury  $f$  i  $f'$  nazywamy *jednokładnymi*, gdy istnieje jednokładność przekształcająca jedną z tych figur w drugą.

Wysłowienie powyższej definicji jest dokładnie takie samo jak w definicjach 85.1 i 85.2, sens jest o tyle ogólniejszy, że dotyczy przestrzeni. Rys. 125-1 (perspektywiczny) pokazuje jednokładność o skali  $s = 2$ ; obrazem sześcianu jest sześcian o krawędziach odpowiednio równoległych i 2 razy dłuższych.



Rys. 125-1

Jednokładność w przestrzeni ma własności, których wypowiedź brzmi tak samo jak twierdzenie 85.1. Nadto można wypowiedzieć parę własności, których w planimetrii nie było, np.:

- jednokładność zachowuje komplanarność punktów,
- jednokładność przekształca sferę w sferę i kulę w kulę,
- jednokładność przestrzeni o środku  $O$  i skali  $s$  jest jednocześnie jednokładnością o środku  $O$  i skali  $s$  dla każdej płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $O$ .

**Definicja 125.2.** *Podobieństwem w skali  $s$ ,  $s > 0$ , nazywamy przekształcenie przestrzeni w przestrzeń zmieniające odległość każdego dwóch punktów w stosunku  $s$*

$$X'Y' = sXY$$

Dwie figury  $f$  i  $f'$  nazywamy *podobnymi*, co zapisujemy

$$f \sim f'$$

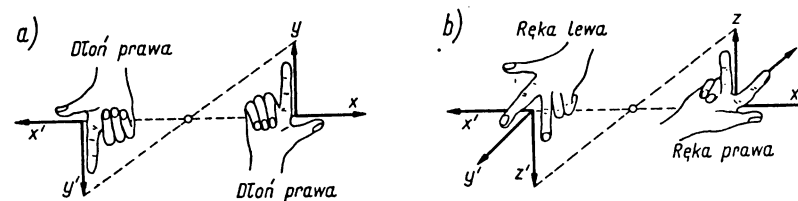
gdy istnieje podobieństwo przekształcające jedną z tych figur w drugą.

Własności podobieństwa wymienione w twierdzeniu 86.1 przenoszą się na przestrzeń z wyjątkiem własności 6, którą zastąpimy obecnie następującą własnością: Jeśli są dane cztery niekomplanarne punkty  $A, B, C, D$  oraz cztery punkty  $A', B', C', D'$  takie, że

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{C'D'}{CD}$$

to istnieje dokładnie jedno podobieństwo przestrzeni, w którym obrazami punktów  $A, B, C, D$  są punkty  $A', B', C', D'$ .

Każde podobieństwo jest złożeniem jednokładności i izometrii. Zależnie od tego, czy jednokładność ma skalę dodatnią czy ujemną oraz od tego, czy izometria jest parzysta czy nieparzysta, mamy podobieństwo wprost lub podobieństwo odwrotne. Wypowiedź ta różni się od analogicznej wypowiedzi w tw. 86.2. Pochodzi



Rys. 125-2. Symetria środkowa: a) nie zmienia skrętności pary wektorów na płaszczyźnie, b) zmienia skrętność trójki wektorów w przestrzeni

to stąd, że jednokładność o skali ujemnej (np.  $s = -1$ , czyli symetria środkowa) na płaszczyźnie nie zmienia skrętności pary wektorów, a w przestrzeni zmienia skrętność trójki wektorów z prawej na lewą (rys. 125-2).

## 126. Bryły i ich rodzaje

**Bryła** (zob. str. 268) jest to figura ograniczona, domknięta, spójna i posiadająca w każdym otoczeniu każdego swego punktu co najmniej jeden punkt wewnętrzny.

Najważniejszymi rodzajami brył są wielościany i bryły obrotowe.

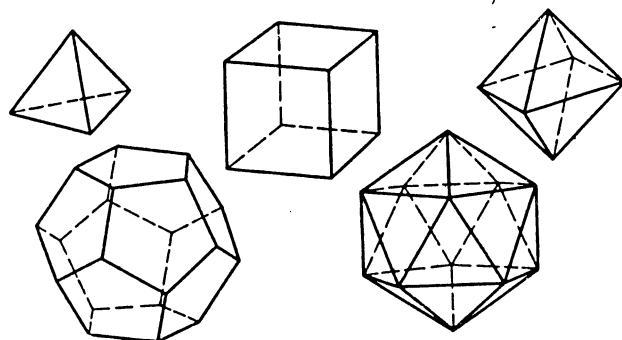
Najważniejsze wielościany – to graniastoslupy i ostrosłupy.

Najważniejsze bryły obrotowe – to walec, stożek i kula.

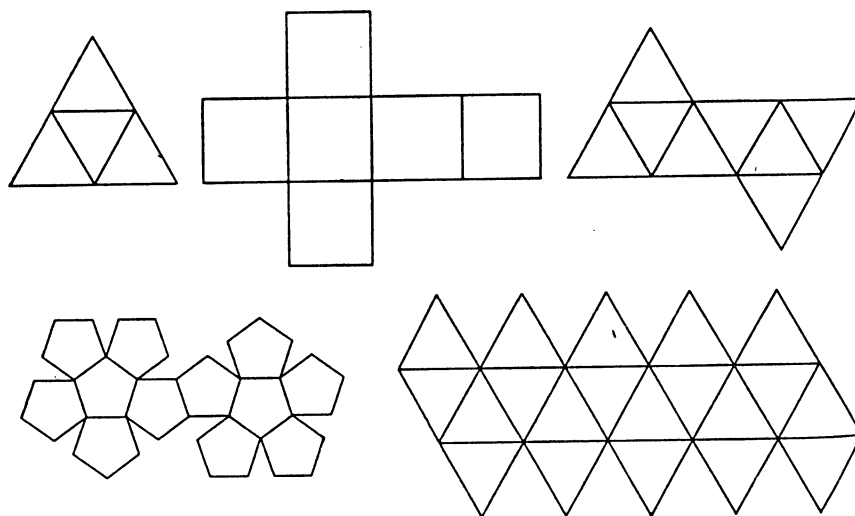
**Powierzchnia wielościenna** (zamknięta) jest to figura utworzona z wielokątów leżących w różnych płaszczyznach w ten sposób, że każdy bok jest wspólny dla dwóch wielokątów. Wielokąty te nazywamy *ścianami*, a ich boki i wierzchołki – *krawędziami* i *wierzchołkami* powierzchni wielościennej. Ściany nazywamy *śsiednimi*, gdy mają wspólną krawędź. Ściany nazywamy *przeciwnymi*, gdy ich płaszczyzny są równoległe.

**Wielościan** (zob. str. 273) jest ograniczony powierzchnią wielościenną zamkniętą.

**Siatka wielościanu.** Rozcinając powierzchnię wielościanu wzdłuż stosownie dobranych krawędzi i rozkładając ją na płaszczyźnie, otrzymujemy *siatkę* czyli *rozwnięcie* powierzchni danego wielościanu (rys. 126-1, 2). W skład siatki wchodzi wszy-



Rys. 126-1. Wielościany foremne



Rys. 126-2. Siatki wielościanów foremnych

skie ściany danego wielościanu, ale zestawienie tych ścian jest zależne od sposobu rozcięcia powierzchni wielościanu i może być dokonane na różne sposoby.

**Gnaniastosłup** jest to wielościan, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwu płaszczyznach równoległych, zwanych *płaszczyznami podstaw*, dolnej i górnej, a którego wszystkie krawędzie nie leżące na tych płaszczyznach, zwane *krawędziami bocznymi*, są równoległe. Stąd już wynika, że krawędzie boczne są wszystkie równe, a ściany leżące w płaszczyznach podstaw, zwane *podstawą górną* i *podstawą dolną*, są wielokątami przystającymi o bokach odpowiednio równoległych. Wszystkie pozostałe ściany, zwane bocznymi, są równoległobokami i razem wzięte tworzą *powierzchnię boczną* graniastosłupa czyli *pobocznice*. Całkowita powierzchnia graniastosłupa składa się z powierzchni bocznej i obu podstaw graniastosłupa.

**Wysokość graniastosłupa** jest to odcinek prostopadłej do płaszczyzn podstaw, zawarty między tymi płaszczyznami. Także długość tego odcinka, czyli wzajemna odległość płaszczyzn podstaw, jest nazywana wysokością graniastosłupa.

**Przekątna graniastosłupa** jest to odcinek łączący dwa wierzchołki nie leżące na jednej ścianie.

Gnaniastosłup nazywamy: *trójkątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym* itd., zależnie od liczby boków wielokąta stanowiącego jego podstawę.

Gnaniastosłup nazywamy **prostym**, jeśli jego krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw; w przeciwnym razie nazywamy go **pochyłym**.

**Równoległoscian** jest to graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok. Równoległoscian może być *prosty*, a wówczas wszystkie jego boczne ściany są prostokątami, może też być *pochyły*, a wówczas jego boczne ściany są równoległobokami lub prostokątami. Jednak każdą parę jego ścian przeciwnych można uznać za podstawy i zależnie od tego, którą parę oberzemy za podstawy, dany równoległoscian może się okazać prostym lub pochyłym.

**Prostopadłoscian** jest to równoległoscian, którego ściany są prostokątami.

**Sześcian** jest to prostopadłoscian, którego wszystkie krawędzie są równe.

Gnaniastosłup **prawidłowy** jest to graniastosłup prosty i mający za podstawę wielokąt foremny.

**Ostrosłup** (zob. 116) jest to wielościan, którego jedna ściana, zwana *podstawą ostrosłupa*, jest wielokątem, a pozostałe ściany, zwane *ścianami bocznymi* są trójkątami o wspólnym wierzchołku. Ostrosłup nazywamy *trójkątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *sześciokątnym* itd., zależnie od liczby boków jego podstawy. **Wierzchołek ostrosłupa** jest to wspólny wierzchołek jego ścian bocznych. Wśród krawędzi ostrosłupa rozróżniamy *krawędzie podstawy* i *krawędzie boczne*.

**Wysokość ostrosłupa** jest to odcinek poprowadzony z wierzchołka ostrosłupa prostopadłe do płaszczyzny podstawy. Także długość tego odcinka, czyli odległość wierzchołka ostrosłupa od płaszczyzny jego podstawy, jest nazywana wysokością ostrosłupa. *Spodkiem* wysokości ostrosłupa nazywamy rzut prostokątny wierzchołka

ka na płaszczyznę podstawy. Spodek wysokości może leżeć w obrębie podstawy lub poza nią.

Wszystkie ściany boczne ostrosłupa razem wzięte tworzą *powierzchnię boczną* ostrosłupa, czyli *pobocznice* ostrosłupa. *Całkowita powierzchnia* ostrosłupa składa się z powierzchni bocznej i podstawy ostrosłupa.

Ostrosłup nazywamy **prawidłowym**, gdy jego podstawą jest wielokąt foremny, a spodek wysokości leży w środku koła opisanego na podstawie. Stąd wynika już, że ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są trójkątami równoramiennymi, przystającymi jeden do drugiego.

**Piramida** jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny.

**Czworościan foremny** jest to czworościan, którego wszystkie cztery ściany są trójkątami równobocznymi, przystającymi do siebie wzajemnie. Można też powiedzieć, że czworościan foremny jest to ostrosłup trójkątny, prawidłowy, którego wszystkie krawędzie (zarówno krawędzie boczne, jak i krawędzie podstawy) są równe.

**Przekrój bryły** płaszczyzną jest to część wspólna płaszczyzny i bryły. W niektórych bryłach można wyróżnić szczególne przekroje, jak np.

1) przekrój *poprzeczny* graniastosłupa lub ostrosłupa, tj. przekrój danego graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną przecinającą wszystkie jego krawędzie boczne; przekrój poprzeczny może być równoległy lub nierównoległy do płaszczyzny podstawy;

2) przekrój *osiowy* walca lub stożka, tj. przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś symetrii walca lub stożka;

3) przekrój *przekątny* graniastosłupa lub ostrosłupa, tj. przekrój płaszczyzną przechodzącą przez dwie krawędzie nie należące do jednej ściany.

**Ostrosłup ścięty** jest to część ostrosłupa zawarta między jego podstawą a przekrojem poprzecznym. Ostrosłup ścięty ma dwie podstawy. Są nimi podstawa i przekrój poprzeczny tego ostrosłupa, z którego powstał ostrosłup ścięty. Całkowita powierzchnia ostrosłupa ściętego składa się więc z dwóch podstaw i ścian bocznych. Wszystkie ściany boczne, razem wzięte, tworzą *powierzchnię boczną*, czyli *pobocznice*.

Zależnie od tego, czy podstawy ostrosłupa ściętego są równoległe czy nierównoległe, mamy ostrosłup *ścięty równoległe* lub ostrosłup *ścięty nierównoległe*. Mówiąc w dalszym ciągu krótko: ostrosłup ścięty — będziemy mieli na myśli ostrosłup ścięty równoległe.

Podstawy ostrosłupa ściętego są wielokątami podobnymi. Większą z nich nazywamy zwykle *podstawą dolną*, a mniejszą — *podstawą górną*. Boczne ściany ostrosłupa ściętego są trapezami.

*Wysokość ostrosłupa ściętego* jest to odcinek prostopadły do płaszczyzn podstaw, zawarty między tymi płaszczyznami. Jeśli są znane wszystkie rozmiary ostrosłupa ściętego, to można obliczyć rozmiary części odciętej (odrzuconej).

*Przekątna ostrosłupa ściętego* jest to odcinek łączący dwa dowolne jego wierzchołki nie leżące na jednej ścianie.

Ostrosłup ścięty jest **prawidłowy**, jeśli stanowi część ostrosłupa prawidłowego. W ostrosłupie ściętym prawidłowym podstawy są wielokątami foremnymi, a odcinek łączący ich środki jest wysokością takiego ostrosłupa. Jego ściany boczne są trapezami równoramiennymi, a wszystkie krawędzie boczne są równe.

**Obelisk kwadratowy** jest to ostrosłup prawidłowy, ścięty, o obu podstawach kwadratowych.

**Nasyp ostry** jest to bryła wycięta z graniastosłupa trójkątnego dwoma przekrojami ukośnymi względem krawędzi bocznych. Za *podstawę nasypu ostrego* uważamy ścianę, która powstała z bocznej ściany graniastosłupa.

**Nasyp ścięty** jest to bryła, która powstaje przez ścięcie nasypu ostrego płaszczyzną równoległą do jego podstawy. Nasyp ścięty na ogół nie jest ostrosłupem ściętym, gdyż jego boczne krawędzie nie muszą po przedłużeniu przecinać się w jednym punkcie.

### Bryły obrotowe

**Figura obrotowa.** Niech będą dane w przestrzeni: prosta  $l$  i figura  $f$  zawarta w płaszczyźnie przechodzącej przez prostą  $l$ . Poddajmy figurę  $f$  obrotom dookoła  $l$  o wszelkie kąty obrotu  $\alpha$ ,  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ , i utwórzmy sumę  $F$  obrazów figury  $f$  przy tych obrotach. Figurę  $F$  nazywamy *figurą obrotową o osi  $l$  i tworzącej  $f$* .

Dla uproszczenia posłużyliśmy się tworzącą zawartą w płaszczyźnie przechodzącej przez oś figury obrotowej, ale tworzącą może być dowolna figura.

**Przykłady.** Jeśli  $f$  jest punktem nie leżącym na  $l$ , to  $F$  jest okręgiem. Jeśli  $f$  jest odcinkiem prostopadłym do  $l$  i nie mającym z  $l$  wspólnego punktu, to  $F$  jest pierścieniem kołowym. Jeśli  $f$  jest prostą równoległą do  $l$ , to  $F$  jest powierzchnią walcową (nieograniczoną). Jeśli  $f$  jest prostą przecinającą  $l$ , to  $F$  jest powierzchnią stożkową (nieograniczoną). Jeśli  $f$  jest parabolą o osi  $l$ , to  $F$  jest paraboloidą obrotową. Jeśli  $f$  jest okręgiem o średnicy zawartej w  $l$ , to  $F$  jest sferą. Jeśli  $f$  jest kołem o średnicy zawartej w  $l$ , to  $F$  jest kulą.

### Walec

**Walec obrotowy** lub krótko **walec** jest to bryła, która powstaje przy obrocie prostokąta dookoła jednego z jego boków.

Rozważmy prostokąt  $AOO'A'$  o bokach  $OA = O'A' = r$ ,  $AA' = OO' = h$ . Niech bok  $OO'$  będzie nieruchomy i niech prostokąt obraca się dookoła niego. Wówczas bok  $OA$  zakreśla koło  $k$  prostopadłe do osi  $OO'$ , o środku  $O$  i promieniu  $r$ . Koło  $k$  nazywamy *podstawą walca*, a jego promień  $r$  *promieniem walca*. Bok  $O'A'$  zakreśla drugie, takie samo koło, które jest *drugą podstawą walca*. Bok  $AA'$  zakreśla powierzchnię  $W$ , którą nazywamy *powierzchnią walcową* albo *powierzchnią boczną walca*. Prostą  $OO'$  nazywamy *osią walca*, a odległość podstaw  $OO' = h$  *wysokością walca*.

Każdy *przekrój osiowy walca*, tj. przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś walca, jest prostokątem, którego podstawą jest średnica walca, a wysokość jest równa wysokości walca. Boki tego prostokąta, równoległe do osi walca, nazywamy *tworzącymi walca*. Przekrój walca płaszczyzną prostopadłą do osi walca i przecinającą oś walca, nazywamy *przekrojem poprzecznym walca* (jest to koło przystające do podstawy walca).

**Graniastosłup** jest wpisany w walec, jeśli jego podstawy są wielokątami wpisanymi w podstawy walca.

**Płaszczyzna styczna do walca** jest to płaszczyzna poprowadzona przez styczną do podstawy walca i równoległa do jego osi. Płaszczyzna styczna do walca styka się z walcem wzdłuż jednej z tworzących walca.

**Graniastosłup** jest opisany na walcu, jeśli jego podstawy są wielokątami opisanymi na podstawach walca. Ściany boczne graniastosłupa opisanego na walcu są styczne z walcem i stykają się nim wzdłuż jego tworzących.

### Stożek

**Stożek obrotowy** lub krótko **stożek** jest to bryła ograniczona powierzchnią, która powstaje przy obrocie trójkąta prostokątnego dookoła jego przyprostokątnej.

Rozważmy trójkąt  $AOS$  o kącie prostym przy  $O$ , o przyprostokątnych  $OA = r$ ,  $OS = h$  i o przeciwprostokątnej  $AS = l$ . Niech bok  $\overline{OS}$  będzie nieruchomy i niech trójkąt obraca się dookoła niego. Wówczas bok  $OA$  zakreśla koło  $k$  prostopadłe do osi  $OS$  o środku  $O$  i promieniu  $r$ . Koło to nazywamy *podstawą stożka*, a jego promień  $r$  *promieniem stożka*. Przeciwprostokątna  $\overline{AS}$  zakreśla powierzchnię zwaną *powierzchnią stożkową* albo *powierzchnią boczną stożka*. Punkt  $S$  nazywamy *wierzchołkiem stożka*, a jego odległość od podstawy stożka  $OS = h$  nazywamy *wysokością stożka*.

Każdy *przekrój osiowy stożka*, tj. przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś stożka, jest trójkątem równoramiennym o podstawie równej średnicy stożka i o wysokości równej wysokości stożka. Jego ramiona nazywamy *tworzącymi stożka*. Są one nachylone pod kątem  $\alpha = \angle ASO$  do osi stożka, a kąt między nimi  $2\alpha$  nazywamy *kątem rozwarcia stożka*. Kąt rozwarcia stożka jest to więc kąt między dwiema tworzącymi stożka w przekroju osiowym.

Przekrój stożka płaszczyzną prostopadłą do osi stożka i przecinającą oś stożka nazywamy *przekrojem poprzecznym stożka* (jest to koło o średnicy zależnej od odległości płaszczyzny przekroju od wierzchołka stożka).

**Ostrosłup** jest wpisany w stożek, jeśli jego podstawa jest wielokątem wpisanym w podstawę stożka, a jego wierzchołek pokrywa się z wierzchołkiem stożka.

**Płaszczyzna styczna do stożka** jest to płaszczyzna poprowadzona przez styczną do podstawy stożka i przez jego wierzchołek. Płaszczyzna styczna do stożka styka się ze stożkiem wzdłuż jednej z jego tworzących.

**Ostrosłup** jest opisany na stożku, jeśli jego podstawa jest wielokątem opisanym na podstawie stożka, a jego wierzchołek jest identyczny z wierzchołkiem stożka.

**Stożek ścięty** jest to część stożka zawarta pomiędzy podstawą stożka i przekrojem poprzecznym.

### Kula

**Powierzchnia kulista**, czyli **sfera**, jest to powierzchnia, która powstaje przy obrocie okręgu dookoła jego średnicy. Promień  $r$  tego okręgu nazywamy *promieniem kuli*, a środek  $O$  tego okręgu, który w czasie obrotu nie zmienia swego położenia, stanowi *środek kuli*.

Powierzchnia kulista jest miejscem geometrycznym punktów przestrzeni odległych od stałego punktu  $O$  o daną odległość  $r$ . Punkty, których odległość od  $O$  jest mniejsza od  $r$ , nazywamy *wewnętrznymi*, punkty zaś, których odległość od  $O$  jest większa od  $r$ , nazywamy *zewnętrznymi*.

**Kula** jest to bryła ograniczona powierzchnią kulistą. Kula składa się z punktów leżących na powierzchni kulistej i punktów wewnętrznych.

**Kula i płaszczyzna**. Jeśli płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, to przecina ją i w przekroju otrzymujemy koło o promieniu równym promieniowi kuli. Takie koło nazywamy *kołem wielkim* danej kuli.

Jeśli odległość płaszczyzny od środka kuli jest dodatnia i mniejsza od promienia kuli, to płaszczyzna przecina kulę i w przekroju otrzymujemy koło o promieniu mniejszym od promienia kuli. Takie koło nazywamy *kołem małym* danej kuli.

Jeśli odległość płaszczyzny od środka kuli jest równa promieniowi kuli, to płaszczyzna taka ma tylko jeden punkt wspólny z powierzchnią kuli. Płaszczyznę taką nazywamy *płaszczyzną styczną do kuli*, a jej punkt wspólny z kulą — *punktem styczności*. Płaszczyzna styczna do kuli jest w punkcie styczności prostopadła do promienia kuli.

Jeśli odległość płaszczyzny od środka kuli jest większa od promienia kuli, to płaszczyzna taka nie ma punktów wspólnych z kulą.

**Kula i prosta**. Jeśli prosta przechodzi przez środek kuli, to przecina jej powierzchnię w dwóch punktach. Odcinek łączący te punkty ma długość  $2r$ ; nazywamy go *średnicą kuli*.

Jeśli prosta nie przechodzi przez środek kuli, a jej odległość od środka kuli jest mniejsza od promienia kuli, to taka prosta ma wspólny z kulą odcinek, który jest krótszy od średnicy.

Jeśli odległość prostej od środka kuli jest równa promieniowi kuli, to taka prosta ma tylko jeden punkt wspólny z powierzchnią kuli i nazywa się *prostą styczną do kuli*, a jej punkt wspólny z kulą — *punktem styczności*. Prosta styczna do kuli jest prostopadła w punkcie styczności do promienia kuli. Wszystkie proste styczne do kuli w danym punkcie tworzą płaszczyznę styczną do kuli.

**Bryły wpisane w kulę.** Wielościan nazywamy wpisanym w kulę, jeśli wszystkie jego wierzchołki leżą na powierzchni kuli.

**Walec** nazywamy wpisanym w kulę, jeśli okręgi jego podstaw leżą na powierzchni kuli.

**Stożek** nazywamy wpisanym w kulę, jeśli okrąg jego podstawy oraz jego wierzchołek leżą na powierzchni kuli.

**Bryły opisane na kuli.** Wielościan nazywamy opisanym na kuli, jeśli środek kuli jest punktem wewnętrznym wielościanu, a płaszczyzny ścian są styczne do kuli.

**Walec** nazywamy opisanym na kuli, jeśli jego podstawy oraz jego tworzące są styczne do kuli.

**Stożek** nazywamy opisanym na kuli, jeśli jego podstawa oraz jego tworzące są styczne do kuli.

Zamiast mówić *bryła opisana na kuli*, mówi się też *kula wpisana w bryłę*.

**Odcinek kulisty i czasza.** Jeśli płaszczyzna przecina kulę, to część wspólną tej kuli i półprzestrzeni domkniętej wyznaczonej przez tę płaszczyznę nazywamy *odcinkiem kulistym*. Jednocześnie część wspólną sfery ograniczającej daną kulę i półprzestrzeni domkniętej wyznaczonej przez tę płaszczyznę nazywamy *czaszą*.

Płaszczyzna przecinająca kulę wyznacza dwa odcinki kuliste, których sumą jest kula, a iloczynem koło, oraz dwie czasze, których sumą jest sfera, a iloczynem okrąg. O płaszczyźnie przecinającej kulę mówimy krótko, że *dzieli kulę na dwa odcinki kuliste* oraz że *dzieli sferę na dwie czasze*.

Przez *promień odcinka kulistego*, względnie *czaszy*, rozumiemy promień kuli, z której dany odcinek kulisty został odcięty, względnie promień sfery, z której dana czasza została odcięta. Przez *wysokość odcinka kulistego* i *wysokość czaszy* rozumiemy odcinek będący iloczynem dwóch figur, a mianowicie średnicy kuli, prostopadłej do płaszczyzny przekroju i odcinka kulistego.

Jeśli płaszczyzna przecinająca kulę przechodzi przez środek kuli, to oba odcinki kuliste są *półkulami*, a obie czasze są *powierzchniami półkulistymi (półsferami)*.

**Warstwa kulista i pas kulisty.** Jeśli dwie płaszczyzny równoległe, różne przecinają kulę, to zbiór punktów kuli znajdujących się między tymi płaszczyznami lub na tych płaszczyznach nazywa się *warstwą kulistą*. Jednocześnie zbiór punktów sfery znajdujących się między tymi płaszczyznami lub na tych płaszczyznach nazywa się *pasem sferycznym*. (Używane są też nazwy: *warstwa sferyczna* i *pas kulisty*). Brzeg warstwy kulistej jest sumą pasa sferycznego i dwóch kół stanowiących przekroje kuli.

**Wycinek kuli.** Obierzmy na powierzchni kuli dowolną czaszę i przez okrąg ograniczający tę czaszę poprowadźmy powierzchnię stożkową, której wierzchołkiem niech będzie środek kuli. Część kuli ograniczona czaszą i powierzchnią stożkową nazywa się *wycinkiem kuli*. Wycinek kuli jest sumą odcinka kulistego i stożka. Tak określony wycinek kuli nazywamy niekiedy *pełnym*, w odróżnieniu od wycinka kuli

rozumianego bardziej ogólnie: jako część kuli ograniczoną pasem sferycznym i dwiema powierzchniami stożkowymi poprowadzonymi przez okręgi ograniczające ten pas sferyczny i mającymi wierzchołek w środku kuli.

### Wielościany foremne

*Wielościanem foremnym* nazywamy wielościan, którego wszystkie ściany są wielokątami foremnymi, przystającymi wzajemnie, a wszystkie kąty dwuścienne utworzone przez sąsiednie ściany są równe.

Istnieje pięć wielościanów foremnych (rys. 126-1). Wymieniamy je, podając w nawiasach ich greckie nazwy. Są to:

1) **czworościan (tetraeder)** — ma on 4 ściany trójkątne, 4 wierzchołki, 6 krawędzi, w każdym narożu schodzą się 3 ściany;

2) **sześciąt (heksaeder)** — ma 6 ścian kwadratowych, 8 wierzchołków, 12 krawędzi, w każdym narożu schodzą się 3 ściany;

3) **ośmiościan (oktaeder)** — ma 8 ścian trójkątnych, 6 wierzchołków, 12 krawędzi, w każdym narożu schodzą się 4 ściany;

4) **dwunastościan (dodekaeder)** — ma 12 ścian pięciokątnych, 20 wierzchołków, 30 krawędzi, w każdym narożu schodzą się 3 ściany;

5) **dwudziestościan (ikosaeder)** — ma 20 ścian trójkątnych, 12 wierzchołków, 30 krawędzi, w każdym narożu schodzi się 5 ścian.

Najprostszą figurą, która może być ścianą wielościanu foremnego, jest trójkąt foremny. Jego kąt wynosi  $60^\circ$ , a ponieważ suma wszystkich kątów płaskich wchodzących w skład jednego naroża musi być mniejsza od  $360^\circ$ , więc naroże zbudowane z trójkątów foremnych może zawierać albo

trzy kąty płaskie po  $60^\circ$  ( $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$ ) albo

cztery kąty płaskie po  $60^\circ$  ( $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$ ) albo

pięć kątów płaskich po  $60^\circ$  ( $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$ )

a zatem z trójkątów można zbudować nie więcej niż trzy naroża foremne.

Odpowiednimi wielościanami foremnymi są czworościan, ośmiościan i dwudziestościan.

Z kwadratów można zbudować tylko naroże zawierające

trzy kąty płaskie po  $90^\circ$  ( $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$ )

Odpowiednim wielościanem foremnym jest sześciąt.

Z pięciokątów foremnych, mających kąty po  $108^\circ$ , można zbudować tylko naroże zawierające

trzy kąty płaskie po  $108^\circ$  ( $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$ )

Odpowiednim wielościanem foremnym jest dwunastościan.

Z sześciokątów mających kąty po  $120^\circ$  nie można zbudować naroża, gdyż już trójkrotność  $120^\circ$  jest równa  $360^\circ$ . Tym bardziej z wielokątów foremnych o większej liczbie boków naroża zbudować nie można, gdyż wielokąty takie mają kąty większe od  $120^\circ$ .

Między wielościanami foremnymi istnieje wzajemna odpowiedniość. Łącząc środki ścian sześcianu otrzymujemy ośmiościan i na odwrót, łącząc środki ścian ośmiościanu otrzymujemy sześcián. Podobny związek jest między dwudziestościanem a dwunastościanem. Łącząc środki ścian czworościanu otrzymujemy znów czworościan.

| Wielościan foremny | Promień kuli opisanej               | Promień kuli wpisanej                                  | Objętość                         |
|--------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Czworościan        | $\frac{1}{4} a \sqrt{6}$            | $\frac{1}{12} a \sqrt{6}$                              | $\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$      |
| Sześcián           | $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$            | $\frac{1}{2} a$                                        | $a^3$                            |
| Ośmiościan         | $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$            | $\frac{1}{6} a \sqrt{6}$                               | $\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$       |
| Dwunastościan      | $\frac{1}{4} a \sqrt{18+6\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{4} a \sqrt{2} \sqrt{5+\frac{11}{5}\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{4} a^3 (15+7\sqrt{5})$ |
| Dwudziestościan    | $\frac{1}{4} a \sqrt{10+2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{12} a \sqrt{3} (3+\sqrt{5})$                 | $\frac{5}{12} a^3 (3+\sqrt{5})$  |

Liczby podane w tej tabelce można wyliczyć przy pomocy twierzeń geometrii elementarnej, dla pierwszych trzech brył dość łatwo, dla dwóch ostatnich rachunek jest bardziej zawiły;  $a$  — krawędź wielościanu. Uczenie się tych wzorów na pamięć jest zbędne.

Wielościany foremne zwane są też *bryłami Platona*. Niektóre minerały krystalizują w postaci wielościanów foremnych, np. magnetyt i alun w postaci ośmiościanów, sól kuchenna w postaci sześciánów.

**Symetria figury.** Każdą izometrię, która przekształca daną figurę w tę samą figurę nazywamy *symetrią figury*. Symetria figury może być symetrią płaszczyznową, osiową, środkową, ale może też być symetrią  $n$ -tego rzędu (def. 123.3) lub inną izometrią (także tożsamościową).

*Wszystkie symetrie danej figury tworzą grupę.*

**Przykłady.** Ostrosłup prawidłowy pięciokątny ma 5 symetrii; są to obroty opisane w przykładzie na str. 292.

Walec ma nieskończenie wiele symetrii; są to obroty dookoła osi walca o dowolny kąt oraz symetria względem płaszczyzny poprowadzonej prostopadle do osi walca w połowie jego wysokości.

Czworościan foremny ma 24 symetrii.

Sześcián ma 48 symetrii.

*Dowolny wielościan ma skończoną liczbę symetrii, która nie może być większa od  $k!$ , gdzie  $k$  oznacza liczbę wierzchołków wielościanu. Dowód:* Dowolna symetria wielościanu przyporządkowuje wierzchołkom  $A_1, A_2, \dots, A_k$  pewną permutację tych wierzchołków, a liczba permutacji  $k$  elementów równa się  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k = k!$

## Rozdział XX

# OBJĘTOŚĆ BRYŁY I POLE POWIERZCHNI

## 127. Pojęcie objętości

**Ogólne określenie objętości.** Niech będzie dany pewien zbiór figur. *Objętością* figury nazywamy funkcję, która każdej figurze  $f$  należącej do danego zbioru figur przyporządkowuje liczbę nieujemną

$$V(f)$$

zwaną *objętością figury  $f$* , określoną w taki sposób, aby spełnione były warunki:

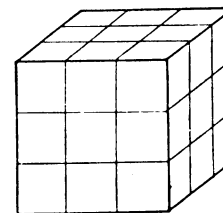
- 1 — figury przystające mają objętości równe;
- 2 — figura będąca sumą dwóch figur nie mających wspólnych punktów wewnętrznych ma objętość równą sumie objętości figur składowych.

**Jednostka objętości.** Jeśli odcinek  $u$  jest jednostką długości, to sześcián o krawędzi  $u$  nazywamy *jednostką objętości* albo *sześciánem jednostkowym* i oznaczamy

$$u^3$$

Przyjmujemy, że sześcián taki ma objętość równą 1.

Jeśli każdą krawędź sześcianu jednostkowego podzielimy na  $k$  równych części i przez punkty podziału poprowadzimy płaszczyzny równoległe do ścian sześcianu, to podzielimy ten sześcián na  $k^3$  przystających sześciánów (na rys. 127-1 jest  $k = 3$ )



Rys. 127-1

i, zgodnie z warunkiem 2, każdemu z nich przypiszemy objętość równą  $1/k^3$ ; sześcian o krawędzi  $\frac{1}{k} \bar{u}$  ma objętość

$$\frac{1}{k^3} \bar{u}^3$$

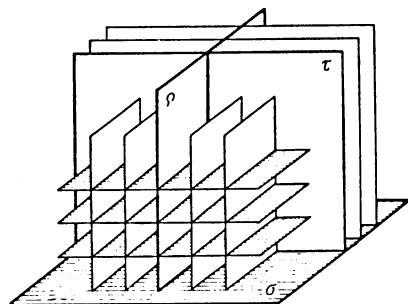
(w tym wyrażeniu  $1/k^3$  jest liczbą wymiarową objętości, zaś  $\bar{u}^3$  jest jednostką objętości, której odpowiada dana liczba wymiarowa); sześcian ten jest jednostką objętości pochodzącą od jednostki podstawowej  $\bar{u}^3$ .

Z kolei, dzieląc krawędzie tego sześcianu na  $k$  części, otrzymamy następną jednostkę objętości

$$\frac{1}{k^6} \bar{u}^3$$

W systemie metrycznym przyjmuje się  $k = 10$ ; jednostkami objętości są:  $\text{cm}^3$ ,  $\text{mm}^3 = 0,001 \text{ cm}^3$  itd.

**Siec sześcienna.** Obierzmy w przestrzeni trzy płaszczyzny  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  wzajemnie prostopadłe i utwórzmy zbiór płaszczyzn, zaliczając do niego każdą płaszczyznę równoległą do jednej z trzech płaszczyzn  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  i odległą od niej o dowolną całkowitą wielokrotność  $\bar{u}$ . Zbiór ten nazwiemy *siecią sześcienną o odstępach  $\bar{u}$* . Sieć ta dzieli przestrzeń na sześciany o objętości jednostkowej. Sieć tę będziemy nazywali *siecią wyjściową* i oznaczali  $S_0$  (rys. 127-2).



Rys. 127-2

Następnie na sieć wyjściową nakładamy sieć sześcienną o odstępach  $\frac{1}{k} \bar{u}$  utworzoną z płaszczyzn równoległych do  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  i takich aby  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  były płaszczyznami tej sieci. Sieć tę oznaczmy  $S_1$ .

Podobnie tworzymy sieć  $S_2$  o odstępach  $\frac{1}{k^2} \bar{u}$ , sieć  $S_3$  o odstępach  $\frac{1}{k^3} \bar{u}$ . Otrzymujemy w ten sposób nieskończony ciąg sieci

$$S_n \text{ o odstępach } \frac{1}{k^n} \bar{u}$$

Sieci te dzielą przestrzeń na coraz to mniejsze sześciany.

**Objętość dowolnej figury.** Niech będzie dana ograniczona figura przestrzenna  $f$ . Nakładamy na nią sieć sześcienną  $S_0$  i wyznaczamy liczbę  $w_0$  sześcianów tej sieci zawartych w figurze  $f$  oraz liczbę  $z_0$  sześcianów tej sieci pokrywających figurę  $f$ , tj. sześcianów zawierających co najmniej jeden punkt figury  $f$ . Liczby te możemy nazwać *przybliżeniem dolnym* i *przybliżeniem górnym* objętości figury  $f$  (aczkolwiek zastrzegamy się, że nie dla każdej figury  $f$  musi istnieć objętość).

Następnie powtarzamy to, posługując się sieciami sześciennymi  $S_1, S_2, \dots$ . Otrzymujemy w ten sposób dwa ciągi przybliżeń objętości

| Siec    | Przybliżenie dolne | Przybliżenie górne |
|---------|--------------------|--------------------|
| $S_0$   | $w_0$              | $z_0$              |
| $S_1$   | $w_1$              | $z_1$              |
| $S_2$   | $w_2$              | $z_2$              |
| $\dots$ | $\dots$            | $\dots$            |
| $S_n$   | $w_n$              | $z_n$              |
| $\dots$ | $\dots$            | $\dots$            |

Miedzy liczbami  $w_n$  i  $z_n$  zachodzą związki

$$w_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq z_n \leq \dots \leq z_2 \leq z_1 \leq z_0$$

Ciąg  $w_n$  jest niemalejący i ograniczony, ciąg  $z_n$  jest nierosnący i ograniczony, a zatem ciągi te są zbieżne

$$\lim w_n = w(f) \quad \lim z_n = z(f)$$

Granice te istnieją zawsze i mają nazwy:

$w(f)$  — wewnętrzna miara objętościowa figury  $f$ ;

$z(f)$  — zewnętrzna miara objętościowa figury  $f$ .

Zawsze jest  $w(f) \leq z(f)$ . Jeśli dla danej figury  $f$  okaże się, że  $w(f) = z(f)$ , to wspólną ich wartość

$$V(f) = \lim w_n(f) = \lim z_n(f)$$

nazywamy *miarą objętościową* lub *objętością* figury  $f$ . Figurę  $f$  nazywamy wówczas *mierzalną*.

**Własności objętości.** Udowodniono, że tak określona objętość:

- nie zależy od położenia sieci wyjściowej;
- posiada ogólne własności 1 i 2 wymienione na wstępie;
- przy zastąpieniu jednostki długości  $\bar{u}$  jednostką  $\bar{v}$  mniejszą  $s$  razy,  $u = s \cdot v$ , objętość figury zwiększa się  $s^3$  razy, np.  $2 \text{ cm}^3 = 2000 \text{ mm}^3$ ; inaczej mówiąc: *jeśli zamiennikiem długości jest liczba  $s$ , to zamiennikiem objętości jest liczba  $s^3$* ;
- objętość prostopadłościanu, którego krawędzie zbiegające się w jednym narożu mają długość  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , jest równa iloczynowi  $abc$ ;
- jeśli figury  $f$  i  $f'$  mają objętości i jeśli  $f \subset f'$ , to  $V(f) \leq V(f')$ ;
- każda figura zawarta w płaszczyźnie ma objętość równą 0;
- każda powierzchnia wielościenna ma objętość równą 0;
- każda sfera i każda część sfery ma objętość równą 0;
- każda ograniczona część powierzchni stożkowej lub walcowej ma objętość równą 0;

- jeśli brzeg figury  $f$  ma objętość 0, to figura  $f$  jest mierzalna, czyli ma objętość;
- każda figura ograniczona, której brzeg składa się ze skończenie wielu figur płaskich, części sfer lub części powierzchni stożkowych i walcowych, jest mierzalna;
- brzeg dowolnej figury wypukłej i ograniczonej ma objętość 0, zatem *każda figura wypukła i ograniczona jest mierzalna*;
- jeśli figura  $f$  ma objętość, a figura  $f'$  jest podobna do  $f$  w skali  $s$ , to

$$V(f') = s^3 V(f)$$

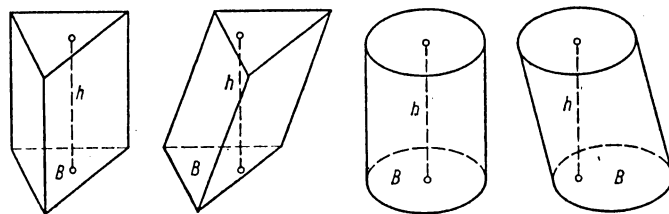
inaczej mówiąc: *podobieństwo w skali  $s$  zmienia objętość figury w skali  $s^3$ .*

## 128. Objętość graniastoslupa i walca

**Objętość dowolnego graniastoslupa (prostego lub pochyłego) oraz walca (prostego lub pochyłego) jest równa iloczynowi pola podstawy przez wysokość.** Oznaczając pole podstawy literą  $B$ , a wysokość literą  $h$ , mamy wzór na objętość

$$V = Bh \quad (128.1)$$

Wzór ten stosuje się do wszelkich graniastoslupów i walców (rys. 128-1). Każda z tych brył charakteryzuje się tym, że jej przekrój dowolną płaszczyzną równoległą



Rys. 128-1

do płaszczyzny podstawy jest przystający do podstawy. Pole podstawy obliczamy w każdym przypadku wzorem dobranym stosownie do kształtu podstawy, np.

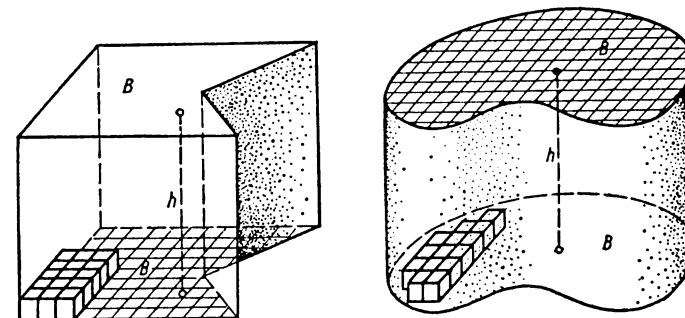
- jeśli podstawa jest kwadratem o boku  $a$ , to  $B = a^2$ ;
- jeśli podstawa jest trójkątem równobocznym o boku  $a$ , to  $B = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ ;
- jeśli podstawa jest kołem o promieniu  $r$ , to  $B = \pi r^2$ .

Odnosnie wysokości  $h$  bryły zauważamy, że

- jeśli bryła jest graniastoslupem prostym, to wysokość równa się krawędzi bocznej;
- jeśli bryła jest walcem prostym, to wysokość równa się tworzącej;
- jeśli bryła jest graniastoslupem pochyłym lub walcem pochyłym, to wysokość trzeba obliczyć na podstawie danych zawartych w sformułowaniu zadania.

**Dowód wzoru (128.1).** Przedstawimy tylko myśl przewodnią dowodu. Wprowadźmy sieć sześcienną taką, aby podstawa bryły leżała w jednej z płaszczyzn sieci. Za-

łożmy, że sześciany sieci są już dość drobne, np. że są to milimetry sześciennie (rys. 128-2). Wówczas w jednej warstwie sześcianów pokrywających podstawę bryły znajduje się w przybliżeniu tyle milimetrów sześciennych – ile milimetrów kwadratowych wynosi pole podstawy; a więc łączna objętość sześcianów tej warstwy w przybliżeniu równa się  $B$ . Przybliżenie jest tym lepsze, im drobniejsze są sześciany sieci.



Rys. 128-2

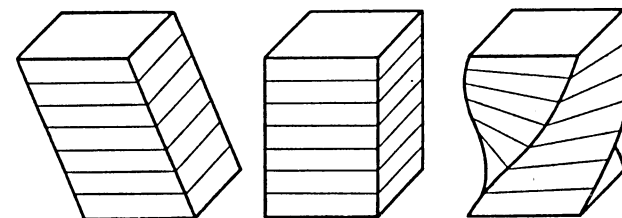
Na tej pierwszej warstwie spoczywa druga warstwa sześcianów sieci (czego już na rys. 128-2 nie pokazano), następnie trzecia, czwarta itd. W bryle zmieści się warstw takich w przybliżeniu tyle, ile wynosi wysokość bryły. I znowu przybliżenie to jest tym lepsze im drobniejsze są sześciany sieci.

Przybliżenie objętości  $V$  jest więc iloczynem przybliżenia pola podstawy  $B$  i przybliżenia wysokości  $h$ . Gdy odstęp sieci maleje do zera, każde z tych przybliżeń dąży do swej granicy. Zatem  $V = Bh$ .

Powyższe rozumowanie odnoszące się do graniastoslupów i walców prostych, można rozszerzyć na graniastoslupy i walce pochyłe, a nawet na niektóre inne bryły, korzystając z twierdzenia zwanego **zasadą Cavalieriego**.

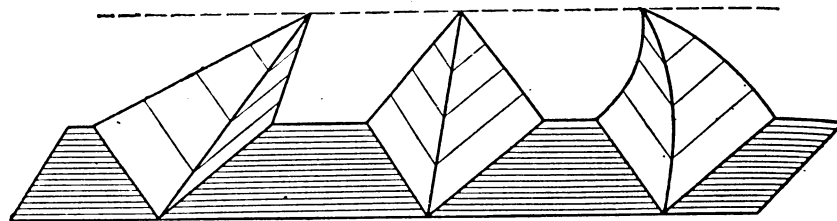
**Zasada Cavalieriego.** Jeśli dwie bryły zawarte między dwiema równoległymi płaszczyznami mają tę własność, że ich przekroje dowolną płaszczyzną równoległą do poprzednich dwóch płaszczyzn są równe, to bryły te mają równe objętości (rys. 128-3).

Zasada Cavalieriego stosuje się także, gdy przekroje jednej bryły różnią się między sobą, byle odpowiednie przekroje w dwóch porównywanych bryłach były takie



Rys. 128-3. Bryły o odpowiednich przekrojach równych mają równe objętości

same. Na rys. 128-4 widzimy dwa ostrosłupy o równych podstawach i równych wysokościach oraz pewną bryłę nieregularną. Podstawy tych trzech brył leżą w jednej płaszczyźnie i ich wierzchołki leżą w jednej płaszczyźnie. Przecinając te dwa ostrosłupy



Rys. 128-4. Bryły o odpowiednich przekrojach równych mają równe objętości

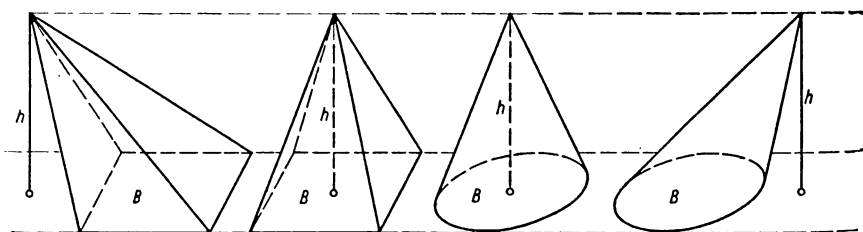
słupy dowolną płaszczyzną równoległą do ich podstaw, otrzymamy przekroje o równych polach. Załóżmy, że i trzecia bryła ma przekroje równe tamtym przekrojom. Wówczas wszystkie trzy bryły mają równe objętości.

## 129. Objętość ostrosłupa i stożka

**Objętość dowolnego ostrosłupa lub stożka (prostego lub pochyłego) jest równa trzeciej części iloczynu pola podstawy i wysokości.** Oznaczając pole podstawy literą  $B$ , a wysokość literą  $h$ , mamy wzór na objętość

$$V = \frac{1}{3} Bh \quad (129.1)$$

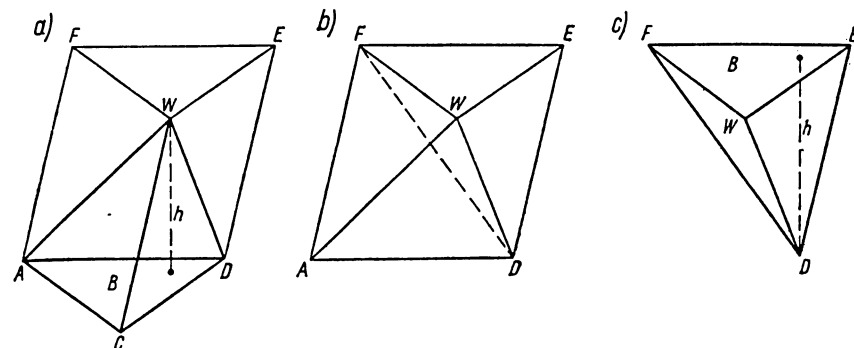
Wzór ten stosuje się do wszelkich ostrosłupów i stożków (rys. 129-1).



Rys. 129-1

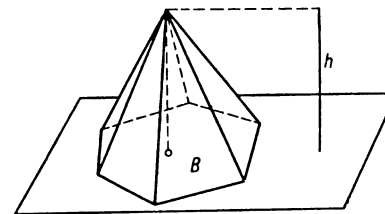
**Dowód** wzoru (129.1) dla ostrosłupa trójkątnego. Niech będzie dany dowolny ostrosłup trójkątny  $T$  o wierzchołkach  $A, D, C, W$ , o podstawie  $B$ , wysokości  $h$  i objętości  $V$  (rys. 129-2a). Budujemy graniastosłup trójkątny  $G$ , którego podstawą jest podstawa ostrosłupa  $T$ , a jedną z krawędzi bocznych – krawędź ostrosłupa  $T$ . Wykażemy, że objętość graniastosłupa  $G$  jest trzykrotnością objętości ostrosłupa  $T$ , a tym samym wykażemy prawdziwość wzoru (129.1) dla ostrosłupa trójkątnego.

Różnica  $G-T$  jest ostrosłupem czworokątnym o wierzchołku  $W$  (rys. 129-2b). Płaszczyzna  $FWD$  dzieli go na dwa ostrosłupy trójkątne  $AFDW$  i  $EFDW$  o jednakowych podstawach  $AFD$  i  $EFD$  i wspólnym wierzchołku  $W$ . Ostrosłupy te mają równe objętości. Ale w ostrosłupie  $EFDW$  można ścianę  $EFW$  uważać za podstawę



Rys. 129-2. a) Ostrosłup  $ACDW$  jako część graniastosłupa  $ACDEFW$ , b) różnica graniastosłupa i ostrosłupa, c) połowa tej różnicy jest ostrosłupem  $EFDW$  o takiej samej podstawie i takiej samej wysokości, co ostrosłup  $ACDW$

(rys. 129-2c), a punkt  $D$  za wierzchołek, a wtedy widać, że ostrosłup ten ma podstawę i wysokość takie same, jak dany ostrosłup  $ACDW$ , a więc ma też i objętość taką samą. Zatem wszystkie trzy ostrosłupy  $ACDW$ ,  $AFDW$  i  $EFDW$  mają objętości równe, a że w sumie dają graniastosłup o objętości  $Bh$ , więc każdy z nich ma objętość równą  $\frac{1}{3} Bh$ , c.n.u.

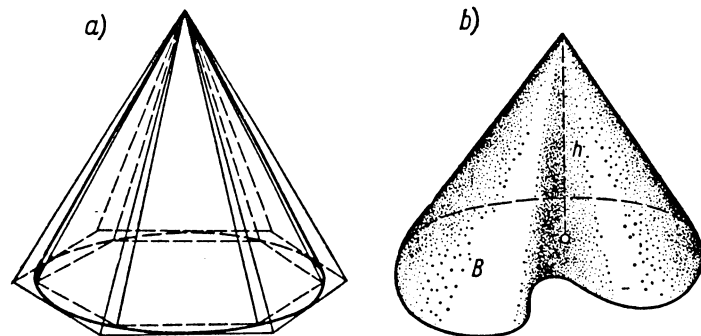


Rys. 129-3

**Dowód** dla ostrosłupa wielokątnego (rys. 129-3). Płaszczyznami przechodzącymi przez wierzchołek i przekątne podstawy dzielimy dowolny ostrosłup wielokątny  $T$  na ostrosłupy trójkątne  $T_1, T_2, \dots$  o podstawach  $B_1, B_2, \dots$  i wspólnej wysokości  $h$

$$\begin{aligned} V(T) &= V(T_1) + V(T_2) + \dots = \frac{1}{3} B_1 h + \frac{1}{3} B_2 h + \dots = \\ &= \frac{1}{3} (B_1 + B_2 + \dots) h = \frac{1}{3} Bh \end{aligned}$$

**Dowód dla stożka.** Niech będzie dany stożek kołowy o podstawie  $B$  i wysokości  $h$ . Do podstawy  $B$  można dobrać dwa wieloboki: jeden wpisany, drugi opisany, których pola różnią się dowolnie mało. Łącząc obwody tych wieloboków z wierzchołkiem stożka, otrzymujemy dwa ostrosłupy: jeden wpisany w stożek, drugi opisany na stożku, których objętości różnią się dowolnie mało (rys. 129-4a). Obję-



Rys. 129-4. a) Stożek z ostrosłupem wpisanym i opisany; b) figura typu stożka

tości tych ostrosłupów są przybliżeniami: dolnym i górnym – objętości stożka, podobnie jak pola ich podstaw są przybliżeniami dolnym i górnym pola podstawy stożka. Ponieważ objętość każdego z tych ostrosłupów jest  $1/3$  iloczynu pola podstawy i wysokości, więc i objętość stożka musi się tak wyrażać, co dowodzi prawdziwości wzoru (129.1).

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla figury typu stożka (rys. 129-4b), do której także stosuje się wzór (129.1).

W przypadku stożka kołowego, którego podstawa jest kołem o promieniu  $r$ , mamy  $B = \pi r^2$ , zatem objętość stożka kołowego o promieniu  $r$  i wysokości  $h$  wynosi

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (129.2)$$

**Stosunki odcinków, pól i objętości.** Rozważmy w przestrzeni dwa trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  jednokładne względem punktu  $O$  jako środka jednokładności (rys. 129-5). Odcinki odpowiadające sobie pozostają w takim stosunku jak odległości odpowiadających sobie punktów tych trójkątów od środka jednokładności. Oznaczmy ten stosunek literą  $k$ .

Liczba  $k$  nazywa się *stosunkiem jednokładności* trójkątów  $A'B'C'$  i  $ABC$ , i wyraża, ile razy liniowe rozmiary trójkąta  $A'B'C'$  są większe od odpowiednich rozmiarów trójkąta  $ABC$  oraz ile razy odległość trójkąta  $A'B'C'$  od środka jednokładności jest większa niż odległość trójkąta  $ABC$  od środka jednokładności.

Jest więc  $\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h} = k$ , czyli  $a' = ka$ ,  $h' = kh$ . Obliczmy pola tych trójkątów.

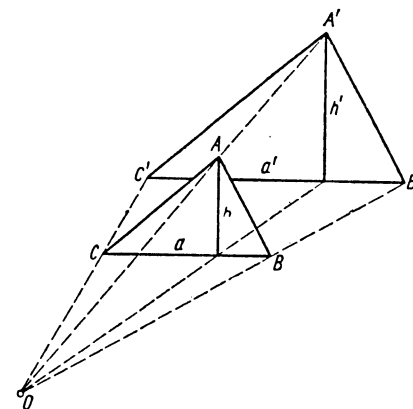
Jest

$$S = \frac{1}{2} ah, \quad S' = \frac{1}{2} a'h' = \frac{1}{2} (ka)(kh) = k^2 \left( \frac{1}{2} ah \right) = k^2 S$$

pola tych trójkątów pozostają w stosunku  $k^2$

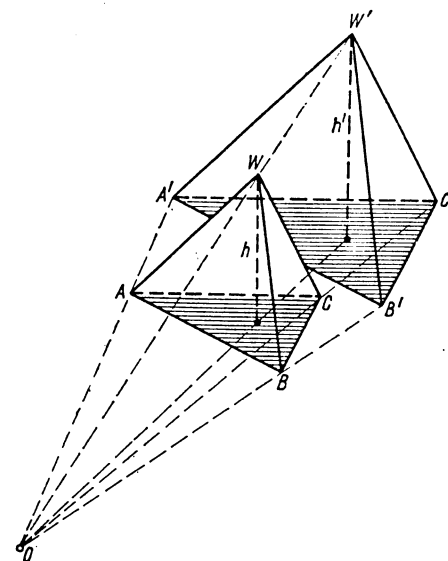
$$\frac{S'}{S} = k^2 \quad (129.3)$$

Podobnie można udowodnić, że dowolne dwie figury, jednokładne w stosunku  $k$ , mają pola tworzące stosunek  $k^2$ . Jeśli przesunąć jedną z tych figur, to jednokładność



Rys. 129-5

zniknie, ale podobieństwo w stosunku  $k$  pozostanie i pola nadal będą tworzyć stosunek  $k^2$ . Mamy więc twierdzenie: *Dowolne dwie figury, podobne w stosunku  $k$ , mają pola tworzące stosunek  $k^2$ .*



Rys. 129-6

Rozważmy w przestrzeni dwa czworościany  $ABCW$  i  $A'B'C'W'$ , jednokładne względem punktu  $O$  jako środka jednokładności (rys. 129-6) i niech  $k$  będzie stosunkiem ich jednokładności. Wówczas wysokości ich  $h'$  i  $h$  pozostają w stosunku  $k$ , zaś pola ich podstaw  $S'$  i  $S$  w stosunku  $k^2$ . Obliczmy ich objętości

$$V = \frac{1}{3} Sh, \quad V' = \frac{1}{3} S'h' = \frac{1}{3} (k^2 S)(kh) = k^3 \left( \frac{1}{3} Sh \right) = k^3 V$$

Objętości tych czworościanów pozostają w stosunku  $k^3$

$$\frac{V'}{V} = k^3 \quad (129.4)$$

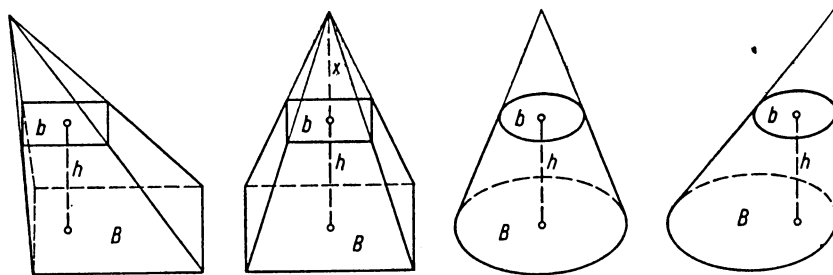
Dla przykładu, jeśli na rys. 129-6 liniowe rozmiary czworościanu  $A'B'C'W'$  są 1,5 raza większe od liniowych rozmiarów czworościanu  $ABCW$ , to pola jego ścian, a także przekrojów, są  $1,5^2 = 2,25$  raza większe od pól odpowiednich ścian względnie przekrojów czworościanu  $ABCW$ , objętość zaś czworościanu  $A'B'C'W'$  jest  $1,5^3 = 3,375$  raza większa od objętości czworościanu  $ABCW$ .

Mamy twierdzenie: *Dowolne dwie bryły, podobne w stosunku  $k$ , mają objętości tworzące stosunek  $k^3$ .*

### Obliczanie objętości ostrosłupów i stożków ściętych

Objętość dowolnego ostrosłupa ściętego lub stożka ściętego (rys. 129-7) o podstawach  $B$ ,  $b$  i wysokości  $h$  jest dana wzorem

$$V = \frac{1}{3} h(B + \sqrt{Bb} + b) \quad (129.5)$$



Rys. 129-7

**Dowód.** Uzupełnijmy dany ostrosłup ścięty względnie stożek ścięty do ostrosłupa całkowitego względnie stożka całkowitego i oznaczmy przez  $x$  wysokość figury uzupełniającej. Ponieważ pola podstaw mają się do siebie jak kwadraty odległości tych podstaw od wierzchołka, więc

$$\frac{b}{B} = \frac{x^2}{(x+h)^2}$$

pierwiastkując obustronnie i rozwiązując względem  $x$ , dostajemy

$$x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

Objętość ostrosłupa ściętego obliczymy jako różnicę objętości ostrosłupa całkowitego i objętości części odciętej

$$V = \frac{1}{3} B(h+x) - \frac{1}{3} bx = \frac{1}{3} Bh + \frac{1}{3} (B-b)x$$

Wstawiając za  $x$  znaną uprzednio wartość mamy

$$V = \frac{1}{3} Bh + \frac{1}{3} (B-b) \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

Ponieważ różnicę  $B-b$  możemy uważać za różnicę kwadratów

$$B-b = (\sqrt{B})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{B}-\sqrt{b})(\sqrt{B}+\sqrt{b})$$

więc po uproszczeniu dostajemy

$$V = \frac{1}{3} Bh + \frac{1}{3} (\sqrt{B}+\sqrt{b}) h \sqrt{b} = \frac{1}{3} h(B + \sqrt{Bb} + b) \quad \text{c.n.u.}$$

W przypadku stożka ściętego podstawiając  $B = \pi R^2$ ,  $b = \pi r^2$  dostajemy

$$\text{objętość stożka ściętego } V = \frac{1}{3} h\pi(R^2 + Rr + r^2) \quad (129.6)$$

### 130. Pole powierzchni wielościanu

**Pole powierzchni wielościanu jest sumą pól wszystkich ścian tego wielościanu.**

**Graniastosłup, ostrosłup, ostrosłup ścięty.** Graniastosłup ma dwie przystające do siebie podstawy. Ostrosłup (ostry) ma jedną podstawę. Ostrosłup ścięty ma dwie podstawy, podobne do siebie, lecz nie przystające; jedna z nich jest większa i tę nazywamy zwykle *podstawą dolną*, druga jest mniejsza i tę nazywamy *podstawą górną*.

Ściany boczne mogą różnić się między sobą. Za podstawę ściany bocznej można uważać krawędź podstawy bryły. Wysokości ścian bocznych mogą być różne od krawędzi bocznych i różne od wysokości bryły. Wysokości ścian bocznych są potrzebne do obliczenia pól ścian bocznych i obliczamy je zwykle za pomocą twierdzenia Pitagorasa lub za pomocą związków trygonometrycznych, jeśli są dane kąty.

**Przykład 1.** Rozważmy następujące trzy bryły:

- 1) graniastosłup sześciokątny prawidłowy,
- 2) ostrosłup sześciokątny prawidłowy,
- 3) ostrosłup ścięty sześciokątny prawidłowy.

Podstawa (dolna) każdej z tych brył jest sześciokątem foremnym o boku równym  $a$ . Wysokości tych brył są równe  $h$ . Podstawą górną ostrosłupa ściętego jest sześciokąt foremnym o boku równym  $b$ .

Obliczyć pola całkowitych powierzchni tych trzech brył  $S_1, S_2, S_3$  uważając  $a, b, h$  za wiadome.

Rozwiązanie. Przystępując do rozwiązania najpierw musimy zdać sobie sprawę ze znaczenia terminu *prawidłowy* odnośnie do rozważanych brył.

1. Rozważany graniastosłup jest prawidłowy, a więc jest *prosty*; tzn. wszystkie jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, równe między sobą i równe wysokości bryły, podstawą zaś jego jest wielokąt *foremny*, tzn. wielokąt, którego boki są równe i kąty są równe. Stąd wynika, że ściany boczne są prostokątami wzajemnie przystającymi; podstawą każdego z tych prostokątów jest bok sześciokąta stanowiącego podstawę bryły, bok ten jest dany i równy  $a$ ; wysokością każdego z tych prostokątów jest krawędź boczna bryły, która jest równa wysokości bryły i równa  $h$ .

Powierzchnia rozważanego graniastosłupa składa się zatem z:

- dwóch wzajemnie przystających podstaw, z których każda jest sześciokątem foremnym o boku  $a$ ; sześciokąt taki składa się z sześciu trójkątów równobocznych o boku  $a$  i ma pole równe  $6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$

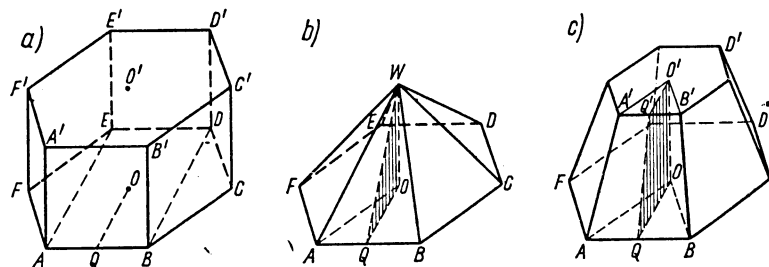
- sześciu wzajemnie przystających ścian bocznych, z których każda jest prostokątem o podstawie  $a$ , wysokości  $h$  i polu  $ah$ .

Pole całkowitej powierzchni danego graniastosłupa jest równe

$$S_1 = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} + 6ah = 3a(a\sqrt{3} + 2h) \quad (130.1)$$

Przejdziemy teraz do omówienia pozostałych dwóch brył i porównania ich z pierwszą. O ile przy pierwszej można się było obejść bez rysunku, o tyle przy pozostałych rysunek (lub przynajmniej szkic) jest bardzo ważną pomocą.

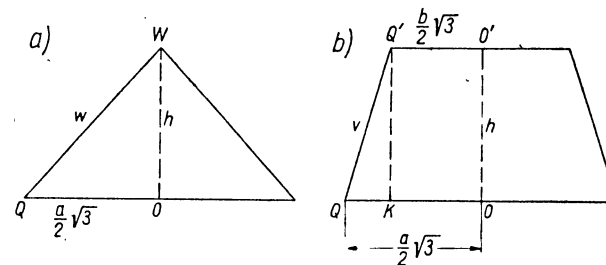
Sporządzimy rysunek wszystkich trzech brył w rzucie równoległym (rys. 130-1).



Rys. 130-1

2. Rozważany ostrosłup (rys. 130-1b) jest prawidłowy, zatem jego wierzchołek  $W$  rzutuje się na środek podstawy, wszystkie krawędzie boczne są równe, a wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Wysokość ściany bocznej obliczymy z osiowego przekroju ostrosłupa; przeprowadzonego prostopadle do krawędzi podstawy. W przekroju takim znajduje się trójkąt  $QOW$  (rys. 130-2a); jest to trójkąt prostokątny, w którym przeciw-



Rys. 130-2. Przekroje osiowe ostrosłupa i ostrosłupa ściętego

prostokątną jest  $QW = w$  (szukana wysokość ściany bocznej), a pozostałymi bokami są:

$QO = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ , jako wysokość równobocznego trójkąta  $ABO$  o boku  $AB = a$ ;

$OW = h$  wysokość ostrosłupa.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$QW^2 = QO^2 + OW^2$$

$$w^2 = \left(\frac{a}{2} \sqrt{3}\right)^2 + h^2 = \frac{3}{4} a^2 + h^2$$

$$w = \sqrt{\frac{3}{4} a^2 + h^2}$$

Powierzchnia rozważanego ostrosłupa składa się z:

- jednej podstawy, która jest sześciokątem foremnym o boku  $a$  i polu  $6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ ;

- sześciu ścian bocznych, z których każda jest trójkątem równoramiennym o podstawie  $a$ , wysokości  $w$  (obliczonej powyżej) i polu  $\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3}{4} a^2 + h^2}$ .

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równa się

$$S_2 = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} + 6 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3}{4} a^2 + h^2} = \frac{3}{2} a(a\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 + 4h^2}) \quad (130.2)$$

3. Rozważany ostrosłup ścięty (rys. 130-1c) jest prawidłowy, a więc środek podstawy górnej rzutuje się na środek podstawy dolnej, krawędzie boczne są równe, a ściany boczne są przystającymi trapezami równoramiennymi o podstawie dolnej  $a$  i górnej  $b$ . Wysokość ściany bocznej  $QQ' = v$ , obliczymy z przekroju osiowego  $QQ'O'O$ . Przekrój ten jest trapezem (rys. 130-2b), którego ramię  $QQ' = v$  obliczymy z trójkąta prostokątnego  $QQ'K$ :

$$QQ'^2 = QK^2 + KQ'^2$$

$$v^2 = \left( \frac{a}{2} \sqrt{3} - \frac{b}{2} \sqrt{3} \right)^2 + h^2 = \frac{3}{4} (a-b)^2 + h^2$$

$$v = \sqrt{\frac{3}{4} (a-b)^2 + h^2}$$

Pole jednej ściany bocznej równa się

$$\frac{a+b}{2} v = \frac{a+b}{2} \sqrt{\frac{3}{4} (a-b)^2 + h^2}$$

Powierzchnia rozważanego ostrosłupa ściętego składa się z:

- podstawy dolnej, która jest sześciokątem foremnym o boku  $a$  i polu równym

$$6 \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

- podstawy górnej, która jest sześciokątem foremnym o boku  $b$  i polu równym

$$6 \frac{b^2}{4} \sqrt{3}$$

- sześciu ścian bocznych o polu obliczonym powyżej.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa ściętego równa się

$$S_3 = 6 \frac{a^2}{4} \sqrt{3} + 6 \frac{b^2}{4} \sqrt{3} + 6 \frac{a+b}{2} \sqrt{\frac{3}{4} (a-b)^2 + h^2}$$

a po wykonaniu przekształceń

$$S_3 = \frac{3}{2} (a^2 + b^2) \sqrt{3} + \frac{3}{2} (a+b) \sqrt{3(a-b)^2 + 4h^2} \quad (130.3)$$

**Porównanie wyników.** W każdej z rozważanych trzech brył ściany boczne mają inną wysokość. Wysokości te  $h$ ,  $w$ ,  $v$  niewiele różnią się między sobą – tym bardziej jest wskazana ostrożność, aby nie pomieszać ich ze sobą.

Jeśli w trzeciej z rozważanych brył, tj. w ostrosłupie ściętym, wydłużymy bok górnej podstawy tak, aby stał się on równy bokowi dolnej podstawy  $b = a$ , to otrzymamy graniastosłup, czyli pierwszą z rozważanych brył.

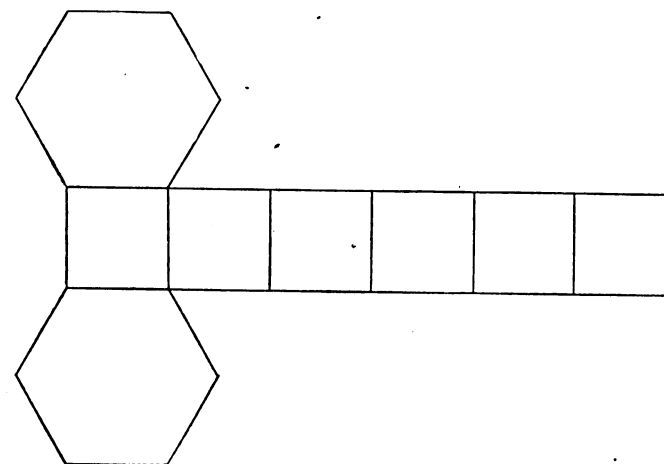
Jeśli, przeciwnie, będziemy skracać bok górnej podstawy do zera i w końcu przyjmiemy  $b = 0$ , to otrzymamy ostrosłup, czyli drugą z rozważanych brył.

Wobec tego rezultat otrzymany dla trzeciej bryły powinien zawierać w sobie jako szczególne przypadki rezultaty otrzymane poprzednio dla pierwszej i drugiej bryły. Tak jest istotnie. Jeśli we wzorze (130.3) podstawimy  $b = a$ , to otrzymamy  $S_1$ ; jeśli zaś podstawimy  $b = 0$ , to otrzymamy  $S_2$ .

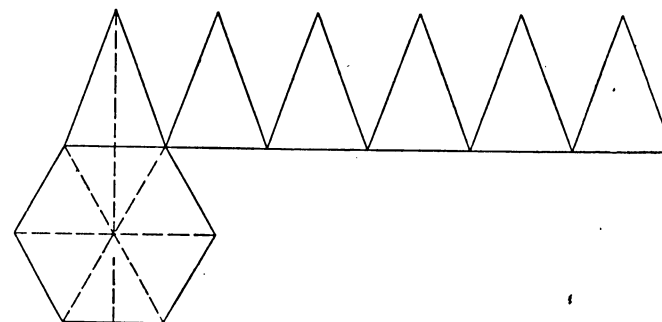
Rysunki 130-3, 130-4 i 130-5 przedstawiają siatki tych trzech brył.

**Przykład 2.** Graniastosłup, ostrosłup i ostrosłup ścięty mają w podstawach ten sam prostokąt o bokach  $a$ ,  $b$  i mają tę samą wysokość  $h$ . O bryłach tych wiadomo nadto, że:

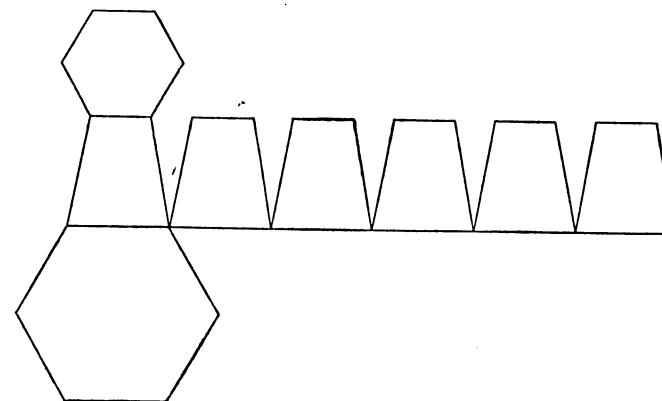
- graniastosłup jest prosty,
- w ostrosłupie wierzchołek  $W$  i środek podstawy  $O$  leżą na jednej prostej prostopadłej do podstawy,



Rys. 130-3. Siatka graniastosłupa

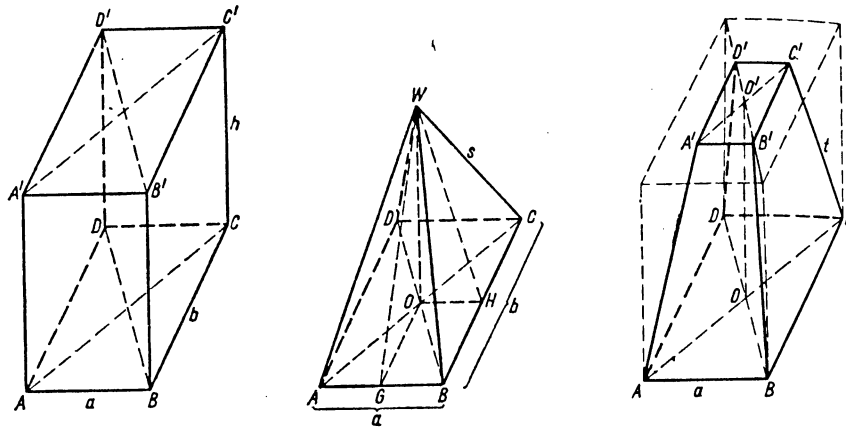


Rys. 130-4. Siatka ostrosłupa



Rys. 130-5. Siatka ostrosłupa ściętego

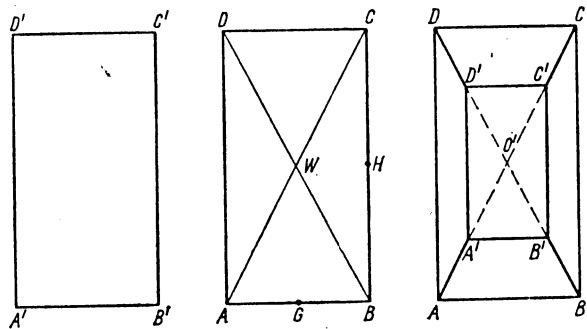
— w ostrosłupie ściętym środki obu podstaw: dolnej  $O$  i górnej  $O'$  leżą na jednej prostej prostopadłej do tych podstaw; odpowiednie wymiary liniowe podstawy górnej i dolnej pozostają w stosunku  $k:1$ , gdzie  $k$  jest pewną liczbą dodatnią, mniejszą od 1.



Rys. 130-6. Graniastosłup, ostrosłup i ostrosłup ścięty w rzucie równoległym

Obliczyć pola całkowitych powierzchni tych brył  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  uważając  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $k$  za dane. Na rysunku przyjąć  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,  $h = 3$ ,  $k = \frac{1}{2}$ .

Rozwiązanie. Nakreślmy rzuty równoległe brył (rys. 130-6) oraz ich widok z góry (rys. 130-7).



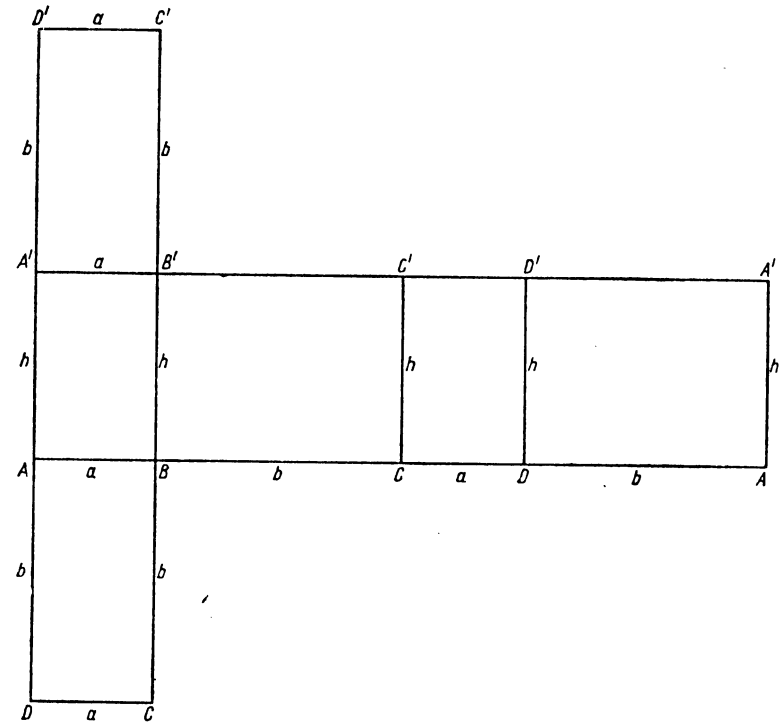
Rys. 130-7. Graniastosłup, ostrosłup i ostrosłup ścięty w rzucie prostokątnym (widok z góry)

1. Graniastosłup ma powierzchnię składającą się z dwóch podstaw i czterech ścian bocznych. Każda z podstaw jest prostokątem o bokach  $a$ ,  $b$ . Wysokość ścian bocznych jest równa wysokości bryły  $h$ . Dwie ściany boczne są prostokątami o bo-

kach  $a$ ,  $h$ , dwie pozostałe są prostokątami o bokach  $b$ ,  $h$ . Pole całkowitej powierzchni rozważanego graniastosłupa jest równe

$$S_1 = 2ab + 2ah + 2bh$$

Siatkę graniastosłupa przedstawia rys. 130-8.



Rys. 130-8. Siatka graniastosłupa

2. Rozważany ostrosłup ma wszystkie cztery boczne krawędzie jednakowej długości, jednak ściany boczne mają różne wysokości. Niech  $u$ ,  $v$  będą wysokościami ścian, których podstawy są odpowiednio równe  $a$ ,  $b$ . Przeprowadzamy dwa przekroje płaszczyznami symetrii bryły. W przekrojach tych leżą trójkąty  $GWO$  i  $HWO$ . Stosując do nich twierdzenie Pitagorasa, dostajemy

$$GW^2 = GO^2 + OW^2 \quad HW^2 = HO^2 + OW^2$$

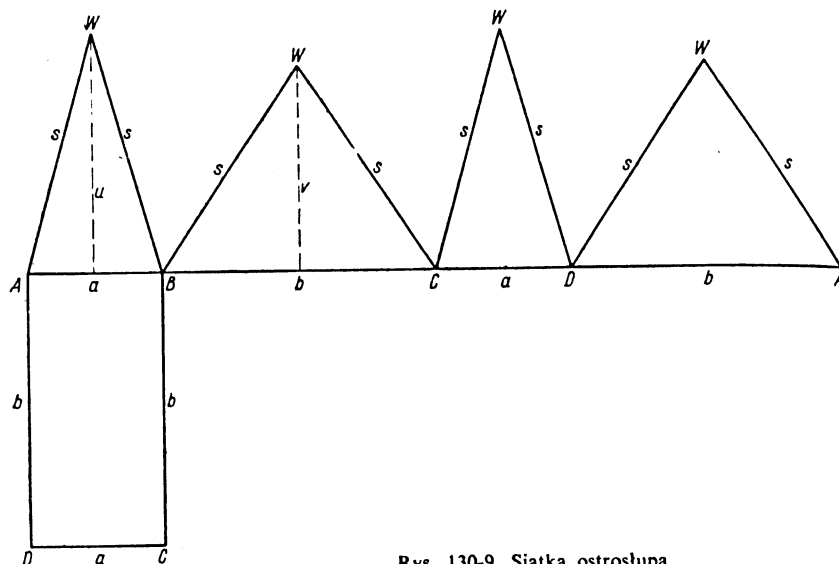
$$u^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 \quad v^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równa się

$$S_2 = ab + 2 \frac{a}{2} u + 2 \frac{b}{2} v = ab + a \sqrt{\frac{1}{4} b^2 + h^2} + b \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + h^2}$$

Rysunek 130-9 przedstawia siatkę ostrosłupa.

Aby zbadać trzecią bryłę, tj. ostrosłup ścięty, stosujemy podobnie jak poprzednio przekroje wzdłuż płaszczyzn symetrii bryły (rys. 130-10). Przekroje te są trapezami

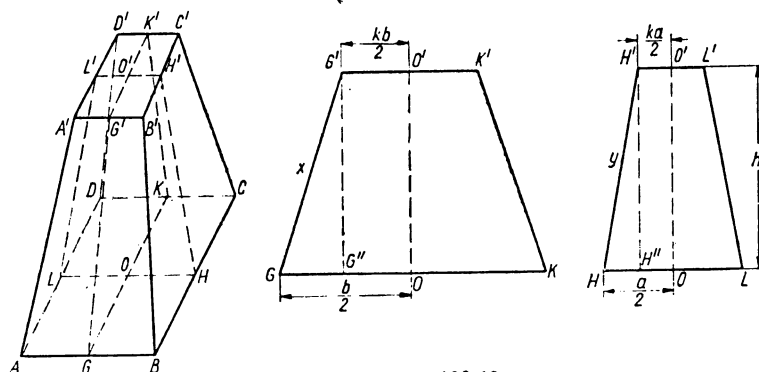


Rys. 130-9. Siatka ostrosłupa

równoramiennymi o podstawach i wysokościach wiadomych. Ich ramiona:  $GG' = KK' = x$  względnie  $HH' = LL' = y$  są właśnie szukanymi wysokościami ścian bocznych. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych  $GG'G''$  i  $HH'H''$  obliczamy

$$x^2 = GG''^2 + G''G'^2 = \left(\frac{b}{2} - \frac{kb}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{b^2(1-k)^2}{4} + h^2$$

$$y^2 = HH''^2 + H''H'^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{ka}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{a^2(1-k)^2}{4} + h^2$$



Rys. 130-10

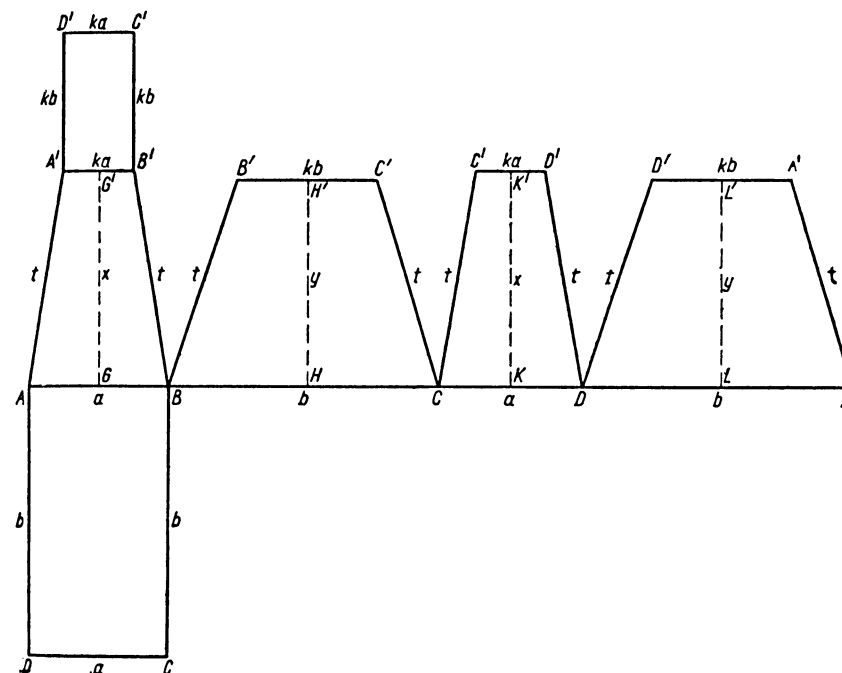
Pole całkowitej powierzchni rozważanego ostrosłupa ściętego jest równe

$$S_3 = ab + ka \cdot kb + 2 \frac{a+ka}{2} x + 2 \frac{b+kb}{2} y$$

po uproszczeniu i podstawieniu odpowiednich wyrażeń za  $x$  i  $y$  dostajemy

$$S_3 = ab(1+k^2) + (1+k)a \sqrt{\frac{b^2(1-k)^2}{4} + h^2} + (1+k)b \sqrt{\frac{a^2(1-k)^2}{4} + h^2}$$

Rysunek 130-11 przedstawia siatkę bryły.



Rys. 130-11. Siatka ostrosłupa ściętego

Porównanie wyników. Jeśli w ostatniej z rozważanych trzech brył będziemy powiększać wymiary górnej podstawy tak, żeby stała się ona równa podstawie dolnej, a zachodzi to wtedy, kiedy  $k$  rosnąc dąży do 1

$$k \rightarrow 1$$

to otrzymamy graniastosłup, czyli pierwszą bryłę. Jeśli, przeciwnie, będziemy zmniejszać do 0 wymiary górnej podstawy, co zachodzi wtedy, kiedy  $k$  dąży do 0

$$k \rightarrow 0$$

to otrzymamy ostrosłup, czyli drugą bryłę.

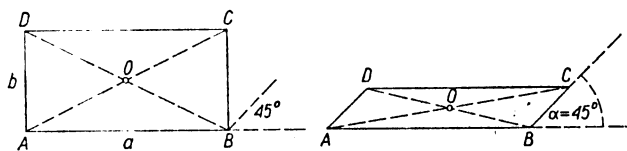
Rezultat otrzymany dla trzeciej bryły powinien zawierać w sobie, jako szczególne, krańcowe przypadki, rezultaty otrzymane dla pierwszej i drugiej bryły. Tak jest istotnie. Jeśli Czytelnik do wzoru na  $S_3$  podstawí  $k = 1$ , to otrzyma wynik zgodny ze wzorem na  $S_1$ , a jeśli podstawí  $k = 0$ , to otrzyma wynik zgodny ze wzorem na  $S_2$ .

**Przykład 3.** Graniastosłup pochyły jest określony przez następujące dane:

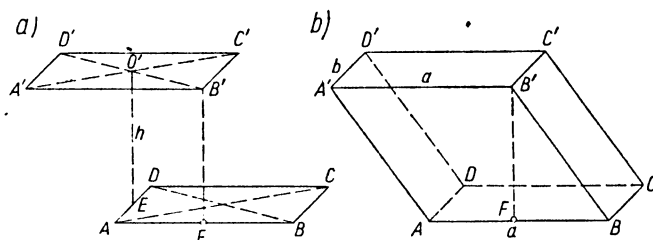
- podstawą jest prostokąt o bokach  $a = 4$ ,  $b = 2$ ;
- wysokość jest równa  $h = 3$ ;
- górna podstawa jest przesunięta względem dolnej w ten sposób, że środek górnej podstawy rzutuje się (prostopadle) na środek krótszego boku dolnej podstawy.

Narysować rzut równoległy tego graniastosłupa przyjmując skreślenie  $\alpha = 45^\circ$  i skrócenie  $s = \frac{1}{2}$ . Narysować siatkę bryły. Obliczyć pole całkowitej powierzchni bryły.

**Rozwiązanie.** Rys. 130-12 pokazuje przygotowanie rzutu równoległego podstawy bryły. Rys. 130-13 pokazuje w rzucie wzajemne położenie obu podstaw bryły i całą bryłę.



Rys. 130-12



Rys. 130-13

Aby narysować siatkę (rys. 130-14), zaczynamy od ściany przedniej  $ABB'A'$ . Następnie dorysowujemy górną i dolną podstawę, które są prostokątami o znanych wymiarach. Również prostokątami są dwie ściany boczne: lewa  $ADD'A'$  i prawa  $BCC'B'$ . Dla obliczenia pól tych ścian będzie potrzebna długość bocznej krawędzi  $BB' = s$ ; obliczamy ją z trójkąta  $BFB'$ . Na koniec dorysowujemy ścianę tylną  $CDD'C'$ , która jest równoległobokiem przystającym do ściany przedniej.

Pole dolnej podstawy  $= ab$

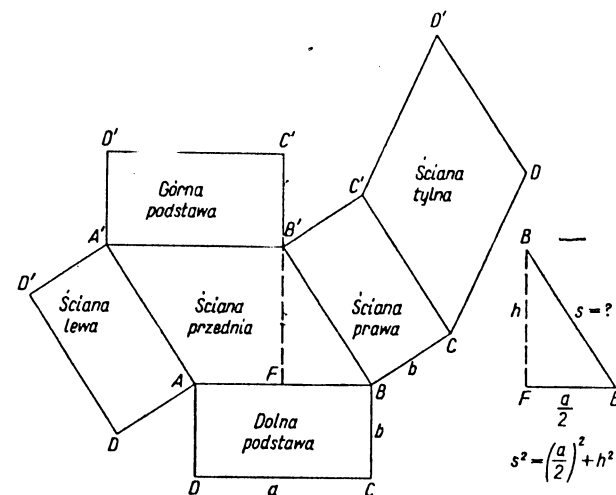
Pole górnej podstawy  $= ab$

Pole ściany przedniej  $= ah$

Pole ściany tylnej  $= ah$

Pole ściany prawej  $= bs$

Pole ściany lewej  $= bs$



Rys. 130-14

Pole całkowitej powierzchni danej bryły jest sumą tych pól i równa się

$$S = 2ab + 2ah + 2bs, \text{ gdzie } s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$$

Podstawiając  $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $h = 3$ , otrzymujemy  $S = 4(10 + \sqrt{13})$ .

### 131. Pole powierzchni walca i stożka

Wyprowadzimy wzory na pole powierzchni walca, stożka i stożka ściętego. Przyjmujemy następujące oznaczenia (rys. 131-1):

$R$  – promień podstawy walca, stożka i dolnej podstawy stożka ściętego;

$r$  – promień górnej podstawy stożka ściętego;

$h$  – wysokość walca, stożka i stożka ściętego;

$l$  – tworząca stożka;

$s$  – tworząca stożka ściętego.

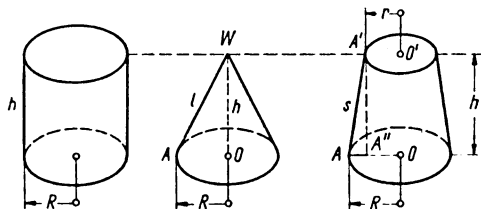
Zamiast „podstawa dolna” i „podstawa górna” mówi się niekiedy „dno dolne” i „dno górne”.

**1. Walec.** Powierzchnia całkowita walca składa się z podstawy dolnej, podstawy górnej i pobocznicy. Obie podstawy są kołami o promieniu  $R$  i każde z nich ma pole równe  $\pi R^2$ . Pobocznica po rozwinięciu jest prostokątem, którego wysokość

jest równa wysokości  $h$  walca, a podstawa jest równa obwodowi podstawy walca  $2\pi R$ . Pole całkowitej powierzchni walca równa się

$$S_1 = \pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi R h$$

(przekształcenie tego i następnych wzorów pozostawiamy Czytelnikowi).



Rys. 131-1

**2. Stożek.** Powierzchnia całkowita stożka składa się z podstawy i pobocznicy. Podstawa jest kołem o promieniu  $R$  i ma pole równe  $\pi R^2$ . Pobocznica po rozwinięciu jest wycinkiem koła, którego promieniem jest tworząca  $l$  stożka, a łukiem — łuk równy obwodowi podstawy stożka, czyli łuk o długości  $2\pi R$ . Pole pobocznicy stożka równa się  $\pi R l$ . Tworzącą stożka można wyrazić przez  $R$  i  $h$ , stosując do trójkąta  $AOW$  (rys. 131-1) twierdzenie Pitagorasa  $l^2 = R^2 + h^2$ .

Pole całkowitej powierzchni stożka równa się

$$S_2 = \pi R^2 + \pi R l \quad l = \sqrt{R^2 + h^2}$$

**3. Stożek ścięty.** Powierzchnia całkowita stożka ściętego składa się z dna dolnego, dna górnego i pobocznicy. Dno dolne jest kołem o promieniu  $R$  i polu  $\pi R^2$ . Dno górne jest kołem o promieniu  $r$  i polu  $\pi r^2$ . Pobocznica po rozwinięciu jest wycinkiem pierścienia kołowego o szerokości  $s$ , łuku większym  $2\pi R$  i łuku mniejszym  $2\pi r$ ; pole takiego wycinka obliczamy, mnożąc średnią arytmetyczną długości obu łuków przez szerokość

$$\frac{2\pi R + 2\pi r}{2} s = \pi(R + r)s$$

Tworzącą  $s$  stożka ściętego można wyrazić przez promienie podstaw  $R$ ,  $r$  i wysokość bryły  $h$ , stosując do trójkąta  $AA'A''$  (rys. 131-1) twierdzenie Pitagorasa

$$s^2 = (R - r)^2 + h^2$$

Pole całkowitej powierzchni stożka ściętego równa się

$$S_3 = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)s, \quad \text{gdzie} \quad s = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

Porównanie wyników. W stożku ściętym o ustalonej wielkości dolnego dna i ustalonej wysokości można zwiększać lub zmniejszać górne dno. To, oczywiście, wpłynie jednocześnie na odpowiednią zmianę tworzącej  $s$ . Jeśli będziemy powiększać dno górne tak, że stanie się ono równe dolnemu

$$r \rightarrow R$$

to wówczas stożek ścięty przemieni się w walec. Przeciwnie, jeśli będziemy zmniejszać dno górne aż do punktu

$$r \rightarrow 0$$

to wówczas stożek ścięty stanie się stożkiem zwykłym.

Porównując otrzymane wzory na pole całkowitej powierzchni:

1. walca  $S_1 = \pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi R h$
2. stożka  $S_2 = \pi R^2 + \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$
3. stożka ściętego  $S_3 = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$

widzimy, że jeśli we wzorze na  $S_3$  zastąpimy  $r$  przez  $R$ , to otrzymamy wartość  $S_1$ . Natomiast jeśli w tym wzorze zastąpimy  $r$  przez 0, to otrzymamy wartość  $S_2$ . Wzór na pole stożka ściętego obejmuje w sobie poprzednie dwa wzory jako szczególne, krańcowe przypadki.

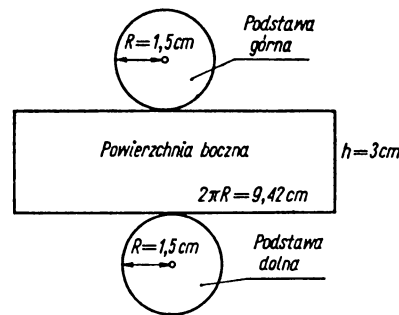
**Przykład.** Trzy bryły: walec, stożek i stożek ścięty — mają jednakową wysokość  $h = 3$  cm i jednakowy promień podstawy dolnej  $R = 1,5$  cm; promień górnej podstawy stożka ściętego jest równy  $r = 1$  cm. Narysować siatkę (rozwinięcie powierzchni) każdej z tych brył.

**Rozwiązanie**

1. Dla narysowania pobocznicy walca trzeba obliczyć obwód podstawy walca, gdyż taką długość ma mieć bok prostokąta przedstawiającego pobocznice

$$2\pi R = 2\pi \cdot 1,5 = 3\pi \approx 3 \cdot 3,14 = 9,42 \text{ cm}$$

Drugi bok tego prostokąta jest równy wysokości walca. Rys. 131-2 przedstawia siatkę walca.



Rys. 131-2

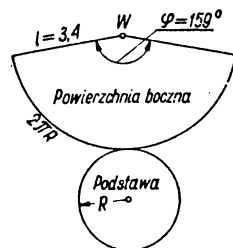
2. Dla narysowania pobocznicy stożka należy nakreślić koło o promieniu równym tworzącej stożka

$$l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{11,25} \approx 3,4 \text{ cm}$$

Aby z tego koła wyciąć wycinek o łuku równym obwodowi  $2\pi R$  podstawy stożka, posłużymy się kątem środkowym  $\varphi$  tego wycinka. Kąt ten wyznaczmy z proporcji

$$\varphi : 360 = (2\pi R) : (2\pi l)$$

skąd po podstawieniu  $R = 1,5$ ,  $l = 3,4$  otrzymujemy  $\varphi = 159^\circ$ . To pozwala nam kreślić siatkę stożka (rys. 131-3).

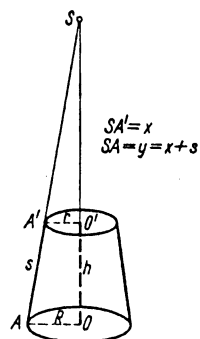


Rys. 131-3

3. Pobocznica stożka ściętego jest wycinkiem pierścienia kołowego, którego
  - łuk większy jest równy obwodowi podstawy dolnej  $2\pi R = 9,42$  cm;
  - łuk mniejszy jest równy obwodowi podstawy górnej  $2\pi r = 6,28$  cm;
  - szerokość jest równa tworzącej stożka ściętego

$$s = \sqrt{(R-r)^2 + h^2} = \sqrt{9,25} \approx 3,05 \text{ cm}$$

Te dane pozwalają natychmiast obliczyć pole pobocznic, jednak narysowanie rozwinięcia pobocznic jest jeszcze związane z pewnymi trudnościami. Trzeba bowiem obliczyć promienie  $x$ ,  $y$  pierścienia, którego wycinkiem jest pobocznica. Promienie te znajdziemy, uzupełniając dany stożek ścięty do stożka ostrego (rys. 131-4).



Rys. 131-4

Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$x:(x+s) = r:R \quad \text{czyli} \quad x:(x+3,05) = 1:1,5 \quad \text{skąd} \quad x = 6,1$$

szukane promienie pierścienia kołowego mają długości

$$x = 6,1 \text{ cm} \quad y = x + s = 6,1 + 3,05 = 9,15 \text{ cm}$$

Teraz, aby z otrzymanego pierścienia wyciąć stosowny odcinek, należy obliczyć kąt środkowy odpowiadający temu wycinkowi. Układamy proporcję

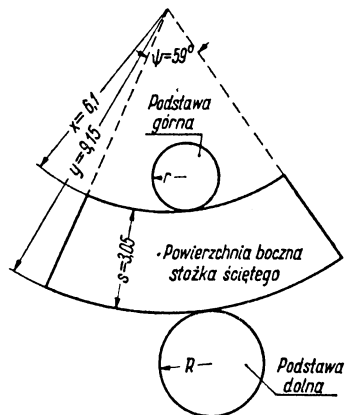
$$\varphi:360 = (2\pi R):(2\pi y) \quad \text{skąd} \quad \varphi = \frac{360 \cdot R}{y} = \frac{360 \cdot 1,5}{9,15} = 59^\circ$$

Rysunek 131-5 przedstawia siatkę tego stożka ściętego.

Uwaga. Rachunki liczbowe były tu wykonywane z dokładnością taką, jaką uważaliśmy za wystarczającą do nakreślenia rysunków.

### Zadania

1. Krawędź sześcianu  $ABCD A'B'C'D'$  jest równa  $a$ . Punkty  $K, L, M, N$  są środkami krawędzi  $AA', AD, AB, DC$ . Obliczyć pola trójkątów  $KLM$  i  $KLN$ . Jakież to trójkąty?
2. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ścięty ma krawędzie podstawy górnej i krawędzie boczne równe  $a$ , krawędź podstawy dolnej jest równa  $2a$ . Obliczyć objętość ostrosłupa.  
Wskazówka: W przekroju przekątnym otrzymujemy trapez równoramienny, którego podstawy są przekątnymi podstaw ostrosłupa, a więc odcinkami łatwymi do obliczenia. Wysokość obliczamy przy pomocy twierdzenia Pitagorasa.
3. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o obu przyprostokątnych równych  $a$ . Krawędzie boczne są też równe  $a$ . Obliczyć objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.
4. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o obu przyprostokątnych równych  $a$ . Wysokość ostrosłupa jest też równa  $a$ , a jej spodek znajduje się w środku koła wpisanego w podstawę. Obliczyć pole powierzchni bocznej ostrosłupa.
5. Na półkuli o promieniu  $r$  opisano stożek ścięty tak, że podstawa półkuli leży na dolnej podstawie stożka. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem  $60^\circ$ . Obliczyć objętość tego stożka ściętego.  
Wskazówka: W przekroju osiowym otrzymujemy trapez równoramienny opisany na półkolu. Łącząc środek półkolu z końcami górnej podstawy dzielimy trapez na 3 trójkąty. Jakież to trójkąty? Promienie poprowadzone do punktów styczności są wysokościami tych trójkątów. Skorzystać ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego.
6. Obliczyć objętość stożka w zależności od tworzącej  $s$ , jeśli wiadomo, że boczna powierzchnia stożka po rozwinięciu na płaszczyźnie jest ćwiartką koła.  
Wskazówka: Wyrazić łuk tej ćwiartki koła 1) w zależności od tworzącej  $s$ , 2) w zależności od promienia stożka  $r$ . Z porównania otrzymamy równanie wyznaczające  $r$  w zależności od  $s$ . Z osiowego przekroju stożka można znaleźć zależność wysokości  $h$  od  $s$ .



Rys. 131-5

## 132. Pole powierzchni kuli

Powierzchnia kulista (sfera) należy do powierzchni obrotowych podobnie jak powierzchnia walcowa i powierzchnia stożkowa, ale różni się od nich tym, że nie jest rozwijalna (nakładalna na płaszczyznę). Ani całej sfery ani żadnego płata sferycznego nie można odwzorować izometrycznie na płaszczyźnie. Nie istnieje „rozwińnięcie” powierzchni kuli na płaszczyźnie takie, jakie otrzymywaliśmy dla walca i stożka. Nie można więc stosować definicji pola podanej w planimetrii (89).

Jak określić pole powierzchni nie nakładalnej na płaszczyznę? Nasuwa się myśl, aby pole to aproksymować za pomocą pól powierzchni wielościennych wpisanych w daną powierzchnię – podobnie jak długość linii krzywej aproksymowaliśmy za pomocą długości łamanych wpisanych w tę krzywą. Okazuje się jednak, że nie ma tu pełnej analogii i że trzeba posłużyć się innym sposobem. Ogólną definicję i wyprowadzenie wzorów na pole powierzchni można znaleźć w matematyce wyższej w dziale zwanym geometrią różniczkową. Mimo tych trudności wzory, które uzyskuje się dla sfery, są bardzo proste i podamy je tu bez dowodu.

**Sfera, pas sferyczny i czasza.** Niech będzie dana sfera o promieniu  $R$  i dwie równoległe płaszczyzny  $\sigma_1, \sigma_2$ , z których każda niech ma co najmniej jeden punkt wspólny ze sferą. Niech  $w$  będzie wzajemną odległością tych płaszczyzn,  $0 < w \leq 2R$ . Zbiór wszystkich punktów sfery, które znajdują się między płaszczyznami  $\sigma_1, \sigma_2$  lub na którejś z tych płaszczyzn nazywamy *pasem sferycznym* (*kulistym*) o wysokości  $w$  wyciętym ze sfery o promieniu  $R$ . W szczególnych przypadkach;

- gdy jedną z płaszczyzn jest styczna do sfery, pas sferyczny nazywamy *czaszą* o wysokości  $w$  wyciętą ze sfery o promieniu  $R$ ;
- gdy obie płaszczyzny są styczne do sfery, odpowiedni pas sferyczny jest identyczny z całą sferą.

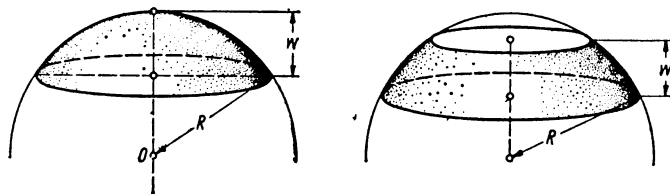
**Pole pasa sferycznego** o wysokości  $w$  wyciętego ze sfery o promieniu  $R$  jest dane wzorem

$$S = 2\pi R w \quad (132.1)$$

Wzór ten stosuje się także do czaszy oraz do całej sfery. W tym ostatnim przypadku należy podstawić  $w = 2R$ .

**Pole sfery** o promieniu  $R$  jest dane wzorem

$$S = 4\pi R^2 \quad (132.2)$$



Rys. 132-1. Pole czaszy i pole pasa sferycznego są równe  $2\pi R w$

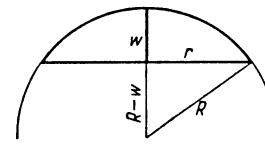
**Uwaga.** Wysokość pasa sferycznego należy odróżniać od jego szerokości, którą mierzymy łukiem koła wielkiego prostopadłego do płaszczyzn ograniczających pas sferyczny. *Kolem wielkim* w danej kuli nazywamy część wspólną tej kuli i płaszczyzny przechodzącej przez jej środek. Dwa pasy sferyczne o tej samej wysokości, położone na tej samej sferze, mogą mieć różne szerokości, ale ich pola są równe (rys. 132-1).

**Przykład 1.** Obliczyć pole kuli o średnicy 10 cm.

**Rozwiązanie.** Promień  $R = 5$  cm. Pole  $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 25 \text{ cm}^2 = 314 \text{ cm}^2$ , 3,14  $\text{dm}^2$ .

**Przykład 2.** Obliczyć pole czaszy o wysokości  $w = 3$  cm i promieniu podstawy  $r = 6$  cm.

**Rozwiązanie.** Należy najpierw obliczyć promień  $R$  kuli, z której jest wycięta czasza. Stosując twierdzenie Pitagorasa (rys. 132-2) mamy



Rys. 132-2

$$R^2 = (R - w)^2 + r^2$$

$$R^2 = R^2 - 2Rw + w^2 + r^2$$

$$2Rw = w^2 + r^2$$

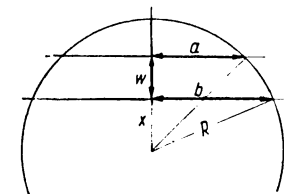
$$2R \cdot 3 = 3^2 + 6^2 = 45$$

$$R = 7,5 \text{ cm}$$

Teraz obliczamy pole czaszy

$$S = 2\pi R w = 2 \cdot 7,5 \cdot \pi \cdot 3 = 45\pi \text{ cm}^2$$

**Przykład 3.** Obliczyć pole pasa kulistego o wysokości  $w = 3$  i o promieniach kół ograniczających ten pas  $a = 6$ ,  $b = 9$ .



Rys. 132-3

**Rozwiązanie.** Obliczamy najpierw promień  $R$  kuli (rys. 132-3). Mamy równania

$$R^2 = a^2 + (x + w)^2$$

$$R^2 = b^2 + x^2$$

Porównując prawe strony

$$a^2 + (x + w)^2 = b^2 + x^2$$

obliczamy niewiadomą pomocniczą  $x$

$$\begin{aligned} a^2 + x^2 + 2xw + w^2 &= b^2 + x^2 \\ 2xw &= b^2 - a^2 - w^2 \\ x &= \frac{b^2 - a^2 - w^2}{2w} = \frac{81 - 36 - 9}{6} = 6 \end{aligned}$$

po czym obliczamy promień kuli  $R$

$$R^2 = b^2 + x^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117, \quad \text{skąd} \quad R = \sqrt{117}$$

$$\text{Odp. } S = 2R\pi w = 6\sqrt{117}\pi.$$

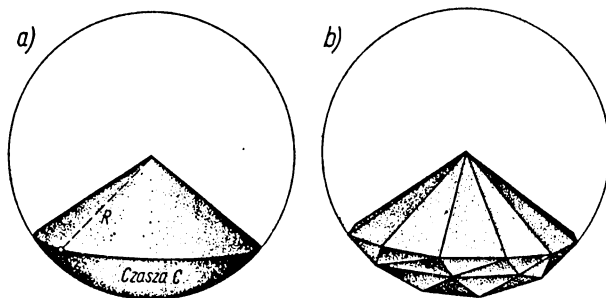
### Zadania

1. W kulę o promieniu  $R$  wpisano stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym. Obliczyć różnicę pól powierzchni kuli i całkowitej powierzchni stożka.

## 133. Objętość kuli

**Objętość wycinka kulistego.** Rys. 133-1a pokazuje wycinek kulisty ograniczony czaszą i powierzchnią stożkową o wierzchołku położonym w środku kuli. Gdybyśmy jakiegś bryły materialnej chcieli nadać kształt wycinka kulistego, to obciosując ją staralibyśmy się pierwszymi cięciami nadać jej kształt pokazany na rys. 133-1b.

Jest to bryła złożona z ostrosłupów, których podstawy  $w_1, w_2, \dots, w_n$  są trójkątami st stycznymi do czaszy, a wspólny wierzchołek znajduje się w środku kuli. Wysokości tych wszystkich ostrosłupów są równe  $R$ . Objętość tej bryły możemy uważać za przybliżenie z nadmiarem objętości wycinka kulistego. Jest to tym lepsze przy-



Rys. 133-1

bliżenie, im większa jest liczba  $n$  poszczególnych trójkątów  $w_1, w_2, \dots, w_n$  i im mniejsze są one. Oznaczmy tę objętość przez  $V_n$  i obliczmy ją. Pamiętajmy przy tym, że  $R$  jest wspólną wysokością wszystkich ostrosłupów. Otrzymujemy

$$V_n = \frac{R}{3} w_1 + \frac{R}{3} w_2 + \dots + \frac{R}{3} w_n = \frac{R}{3} (w_1 + w_2 + \dots + w_n) = \frac{R}{3} W_n$$

gdzie  $W_n$  oznacza pole powierzchni wielościennej złożonej z podstaw ostrosłupów.

Niech teraz  $n$  wzrasta nieograniczenie tak, aby rozmiary trójkątów  $w_1, \dots, w_n$  malały do zera. Wówczas objętość  $V_n$  bryły wielościennej dąży do objętości  $V$  wycinka kulistego, jednocześnie pole powierzchni wielościennej  $W_n$  dąży do pola czaszy  $C$  i dostajemy wzór

$$V = \frac{R}{3} C \quad (133.1)$$

objętość wycinka kulistego jest równa iloczynowi pola czaszy ograniczającej ten wycinek przez  $\frac{1}{3}$  promienia kuli, z której ten wycinek został wycięty.

Wzór ten jest podobny do wzoru (129.1) na objętość ostrosłupa tylko, że zamiast wysokości ostrosłupa występuje tu promień kuli, a zamiast podstawy ostrosłupa — czasza.



Rys. 133-2

Wzór ten stosuje się też do wycinka kulistego „wydrążonego”, tj. ograniczonego pasem sferycznym i dwiema pobocznymi stożków (rys. 133-2). Wtedy wzór ten możemy zapisać w postaci

$$V = \frac{R}{3} S \quad (133.2)$$

gdzie  $S$  oznacza pole pasa sferycznego. Wzór ten odnosi się też do wycinka kulistego odpowiadającego dowolnemu obszarowi sferycznemu  $S$  leżącemu na sferze o promieniu  $R$ . Obszar  $S$  może też pokrywać całą sferę, a wówczas odpowiadający mu wycinek zapełnia całą kulę.

**Objętość kuli.** Podstawiając we wzorze (133.2) w miejsce  $S$  pole całej sfery równe  $4\pi R^2$  otrzymujemy wzór na objętość kuli

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (133.3)$$

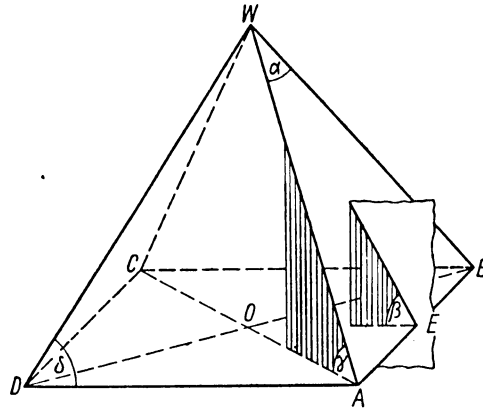
Objętość kuli równa się iloczynowi pola powierzchni kuli przez trzecią część promienia kuli.

**Odcinek kulisty** jest różnicą wycinka kulistego (pełnego) i stożka. **Warstwa kulista** jest różnicą dwóch odcinków kulistych. Stąd już wynika sposób obliczenia ich objętości.

1. Obliczyć objętość warstwy kulistej wyciętej z kuli o promieniu  $R$  dwiema płaszczyznami równoległymi, przechodzącymi w odległościach  $a$  i  $b$  od środka kuli po tej samej stronie,  $0 < a < b$ .

### 134. Zastosowania trygonometrii do stereometrii

W stereometrii występują różnego rodzaju kąty i to zwykle sprawia pewne trudności przy rozwiązywaniu zadań z tego zakresu. Trudności te znikną, jeśli uświadomimy sobie jakie to są kąty i jak się je mierzy. Omówimy te kąty, posługując się dla przykładu prawidłowym ostrosłupem czworokątnym (rys. 134-1).



Rys. 134-1

**Kąt płaski** jest to kąt między dwiema półprostymi mającymi wspólny początek. Przykład: Kąt płaski ściany bocznej ostrosłupa u jego wierzchołka  $\angle AWB = \alpha$ . Inny przykład: Kąt płaski ściany bocznej u podstawy ostrosłupa  $\angle WDA = \delta$ .

**Kąt dwuścienny** jest to kąt między dwiema półpłaszczyznami mającymi wspólną krawędź. Aby zmierzyć kąt dwuścienny przecinamy go płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi i otrzymujemy na tej płaszczyźnie kąt płaski, zwany kątem liniowym kąta dwuściennego. Przykład: Kąt nachylenia ściany bocznej  $ABW$  do płaszczyzny podstawy  $ABCD$  ostrosłupa; kątem liniowym tego kąta dwuściennego jest  $\angle OEW = \beta$ .

**Kąt między prostą a płaszczyzną** jest to kąt między prostą a jej rzutem prostopadłym na płaszczyznę. Przykład: Kąt nachylenia krawędzi bocznej  $WA$  do płaszczyzny podstawy ostrosłupa: jest to kąt  $\angle WAO = \gamma$ .

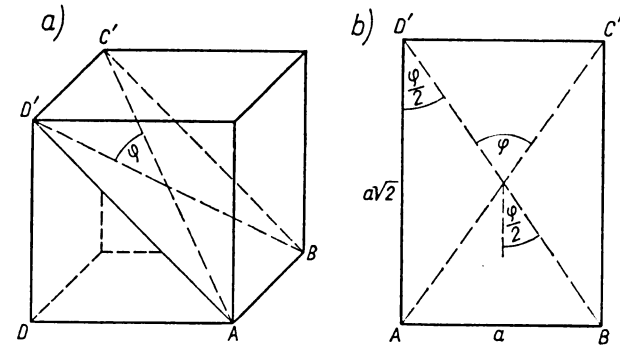
**Kąt między dwiema prostymi skośnymi.** Aby zmierzyć taki kąt, należy jedną z tych prostych zastąpić równoległą przechodzącą przez dowolny punkt drugiej.

Przykład: Kąt między krawędziami  $DW$  i  $CB$  (rys. 134-1). Reprezentantem tego kąta jest np.  $\angle WDA = \delta$ .

W zadaniach ze stereometrii należy zwracać uwagę na możliwość występowania różnego rodzaju wysokości i przekątnych.

**Wysokość bryły i wysokość ściany** są to na ogół różne odcinki. Wysokością ostrosłupa na rys. 134-1 jest odcinek  $WO$ . Wysokością ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego, czyli jego *apotecą*, jest  $WE$ . Od tych dwóch wysokości należy odróżniać krawędzie boczne  $WA = WB = WC = WD$ . W ostrosłupie nieprawidłowym krawędzie boczne nie muszą być równe; to samo odnosi się do wysokości ścian bocznych.

**Przekątne bryły i przekątne ścian bryły** (rys. 134-2). Pierwsze przebiegają wewnątrz bryły, np.  $AC'$ ,  $BD'$ , drugie leżą na powierzchni danej ściany, np.  $AD'$  lub  $BC'$ .



Rys. 134-2. Przekątny przekrój sześcianu: a) w rzucie ukośnym, b) w kładzie

**Przykład 1.** Obliczyć kąt  $\varphi$  między przekątnymi sześcianu.

**Rozwiązanie** (rys. 134-2). Przekątne sześcianu leżą w przekroju przekątnym  $AD'C'B$ . Jest  $\tan \varphi/2 = AB:AD'$ . Oznaczmy literą  $a$  krawędź sześcianu. Przekątna ściany bocznej  $AD' = a\sqrt{2}$ . Zatem  $\tan \varphi/2 = a:(a\sqrt{2}) = 0,7071$ ,  $\varphi/2 = 35^\circ 16'$ . Odpowiedź:  $\varphi = 70^\circ 32'$ .

**Przykład 2.** Obliczyć kąt  $\varphi$  nachylenia ściany bocznej czworościanu foremnego do płaszczyzny podstawy.

**Rozwiązanie.** Kąt  $\varphi$  znajdziemy w przekroju prostopadłym do krawędzi czworościanu. Przekrojem takim jest  $CEW$  (rys. 134-3). Jest:

$CW$  — krawędź czworościanu, której długość oznaczamy  $a$ ,

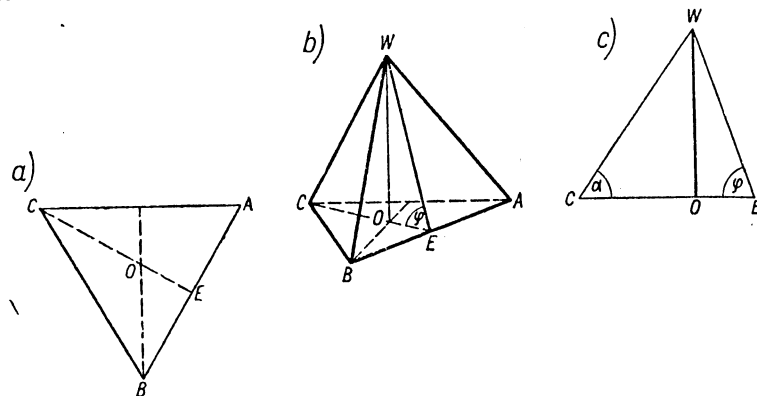
$CE$  — wysokość równobocznego trójkąta  $ABC$  ma długość  $a\sqrt{3}/2$ ,

$WE$  — wysokość równobocznego trójkąta  $ABW$  ma długość  $a\sqrt{3}/2$ .

Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta  $CEW$ , dostajemy  $\cos \varphi = 1/3$ , skąd  $\varphi = 70^\circ 32'$ .

**Przykład 3.** Obliczyć w czworościanie foremnym kąt  $\alpha$  nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

**Rozwiązanie** (zob. rys. 134-3). Wszystkie krawędzie boczne mają jednakowe nachylenie do płaszczyzny podstawy. Weźmy pod uwagę krawędź  $CW$ . Jej nachylenie do podstawy  $ABC$  mierzy się w płaszczyźnie  $CEW$  prostopadłej do  $AB$ . Szukany kąt  $\alpha$  – to kąt  $ECW$ ; jest on przedstawiony w kładzie na rys. 134-3c. Z twierdzenia cosinusów dostajemy  $\cos \alpha = 1/\sqrt{3} = 0,5774$ , skąd  $\alpha = 54^\circ 44'$ .



Rys. 134-3. Czworościan: a) podstawa, b) rzut ukośny, c) przekrój

**Przykład 4.** Obliczyć kąt między krawędziami skośnymi w czworościanie foremnym.

**Rozwiązanie.** Krawędziami takimi są  $\overline{CW}$  i  $\overline{AB}$  (rys. 134-3). Gdyby jedną z nich poddać translacji aż do przecięcia się z drugą, to utworzyłyby kąt prosty. Istotnie, płaszczyzna  $CWE$  jest prostopadła do  $\overline{AB}$ , gdyż  $\overline{CE} \perp \overline{AB}$  i  $\overline{WE} \perp \overline{AB}$ . Zatem odcinek  $\overline{CW}$  leżący w płaszczyźnie  $CEW$  po przesunięciu do  $E$  też będzie leżał w tej płaszczyźnie, a więc będzie prostopadły do  $\overline{AB}$ . Odpowiedź:  $90^\circ$ .

**Przykład 5.** W ostrosłupie trójkątnym prawidłowym dany jest kąt  $\varphi$  nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Obliczyć kąt  $\alpha$  nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

**Rozwiązanie.** Posłużymy się powtórnie rysunkiem 134-3, przyjmując teraz, że krawędzie boczne, równe między sobą, mogą jednak mieć inną długość niż krawędzie podstawy. Kąty  $\alpha$  i  $\varphi$  występują w przekroju  $CWE$  i jest

$$\operatorname{tg} \alpha = WO:OC \quad \operatorname{tg} \varphi = WO:OE$$

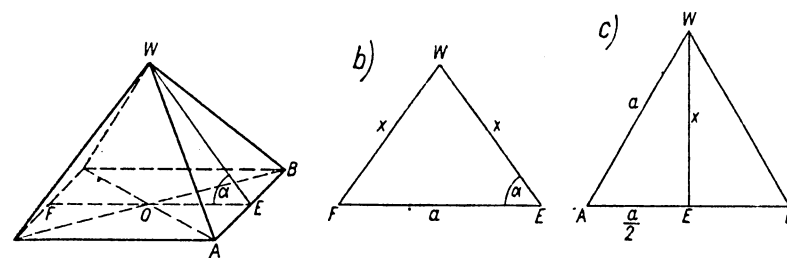
Z własności trójkąta równobocznego  $ABC$  wynika, że  $OC = 2OE$ . Zatem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi$$

Ta równość każdemu kątowi ostremu  $\varphi$  przyporządkowuje odpowiedni kąt ostry  $\alpha$  i równość tę można uważać za rozwiązanie postawionego zadania. Np. dla  $\varphi = 74^\circ$  jest  $\operatorname{tg} \varphi = 3,487$ , więc  $\operatorname{tg} \alpha = 1,743$ , skąd  $\alpha = 60^\circ 09'$ .

**Przykład 6.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, którego wszystkie krawędzie są równe, wyznaczyć nachylenie ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

**Rozwiązanie.** Szukany kąt  $\alpha$  znajdziemy w przekroju  $WFE$  (rys. 134-4). Wspólną długość wszystkich krawędzi oznaczmy literą  $a$  i uważajmy tymczasem za znaną. W dalszych rachunkach wielkość  $a$  powinna zniknąć, bowiem przekształcenie ostrosłupa przez podobieństwo nie zmienia jego kątów.



Rys. 134-4. Ostrosłup prawidłowy czworokątny, czyli piramida: a) rzut ukośny, b) przekrój, c) ściana boczna

W przekroju  $WFE$  mamy  $FE = a$ , zaś  $WF = WE = x = a\sqrt{3}/2$  jako wysokość w trójkącie równobocznym  $WAB$ . Z trójkąta  $WFE$  dostajemy

$$\cos \alpha = \frac{a}{2x} = \frac{a}{2a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5773, \quad \text{skąd} \quad \alpha = 54^\circ 45'$$

**Przykład 7.** Obliczyć kąt dwuścienny między ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym nachylenie krawędzi bocznej do krawędzi podstawy jest równe  $\alpha$ .

**Rozwiązanie** (rys. 134-5). Kąt dwuścienny między ścianami  $WCB$  i  $WCD$  przecinamy płaszczyzną prostopadłą do krawędzi tego kąta, ale wybieramy tę płaszczyznę tak, aby przechodziła przez przekątną podstawy. Otrzymany w przekroju trójkąt  $FDB$  ma u wierzchołka poszukiwany kąt  $\beta$ , podstawę  $DB = a\sqrt{2}$ , zaś jego ramię  $y$  możemy obliczyć z trójkąta prostokątnego  $FBC$  i jest  $y = a \sin \alpha$ . Teraz, znając wszystkie boki trójkąta  $BDF$ , obliczamy kąt  $\beta$  stosując tw. cosinusów

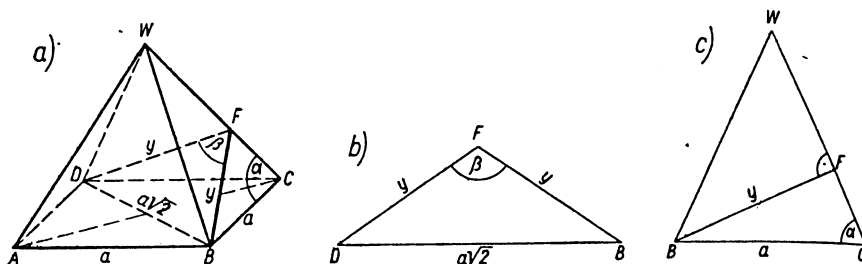
$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{DF^2 + FB^2 - DB^2}{2DF \cdot FB} = \frac{2y^2 - (a\sqrt{2})^2}{2y^2} = \frac{y^2 - a^2}{y^2} = \frac{(a \sin \alpha)^2 - a^2}{(a \sin \alpha)^2} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \frac{-\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\operatorname{ctg}^2 \alpha \end{aligned}$$

Odp. Szukany kąt  $\beta$  jest dany w zależności od kąta  $\alpha$  równaniem

$$\cos \beta = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$$

Jeśli  $\alpha$  będzie dane numerycznie, to prawa strona jest wiadoma i z tablic odczytamy kąt  $\beta$ .

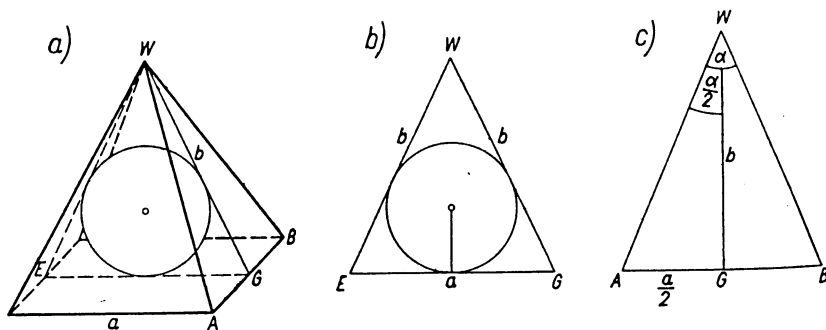
Uwaga. Z równania widać, że  $\cos \beta$  jest ujemny, czyli kąt  $\beta$  jest rozwarty.



Rys. 134-5. Kąt  $\beta$  między ścianami bocznymi ostrosłupa: a) w rzucie ukośnym, b) w kładzie, c) ściana boczna potrzebna do obliczenia długości  $y$  ramion  $FD$  i  $FB$

**Przykład 8.** Obliczyć promień kuli wpisanej w prawidłowy ostrosłup kwadratowy, znając bok podstawy  $a$  oraz kąt płaski  $\alpha$  ściany bocznej u wierzchołka.

**Rozwiązanie.** Kula wpisana w ostrosłup musi być styczna do wszystkich ścian bocznych i do podstawy. Ze względu na symetrię ostrosłupa punkty styczności muszą leżeć w środku podstawy i na osiach symetrii ścian bocznych (rys. 134-6). Środek kuli leży na osi symetrii ostrosłupa.



Rys. 134-6. Ostrosłup z kulą wpisaną: a) rzut ukośny ostrosłupa i przekrój kuli, b) przekrój ostrosłupa i przekrój kuli, c) kład ściany bocznej

Przekrój  $EWG$  ostrosłupa przechodzi przez środek kuli i przecina ją wzdłuż koła wielkiego, którego promień  $r$  jest poszukiwanym promieniem kuli

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\text{pole trójkąta } EWG}{\text{pół obwodu trójkąta } EWG}$$

Ramię  $WG = b$  jest jednocześnie wysokością ściany bocznej  $ABW$ , skąd

$$b = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (*)$$

Znając wszystkie boki trójkąta  $EWG$ , obliczymy jego obwód i pole

$$\text{połowa obwodu} = p = \frac{1}{2}(a + b + b) = \frac{a}{2} + b$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + b\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}\frac{a}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

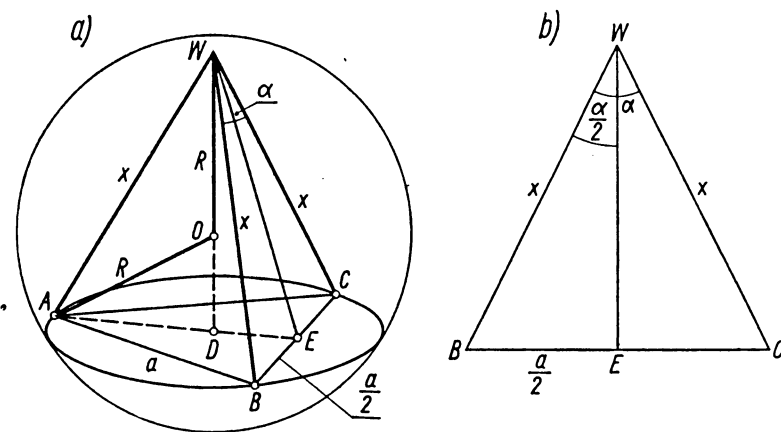
Stąd

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{b + \frac{a}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$$

Podstawiając (\*), dostajemy

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

**Przykład 9.** W kulę o promieniu  $R$  wpisano ostrosłup w ten sposób, że z punktu  $W$  leżącego na powierzchni kuli poprowadzono trzy cięciwy równej długości  $WA = WB = WC = x$ , z których każde dwie tworzą kąt  $\alpha$ . Obliczyć długość  $x$  tych cięciw, uważając  $R$  i  $\alpha$  za wiadome.



Rys. 134-7

**Rozwiązanie** (rys. 134-7). Łącząc punkty  $A, B, C$ , otrzymujemy prawidłowy ostrosłup trójkątny, którego wysokość oznaczamy  $h$ , a krawędź podstawy przez  $a$

$$DW = h \quad AB = BC = CA = a$$

Poszukujemy równań, w których niewiadoma  $x$  i pomocnicze niewiadome  $h$ ,  $a$  zostałyby związane z wiadomymi  $R$ ,  $\alpha$ .

W trójkącie równobocznym  $ABC$  wysokości są jednocześnie środkowymi, więc punkt  $D$  dzieli wysokość  $\overline{AE}$  w stosunku  $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$

$$AD = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} \left( \frac{a}{2} \sqrt{3} \right) = \frac{a}{3} \sqrt{3}$$

W trójkącie  $AWD$  z tw. Pitagorasa mamy

$$DW^2 + AD^2 = AW^2 \quad \text{czyli} \quad h^2 + \frac{a^2}{3} = x^2 \quad (I)$$

W trójkącie  $BEW$  mamy

$$\frac{a}{2} : x = \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{czyli} \quad a = 2x \sin \frac{\alpha}{2} \quad (II)$$

W trójkącie  $ODA$  z tw. Pitagorasa jest  $AO^2 = OD^2 + AD^2$ , co wobec  $AO = R$ ,  $OD = DW - OW = h - R$  oraz  $AD = \frac{a}{3} \sqrt{3}$  daje

$$R^2 = (h - R)^2 + \frac{a^2}{3} \quad \text{czyli} \quad h^2 + \frac{a^2}{3} = 2hR \quad (III)$$

Z równań (I), (II), (III) wyznaczmy niewiadome  $x$ ,  $h$ ,  $a$ . Porównując (I) i (III) dostajemy  $h = \frac{x^2}{2R}$ , co wstawione do (I) po uwzględnieniu (II) daje równanie o jednej niewiadomej  $x$ . Ostatecznie dla  $0^\circ < \alpha < 120^\circ$  mamy

$$\text{Odp. } x = 2R \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 4R \sqrt{\frac{1}{3} \sin \left( 60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( 60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

**Przykład 10 (ostrosłup czworokątny nieprawidłowy).** Podstawą ostrosłupa jest romb o boku  $a$  i kącie ostrym  $\alpha$ ; ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\beta$ . Obliczyć objętość i pole całkowitej powierzchni ostrosłupa.

**Rozwiązanie.** Ponieważ wszystkie ściany boczne mają jednakowe nachylenie do podstawy, a podstawa jest rombem, a więc figurą symetryczną względem swego środka, przeto ściany boczne są trójkątami przystającymi, a wierzchołek bryły znajduje się nad środkiem jej podstawy (rys. 134-8).

Pole podstawy obliczamy łatwo  $S_0 = a^2 \sin \alpha$ .

Dla obliczenia objętości potrzebna jest wysokość  $OW = h$ , zaś dla obliczenia pola ściany bocznej trzeba znać jej wysokość  $KW = p$ .

Przecinając ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez  $W$  i prostopadłą do krawędzi  $AB$ , otrzymamy w przekroju trójkąt  $OKW$ , w którym wiadomy jest tylko kąt  $\beta$ .

Aby obliczyć bok  $KO = q$  rozważamy trójkąt  $AKO$ , w którym znany jest kąt  $KAO = \frac{\alpha}{2}$ , zaś bok  $AO = b$  obliczymy z trójkąta prostokątnego  $AOD$

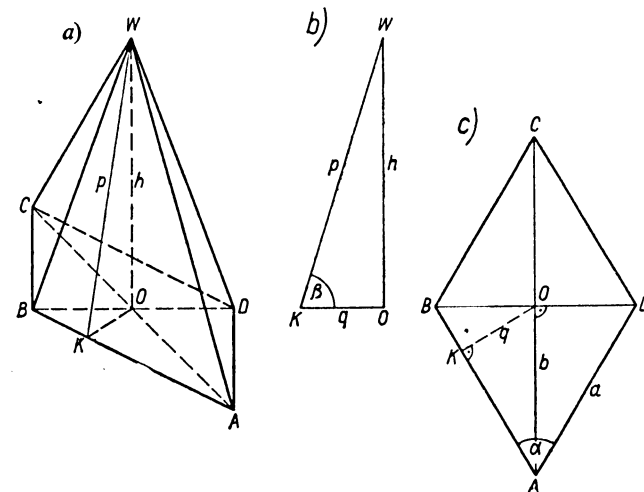
$$b = a \cos \frac{\alpha}{2}$$

Teraz z trójkąta  $AOK$  mamy

$$q = b \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \sin \alpha$$

Z trójkąta  $OKW$  mamy

$$h = q \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta \quad p = \frac{q}{\cos \beta} = \frac{\frac{a}{2} \sin \alpha}{\cos \beta}$$



Rys. 134-8

**Objętość ostrosłupa**

$$V = \frac{1}{3} S_0 h = \frac{1}{3} (a^2 \sin \alpha) \cdot \left( \frac{a}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta \right) = \frac{1}{6} a^3 \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$$

**Pole jednej ściany bocznej**

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot KW = \frac{1}{2} a p = \frac{1}{2} a \frac{\frac{a}{2} \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{a^2}{4} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

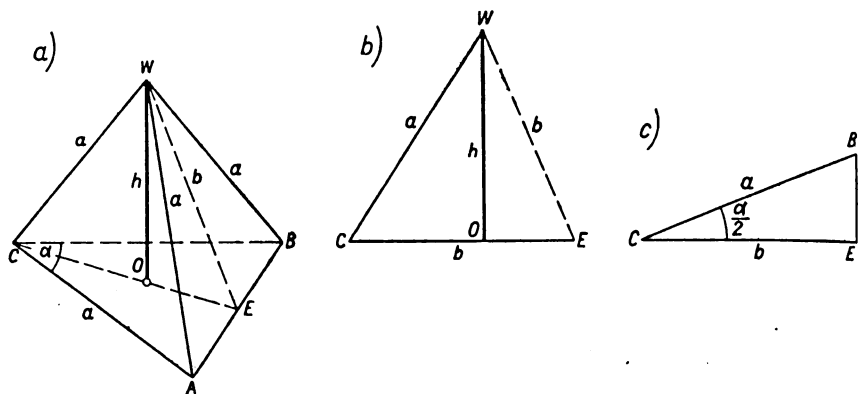
**Pole powierzchni ostrosłupa**

$$S = S_0 + 4S_1 = a^2 \sin \alpha + a^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = a^2 \sin \alpha \left( 1 + \frac{1}{\cos \beta} \right) = 2a^2 \sin \alpha \frac{\cos^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}$$

**Przykład 11 (ostrosłup trójkątny nieprawidłowy).** W ostrosłupie trójkątnym wszystkie krawędzie boczne i dwa boki podstawy są równe  $a$ . Kąt między równymi bokami podstawy jest równy  $\alpha$ . Obliczyć objętość i pole całkowitej powierzchni ostrosłupa uważając  $a$  i  $\alpha$  za wiadome.

**Rozwiązanie** (rys. 134-9). Krawędź  $AB$  nie jest znana. Wszystkie pozostałe krawędzie są równe  $a$ . Ściana boczna  $ABW$  jest przystająca do podstawy  $ABC$  i każda z nich ma pole

$$\text{pole } \triangle ABW = \text{pole } \triangle ABC = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$$



Rys. 134-9

Pozostałe dwie ściany boczne są przystającymi trójkątami równobocznymi i każda z nich ma pole

$$\text{pole } \triangle ACW = \text{pole } \triangle BCW = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

Pole całkowitej powierzchni bryły

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha + \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha + \frac{a^2}{4} \sqrt{3} + \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = a^2 \left( \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Wyrażenie w nawiasie można sprowadzić do postaci logarytmowalnej

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin \alpha + \sin 60^\circ = 2 \sin \frac{\alpha + 60^\circ}{2} \cos \frac{\alpha - 60^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin \left( 30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( 30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

Dla obliczenia objętości potrzebna jest wysokość ostrosłupa  $WO = h$ . Jest ona jednocześnie wysokością trójkąta  $WCE$ , zatem

$$h = \frac{\text{pole } \triangle WCE}{\frac{1}{2} CE} = \frac{s}{\frac{1}{2} b} = \frac{2s}{b}$$

Odcinek  $b$  wyznaczmy z trójkąta  $CEB$

$$b = a \cos \frac{\alpha}{2} \quad (*)$$

a pole  $s$  trójkąta  $WCE$  ze wzoru Herona

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)} = (p-b) \sqrt{p(p-a)} \\ p &= \frac{1}{2} (a+b+b) = \frac{a}{2} + b, \quad p-a = b - \frac{a}{2}, \quad p-b = \frac{a}{2} \\ s &= \frac{a}{2} \sqrt{\left( \frac{a}{2} + b \right) \left( b - \frac{a}{2} \right)} = \frac{a}{2} \sqrt{b^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2} \\ h &= \frac{2s}{b} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

Podstawiając (\*) dostajemy

$$h = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$$

Znając wysokość obliczamy już łatwo objętość bryły

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \text{pole } ABC \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \cdot \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{6} a^3 \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} &= \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right) = \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \cos 60^\circ \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \cos 60^\circ \right) = \\ &= -2 \sin \left( \frac{\alpha}{4} + 30^\circ \right) \sin \left( \frac{\alpha}{4} - 30^\circ \right) \cdot 2 \cos \left( \frac{\alpha}{4} + 30^\circ \right) \cos \left( \frac{\alpha}{4} - 30^\circ \right) = \end{aligned}$$

(łącząc pierwszy czynnik z trzecim i drugi z czwartym)

$$= -\sin \left( \frac{\alpha}{2} + 60^\circ \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} - 60^\circ \right) = \sin \left( 60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( 60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{Odp. } V = \frac{1}{3} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \left( 60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( 60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Uwaga. Aby powyższy wzór nie stracił sensu, trzeba aby wyrażenie pod pierwiastkiem było dodatnie. Pierwszy czynnik jest na pewno dodatni, albowiem  $\alpha$ , jako kąt w trójkącie, spełnia nierówność

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

stąd

$$0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$$

$$60^\circ < 60^\circ + \frac{\alpha}{2} < 150^\circ$$

$$\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) > 0$$

Trzeba więc, aby drugi czynnik był dodatni. Zbadajmy znak drugiego czynnika. Z nierówności  $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$  wynika

$$0^\circ > -\frac{\alpha}{2} > -90^\circ$$

dodając  $60^\circ$  do wszystkich trzech „stron” tej nierówności, dostajemy

$$60^\circ > 60^\circ - \frac{\alpha}{2} > -30^\circ$$

i widać, że  $\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$  może być ujemny. Aby temu zapobiec, trzeba zażądać, by

$$60^\circ - \frac{\alpha}{2} > 0^\circ$$

czyli

$$\alpha < 120^\circ$$

Istotnie, dla kątów  $\alpha \geq 120^\circ$  nie da się zbudować czworokąta o pięciu krawędziach równych.

**Przykład 12 (ukośny przekrój ostrosłupa).** Prawidłowy ostrosłup czworokątny ma bok podstawy równy  $a$  i ściany boczne nachylone pod kątem  $\alpha$  do płaszczyzny podstawy. Przez jedną z krawędzi podstawy poprowadzono płaszczyznę nachyloną pod kątem  $\beta$  do podstawy ( $\beta < \alpha$ ). Obliczyć pole powstałego przekroju, uważając  $\alpha, \alpha, \beta$  za wiadome.

Rozwiązanie. Przekrój jest trapezem  $ABCD$  (rys. 134-10a), którego pole jest

$$S = \frac{1}{2} (AB + CD) HG$$

Znamy odcinek  $AB = a$ , trzeba obliczyć  $CD$  i  $HG$ .

$HG$  obliczamy z trójkąta  $HGE$  (rys. 134-10b) na podstawie twierdzenia sinusów

$$\frac{a}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{HG}{\sin \alpha} \quad \text{skąd} \quad HG = \frac{a \sin \alpha}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Następnie obliczamy  $CD$  leżący na ścianie bocznej (rys. 134-10c), Zachodzi proporcja

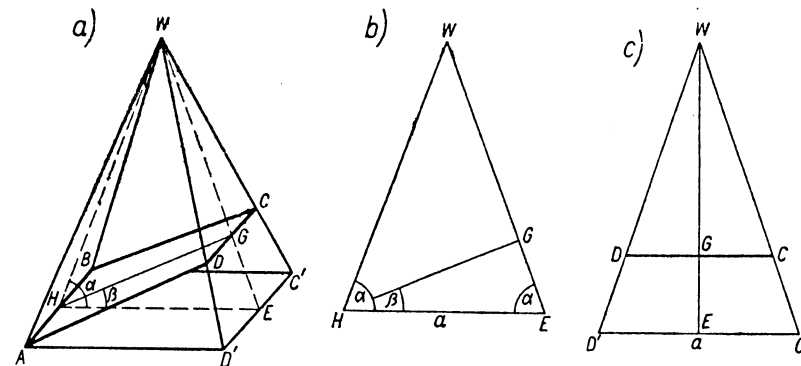
$$CD:GW = C'D':EW \quad \text{skąd} \quad CD = \frac{GW \cdot C'D'}{EW} \quad (*)$$

Trzeba tylko obliczyć trzy ostatnie odcinki. Bok  $GW$  obliczamy z trójkąta  $HGW$  (rys. 134-10b) według twierdzenia sinusów

$$\frac{GW}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{HG}{\sin(180^\circ - 2\alpha)},$$

$$GW = HG \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha}$$

Bok  $C'D'$  jest równy  $a$ .



Rys. 134-10

Bok  $EW$  obliczamy z trójkąta  $EWG$  (niech  $O$  będzie środkiem  $\overline{HE}$ )

$$EW = \frac{OE}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

Wstawiając znalezione wartości do wzoru (\*) na  $CD$ , dostajemy

$$CD = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha} \cdot a \frac{2 \cos \alpha}{a} = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Pole trapezu

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot HG = \frac{1}{2} \left[ a + \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right] \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = a^2 \frac{\sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

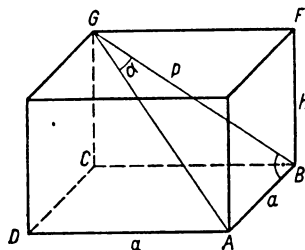
**Przykład 13.** W prostopadłościźnie podstawa jest kwadratem o boku  $a$ , zaś przekątna tworzy ze ścianą boczną kąt  $\alpha$ . Obliczyć objętość prostopadłościźnie.

Rozwiązanie (rys. 134-11). Niewiadomą wysokość bryły oznaczamy  $h$ , a przekątną ściany bocznej oznaczamy  $p$ .

Jest  $h^2 = GB^2 - GF^2 = p^2 - a^2$ , z trójkąta  $GBA$  jest  $p = a \operatorname{ctg} \alpha$ , więc

$$h^2 = a^2(\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1) = a^2 \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = a^2 \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Odp.  $V = a^2 h = a^3 \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}$ ,  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ .



Rys. 134-11

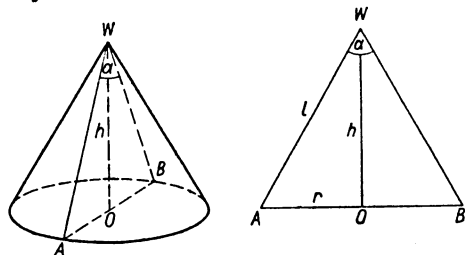
**Przykład 14.** Dana jest wysokość  $h$  i kąt rozwarcia  $\alpha$  stożka (obrotowego). Obliczyć objętość i pole pobocznicy tego stożka.

Rozwiązanie. Kreślimy szkic stożka i jego przekrój osiowy (rys. 134-12).  $\triangle AOW$  jest prostokątny,  $r$  promień stożka,  $l$  – tworząca stożka

$$\frac{r}{h} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{stąd} \quad r = h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{h}{l} = \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{stąd} \quad l = \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

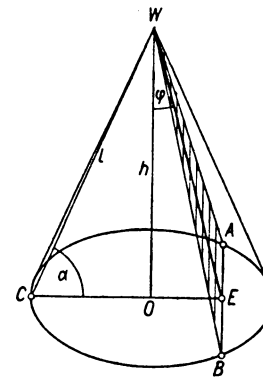
Pozostaje spróbować, czy uda się sprowadzić wyrażenie pod pierwiastkiem do postaci logarytmicznej



Rys. 134-12

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} h^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{Pole pobocznicy} = \pi r \cdot l = \pi h^2 \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

**Przykład 15 (ukośny przekrój stożka).** Promień stożka jest równy  $r$ , tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy kąt  $\alpha$ . Przez wierzchołek poprowadzono płaszczyznę tworzącą kąt  $\varphi$  z osią stożka. Obliczyć pole otrzymanego przekroju.



Rys. 134-13

Rozwiązanie. Przeprowadzamy osiowy przekrój stożka prostopadły do danego ukośnego przekroju (rys. 134-13). Rozważamy  $\triangle OWC$ ; jego bokami są:

$OW = h$  = wysokość stożka (niewiadoma),

$CW = l$  = tworząca stożka (niewiadoma),

$CO = r$  = promień stożka (wiadomy).

$$r:l = \cos \alpha \quad \text{stąd} \quad l = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$h:r = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{stąd} \quad h = r \operatorname{tg} \alpha$$

Rozważamy  $\triangle OWE$ ;  $WO:WE = \cos \varphi$ ;

$$WE = \frac{WO}{\cos \varphi} = \frac{h}{\cos \varphi} = \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi}$$

W ten sposób obliczyliśmy już wysokość  $WE$  przekroju  $ABW$ . Należy jeszcze obliczyć podstawę  $AB$  trójkąta  $ABW$  lub  $AE$ , tj. połowę tej podstawy.

Rozważamy trójkąt  $AEW$ ; jest to trójkąt prostokątny

$$AE^2 = WA^2 - WE^2 = l^2 - WE^2 = \left(\frac{r}{\cos \alpha}\right)^2 - \left(\frac{r \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi}\right)^2 = r^2 \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}$$

Różnicę  $\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha$  można sprowadzić do postaci iloczynu  $\cos(\varphi - \alpha) \cos(\varphi + \alpha)$

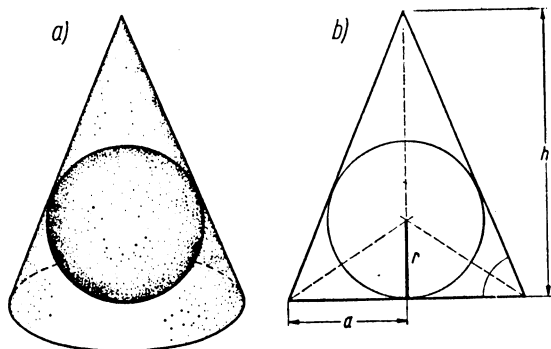
$$AE = r \frac{\sqrt{\cos(\varphi - \alpha) \cos(\varphi + \alpha)}}{\cos \alpha \cdot \cos \varphi}$$

$$\text{Pole } \triangle ABW = AE \cdot WE = r^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{\cos(\varphi - \alpha) \cos(\varphi + \alpha)}}{\cos \alpha \cdot \cos^2 \varphi}$$

**Przykład 16.** Wyznaczyć promień  $r$  kuli wpisanej w stożek o promieniu  $a$  i wysokości  $h$  (rys. 134-14).

**Rozwiązanie.** W przekroju osiowym stożka otrzymujemy jednocześnie przekrój kuli wzdłuż jej koła wielkiego. To koło jest wpisane w trójkąt, zatem jego promień

$$r = \frac{\text{pole trójkąta}}{\text{pół obwodu trójkąta}} = \frac{S}{p} = \frac{ah}{a+l} = \frac{ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}}$$

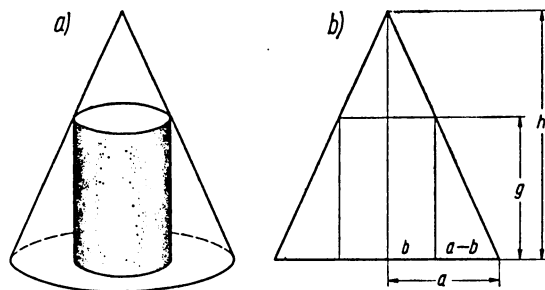


Rys. 134-14. Kula wpisana w stożek: a) rzut równoległy, b) przekrój osiowy

**Przykład 17.** W stożek o promieniu  $a$  i wysokości  $h$  wpisano walec o promieniu  $b$  i wysokości  $g$ . Znaleźć związek między wielkościami  $a$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $g$ .

**Rozwiązanie** (rys. 134-15). Z tw. Talesa otrzymujemy proporcję

$$g:h = (a-b):a$$



Rys. 134-15. Walec wpisany w stożek: a) rzut ukośny, b) przekrój osiowy

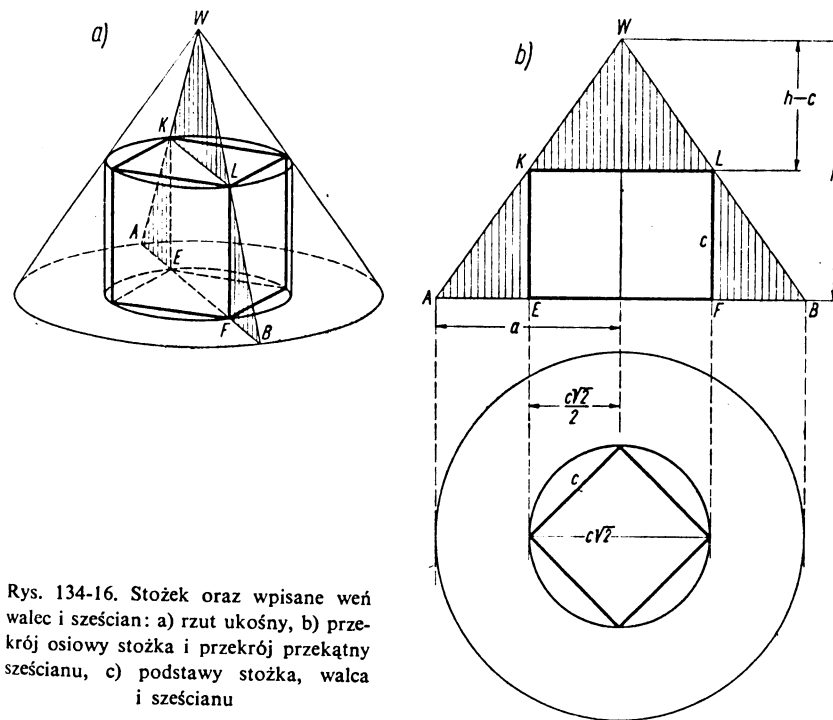
Jeśli więc będziemy mieli jakąś dodatkową informację o walcu, np. jeśli będzie dany stosunek jego promienia do wysokości

$$b:g = k \quad (k - \text{dane})$$

wówczas z równań obliczymy niewiadome  $b$  i  $g$

$$b = gk \quad g = \frac{ah}{a+kh}$$

**Przykład 18.** Wyznaczyć krawędź  $c$  sześcianu wpisanego w stożek o promieniu  $a$  i wysokości  $h$ .



Rys. 134-16. Stożek oraz wpisane wał i sześcian: a) rzut ukośny, b) przekrój osiowy stożka i przekrój przekątny sześcianu, c) podstawy stożka, walca i sześcianu

**Rozwiązanie.** Wprowadzając dodatkowo pomocniczy walec (rys. 134-16) o wysokości  $g = c$ , nawiązujemy do poprzedniego przykładu. Stosunek  $b:g$  jest w tym przypadku stosunkiem połowy przekątnej kwadratu do boku tego kwadratu, a więc  $b:g = k = 1:\sqrt{2}$ . Stąd  $c = g = ah/(a+h/\sqrt{2})$ .

**Przykład 19.** Trójkąt równoboczny o boku  $a$  obracając się dookoła jednego ze swych boków utworzył bryłę obrotową. Obliczyć jej objętość i pole powierzchni.

**Rozwiązanie.** Bryła składa się z dwóch stożków połączonych podstawami (rys. 134-17).

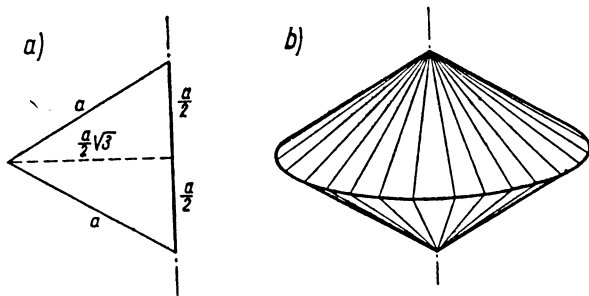
Objętość każdego z tych stożków równa się

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{a}{2} \sqrt{3} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi}{8} a^3$$

Objętość całej bryły obrotowej  $V = \frac{\pi}{4} a^3$ .

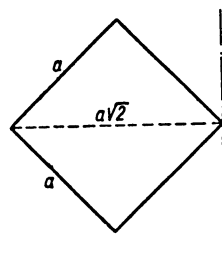
Pole całej bryły obrotowej jest sumą pól powierzchni bocznych obu składowych stożków

$$S = 2S_b = 2r\pi l = 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)\pi a = \pi\sqrt{3}a^2$$

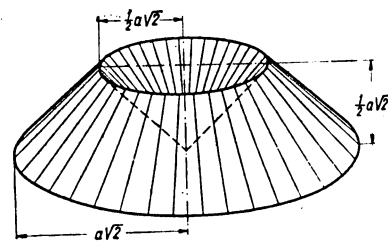


Rys. 134-17. Bryła obrotowa utworzona przez obrót trójkąta równobocznego dookoła jednego z jego boków

**Przykład 20.** Kwadrat o boku  $a$  obraca się dookoła prostej leżącej w płaszczyźnie kwadratu, przechodzącej przez wierzchołek i prostopadłej do przekątnej kwadratu wychodzącej z tego wierzchołka (rys. 134-18). Obliczyć objętość powstałej bryły obrotowej.



Rys. 134-18



Rys. 134-19

**Rozwiązanie.** Bryła jest sumą dwóch jednakowych stożków ściętych złączonych ze sobą większymi podstawami, w których wydrążono stożkowate leje; otwór takiego leja pokrywa się z mniejszą podstawą stożka, a głębokość leja sięga do większej podstawy tego stożka. Jeden z tak wydrążonych stożków ściętych pokazuje rys. 134-19.

Przy obliczaniu objętości należy objętość wydrążenia odejmować.

Przy obliczaniu pola powierzchni należy odpowiednie pole wydrążenia dawać.

Odp.  $V = \pi\sqrt{2}a^3$ .

## Zadania

- Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma bok podstawy  $a = 4$ , wysokość  $h = 6$ . Obliczyć
  - kąt  $\alpha$  ściany bocznej u wierzchołka ostrosłupa,
  - kąt  $\beta$  nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,
  - kąt  $\gamma$  nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,
  - kąt  $\varepsilon$  między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.
- Ostrosłup prawidłowy sześciokątny ma wysokość  $h$  dwa razy większą od boku podstawy  $a$ . Obliczyć
  - krawędź boczną  $b$ ,
  - kąt  $\alpha$  ściany bocznej u wierzchołka ostrosłupa,
  - kąt  $\beta$  nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,
  - kąt  $\gamma$  nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,
  - kąt  $\varepsilon$  między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.
- W graniastosłupie prostym o podstawie kwadratowej wysokość jest dwa razy większa od krawędzi podstawy. Obliczyć kąt  $\alpha$  nachylenia przekątnej bryły do płaszczyzny podstawy oraz kąt  $\beta$  nachylenia przekątnej bryły do ściany bocznej.
- Obliczyć wysokość  $h$  prawidłowego ostrosłupa czworokątnego o krawędzi podstawy równej  $a$  i kącie płaskim przypodstawnym ściany bocznej równym  $\alpha$  (rys. 134-5).
- Obliczyć wysokość  $h$  prawidłowego ostrosłupa czworokątnego o krawędzi podstawy równej  $a$  i kącie dwuściennym między przyległymi ścianami bocznymi równym  $\alpha$ .
- Obliczyć objętość ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku  $a$ , dwie ściany boczne są prostopadłe do podstawy ostrosłupa, a trzecia tworzy z nią kąt (dwuścienny)  $\beta$ .
- Obliczyć objętość ostrosłupa, którego wysokość jest równa  $h$ , krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$ , a w podstawie jest trójkąt o kątach  $\beta$  i  $\gamma$ .
- W prawidłowy ostrosłup czworokątny, którego ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt  $\alpha$ , wpisano w kulę i poprowadzono płaszczyznę styczną do tej kuli równoległą do płaszczyzny podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła ostrosłup na dwie części. Obliczyć stosunek objętości tych części w zależności od kąta  $\alpha$ .
- Podstawą ostrosłupa jest romb o boku  $a$  i kącie ostrym  $\alpha$ . Kąty dwuścienne przy podstawie są równe  $\beta$ . Obliczyć promień kuli wpisanej w ten ostrosłup.
- W ostrosłup, którego podstawą jest romb o kącie ostrym  $\alpha$  i którego ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\beta$ , wpisano kulę. Promień tej kuli jest  $r$ . Obliczyć objętość tego ostrosłupa, uważając  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  za wiadome.

11. Podstawą ostrosłupa jest romb o kącie ostrym  $\alpha$ . Ściany boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąty równe  $\beta$ . Koło wpisane w podstawę ma promień  $r$ . Obliczyć objętość ostrosłupa.
12. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, którego ramiona są równe  $a$  i tworzą kąt  $\alpha$ . Krawędź wychodząca z wierzchołka tego kąta jest prostopadła do podstawy. Pozostałe dwie krawędzie boczne tworzą ze sobą kąt  $\beta$ . Obliczyć objętość ostrosłupa, uważając  $a, \alpha, \beta$  za wiadome.
13. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy. Najdłuższa z krawędzi bocznych jest równa  $a$  i tworzy z dwiema krawędziami podstawy, z którymi się styka, kąty  $\alpha$  i  $\beta$ . Obliczyć objętość ostrosłupa.
14. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt. Dwie ściany boczne są prostopadłe do podstawy, a dwie pozostałe tworzą z nią kąty (dwuścienne)  $\alpha$  i  $\beta$ . Wysokość ostrosłupa jest równa  $h$ . Obliczyć pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
15. Ostrosłup ma w podstawie romb o boku  $a$  i kącie ostrym  $\alpha$ . Dwie ściany boczne są prostopadłe do podstawy, a dwie pozostałe tworzą z nią kąt  $\beta$ . Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
16. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, w którym są dane: bok  $a$  i dwa kąty przyległe  $\alpha, \beta$ . Krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\gamma$ . Obliczyć objętość ostrosłupa, uważając  $a, \alpha, \beta, \gamma$  za wiadome, a następnie obliczyć jej wartość liczbową przyjmując  $a = 14,37, \alpha = 62^\circ 39', \beta = 41^\circ 17', \gamma = 48^\circ 09'$ .
17. Ostrosłup prawidłowy trójkątny o boku podstawy równym  $a$  i kącie nachylenia krawędzi bocznych do podstawy  $\varphi$  przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$ . Obliczyć pole otrzymanego przekroju i stosunek tego pola do pola podstawy.
18. W graniastosłupie prostym o podstawie kwadratowej przekątna bryły tworzy z płaszczyzną podstawy kąt  $\alpha$ , a z krawędzią podstawy kąt  $\beta$ , który jest równy  $90^\circ - \alpha$ . Obliczyć stosunek wysokości do krawędzi podstawy.
19. Prawidłowy ostrosłup czworokątny ma wysokość  $h$  i kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku  $\alpha$ . Obliczyć objętość tego ostrosłupa.
20. Obliczyć kąt rozwarcia stożka, jeśli stosunek  $k$  pola powierzchni bocznej do pola podstawy jest równy 2.
21. Promień stożka jest równy  $r$ , a tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$ . Przez wierzchołek poprowadzono płaszczyznę tworzącą kąt  $\varphi$  z osią stożka. Płaszczyzna ta podzieliła stożek na dwie części: mniejszą i większą. Obliczyć stosunek  $x$  objętości części mniejszej do objętości całego stożka przyjmując dane:  $\alpha = 45^\circ, \varphi = 30^\circ$ .
22. Tworząca  $l$  stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$ . Obliczyć krawędź sześciangu wpisanego w ten stożek.
23. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$ . Obliczyć stosunek objętości kuli wpisanej w ten stożek do objętości stożka.
24. Kąt rozwarcia stożka (tj. kąt przy wierzchołku przekroju osiowego stożka) jest równy  $\alpha$ . Obliczyć kąt środkowy  $\beta$  rozwinięcia jego powierzchni bocznej na płaszczyźnie.
25. Stożek ścięty ma wysokość  $h$ . Jego tworząca jest nachylona do płaszczyzny dolnej podstawy pod kątem  $\alpha$  i jest prostopadła do prostej łączącej jej górny koniec z dolnym końcem tworzącej przeciwległej. Obliczyć pole bocznej powierzchni tego stożka ściętego.
26. Stożek ścięty ma tworzącą  $l$  nachyloną do płaszczyzny podstawy dolnej pod kątem  $\alpha$ . Przekątne przekroju osiowego stożka są prostopadłe do siebie. Obliczyć objętość, pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej stożka, uważając  $l$  i  $\alpha$  za wiadome; wykonać następnie obliczenia przyjmując dane:  $l = 12, \alpha = 70^\circ 20'$ .
27. Trójkąt równoramienny o ramieniu  $b$  i kącie ostrym  $\alpha$  u wierzchołka obraca się dookoła jednego ze swych ramion. Obliczyć objętość i pole powstałej bryły obrotowej.
28. Romb o kącie ostrym  $\alpha$  i boku  $a$  obraca się dookoła prostej leżącej w płaszczyźnie rombu, przechodzącej przez wierzchołek kąta ostrego  $\alpha$  i prostopadłej do jednego z boków rombu. Obliczyć objętość bryły obrotowej powstałej w ten sposób.

#### Odpowiedzi do rozdziału XX

131.

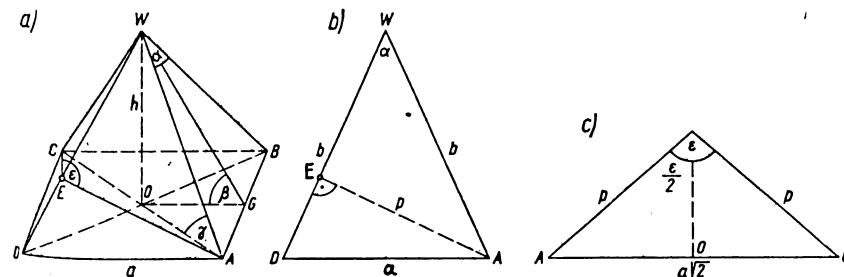
1.  $a^2 \sqrt{3}/8$ ;  $KLM$  jest równoboczny,  $KLN$  jest równoramienny i ma kąt  $120^\circ$ . 2.  $V = 7 \sqrt{2} a^3/6$ . 3.  $a^3 \sqrt{2}/12, a^2(1 + \sqrt{3}/2)$ . 4.  $\frac{a^2}{2} \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$ . 5.  $7\pi r^3/9$ . 6.  $\pi s^3 \sqrt{15}/192$ .

132.

1.  $7\pi R^2/4$ .

133.

1.  $\pi(b-a)(3R^2 - a^2 - ab - b^2)/3$ .



Rys. 134-20

1.  $\operatorname{tg} \beta = 3$ ,  $\beta = 71^\circ 33'$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = 3\sqrt{2}/2$ ,  $\gamma = 64^\circ 46'$ , krawędź boczna  $b = \sqrt{44}$  (rys. 134-20),  $\sin(\alpha/2) = 1/\sqrt{11}$ ,  $\alpha = 35^\circ 06'$ ,  $p = 4\sqrt{10/11}$ ,  $\sin(\varepsilon/2) = \sqrt{0,55}$ ,  $\varepsilon = 95^\circ 44'$ .

2.  $b = a\sqrt{5}$ ,  $\sin(\alpha/2) = 1/(2\sqrt{5})$ ,  $\sin \alpha = \sqrt{19/10}$ ,  $\sin(\varepsilon/2) = \sqrt{15/19}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 4\sqrt{3}$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = 2$ .

3.  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ ,  $\alpha = 54^\circ 44'$ ,  $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{5}$ ,  $\beta = 24^\circ 06'$ .

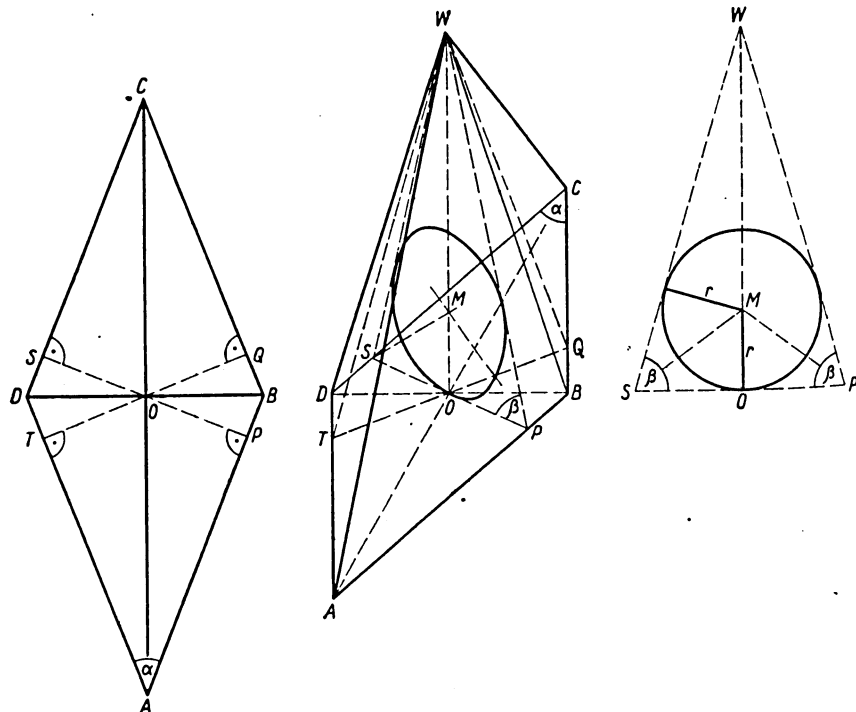
4.  $h = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\cos \alpha}$ ,  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,

5.  $h = a - \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-2\cos \alpha}}$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , 6.  $V = \frac{1}{8} a^3 \operatorname{tg} \beta$ ,

7.  $V = \frac{2}{3} h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin(\beta + \gamma)$ . 8.  $\frac{\operatorname{tg}^6 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^6 \frac{\alpha}{2}}$ .

9.  $AB = a$ ;  $AO = a \cos \frac{\alpha}{2}$ ;  $OP = OA \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ ;

$r = OM = OP \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{a}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$  (rys. 134-21).



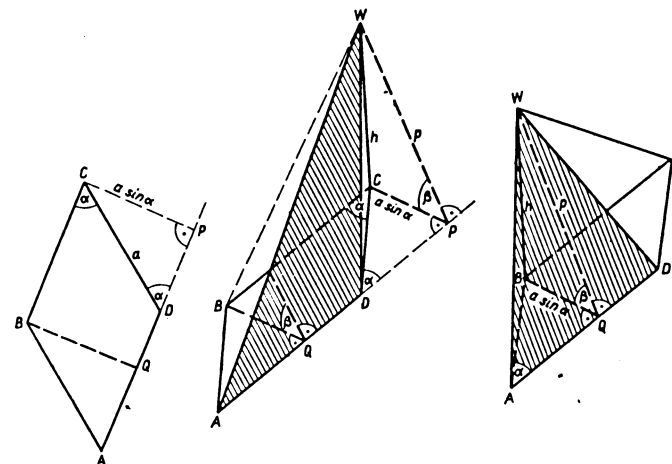
Rys. 134-21

$$10. \frac{4}{3} r^3 \operatorname{tg} \beta \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha}. \quad 11. \frac{4}{3} r^3 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}. \quad 12. \frac{a^3 \sin \alpha}{6 \sin \frac{\beta}{2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

$$13. \frac{1}{3} a^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

$$14. \frac{2h^2}{\sin \alpha \sin \beta} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right).$$

15. Ściany prostopadłe do podstawy przecinają się wzdłuż krawędzi bocznej, która jest zarazem wysokością  $h$  ostrosłupa (rys. 134-22). Możliwe są dwa przypadki zależnie od tego, czy krawędź  $h$  wychodzi z tego wierzchołka podstawy, który jest



Rys. 134-22

wierzchołkiem kąta ostrego  $\alpha$ , czy też z tego, który jest wierzchołkiem kąta rozwartego  $180^\circ - \alpha$ . Na rysunku są pokazane oba przypadki. W obydwu jest odpowiedź taka sama:

$$V = \frac{1}{3} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad S = a^2 \sin \alpha \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right).$$

$$16. V = \frac{a^3 \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \gamma}{12 \sin^2(\alpha + \beta)} = 171,8.$$

17.  $EB$  jest wysokością trójkąta równobocznego  $ABC$ , więc  $EB = \frac{a}{2} \sqrt{3}$  (rys. 134-23). Odcinek  $EG$  obliczamy z trójkąta  $EGB$  za pomocą twierdzenia sinusów

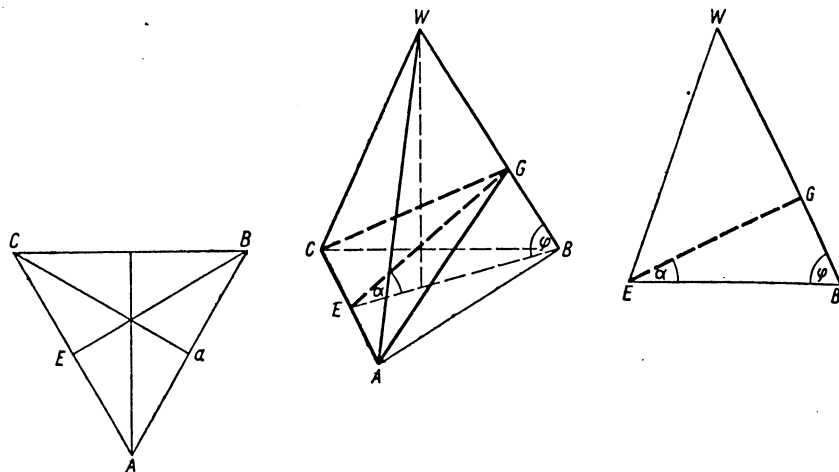
$$\frac{EG}{\sin \varphi} = \frac{EB}{\sin [180^\circ - (\alpha + \varphi)]}; \quad EG = \frac{EB \sin \varphi}{\sin [180^\circ - (\alpha + \varphi)]} = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{3} \sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

Pole przekroju  $ACG$  równa się

$$k = \frac{1}{2} AC \cdot EG = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

Pole podstawy  $ACB$  równa się

$$p = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$



Rys. 134-23

Stosunek tych pól wynosi

$$\frac{k}{p} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

18. Oznaczmy przez  $a$  krawędź podstawy, a przez  $h$  – wysokość bryły; mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{h}, \quad \frac{a^2 + h^2}{a^2} = \frac{2a^2}{h^2} \quad 1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{a}{h}\right)^2$$

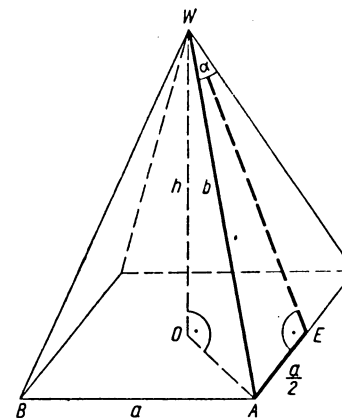
Oznaczmy  $x = \frac{h}{a}$ . Jest  $1 + x^2 = \frac{2}{x^2}$ ,  $x^4 + x^2 - 2 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $\frac{h}{a} = 1$ ; dany graniastosłup jest sześcianiem.

19. Oznaczmy przez  $a$  krawędź podstawy, przez  $b$  – krawędź boczną, przez  $OA$  – połowę przekątnej podstawy,  $OA = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$  (rys. 134-24) trójkąt  $WOA$  jest prostokątny;  $b^2 = AW^2 = WO^2 + OA^2 = h^2 + \frac{1}{2} a^2$ ; trójkąt  $WAE$  jest prostokątny

$$\frac{AE}{AW} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \sin \frac{\alpha}{2}; \quad a = 2b \sin \frac{\alpha}{2}; \quad a = 2 \sqrt{h^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Z tego ostatniego równania obliczamy

$$a^2 = \frac{4h^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}; \quad V = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{4h^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \cos \alpha}$$

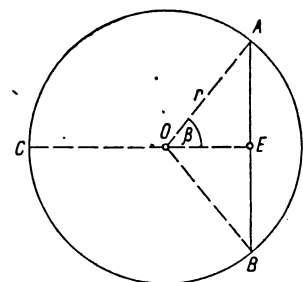


Rys. 134-24

$$20. \frac{S_b}{S_p} = \frac{\pi r l}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = k; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{l} = \frac{1}{k} = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 60^\circ.$$

21. Płaszczyzna  $WAB$  (rys. 134-13) dzieli objętość stożka w takim samym stosunku jak i pole jego podstawy

$$\frac{\text{objętość mniejszej części stożka}}{\text{objętość całego stożka}} = \frac{\text{pole mniejszego odcinka koła}}{\text{pole całego koła}} = x$$



Rys. 134-25

Pole odcinka  $AEBDA$  jest różnicą pola wycinka  $AOBDA$  i pola trójkąta  $AOB$  (rys. 134-25)

$$S_{odc} = S_{wyc} - S_{\Delta}$$

Pole wycinka pozostaje do pola koła w takim stosunku, jak kąt środkowy wycinka do kąta pełnego

$$S_{\text{wyc}} : S_{\text{koła}} = 2\beta : 360, \quad \text{stąd} \quad S_{\text{wyc}} = \frac{\beta\pi}{180} r^2 \quad (*)$$

Skorzystamy z rozwiązania przykładu 15 (str. 347), wstawiając dane  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$

$$AE = r \cdot \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha \cos \varphi} = \frac{\sqrt{6}}{3} r = 0,8165 r$$

$$\sin \beta = \frac{AE}{OA} = \frac{0,8165 r}{r} = 0,8165; \quad \beta = 54^\circ 44' = 54,73^\circ$$

Obliczenie  $S_{\text{wyc}}$  według wzoru (\*)

$$\lg \beta = 1,7382$$

$$\lg \pi = 0,4971$$

$$\lg \beta \pi = 2,2353$$

$$\lg \beta \pi = 2,2353$$

$$\lg 180 = 2,2553$$

$$\lg \frac{\beta\pi}{180} = 1,9800, \quad \frac{\beta\pi}{180} = 0,9550, \quad S_{\text{wyc}} = 0,9550 r^2$$

Obliczenie pola trójkąta  $AOB$  wymaga uprzedniego wyznaczenia  $OE$ . Z trójkąta  $OEW$  jest widoczne, że  $OE = h \operatorname{tg} \varphi = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi = r \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}}$ ;

$$S_{\Delta} = OE \cdot AE = \frac{r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} r = \frac{\sqrt{2}}{3} r^2 = 0,4714 r^2$$

$$S_{\text{odc}} = S_{\text{wyc}} - S_{\Delta} = 0,9550 r^2 - 0,4714 r^2 = 0,4836 r^2$$

$$x = \frac{S_{\text{odc}}}{S_{\text{koła}}} = \frac{0,4836 r^2}{\pi r^2} = \frac{0,4836}{\pi};$$

$$\lg 0,4836 = 1,6844$$

$$\lg \pi = 0,4971; \quad x = 0,1539$$

$$\lg x = 1,1873$$

$$22. c = \frac{l\sqrt{2} \sin \alpha}{2 + \operatorname{tg} \alpha} \quad 23. \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{2 \cos^6 \frac{\alpha}{2}} = 4 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha$$

$$24. \beta = 360^\circ \sin \frac{\alpha}{2} \quad 25. S_b = \frac{\pi h^2}{\cos \alpha}$$

$$26. V = \frac{\pi}{12} l^3 \sin \alpha (2 - \cos 2\alpha) = 1181,5; \quad S_b = \pi l^2 \sin \alpha = 426;$$

$$S = 2\pi l^2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right) = 652,2.$$

$$27. V = \frac{\pi}{3} b^3 \sin^2 \alpha; \quad S = \pi b^2 \sin \alpha \left( 1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 2\pi b^2 \sin \alpha \left( \frac{1}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \\ = 2\pi b^2 \sin \alpha \left( \sin 30^\circ + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 4\pi b^2 \sin \left( 15^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \cos \left( 15^\circ - \frac{\alpha}{4} \right).$$

$$28. V = 2\pi a^3 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Rozdział XXI

GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE

135. Współrzędne punktu i wektora na płaszczyźnie

Metody geometrii analitycznej. Geometrię analityczną zapoczątkował *René Descartes*, zwany też *Kartezjuszem*, matematyk i filozof francuski, który w dziele *La Geométrie*, wydanym w 1637 r., zastosował po raz pierwszy metodę analityczną. Metoda analityczna w planimetrii polega na wyznaczaniu punktu za pomocą pary liczb, zwanych współrzędnymi, a figury – za pomocą równania lub nierówności o dwóch zmiennych. Jeśli jest dana pewna figura  $f$ , np. prosta lub okrąg, to można ułożyć równanie, które jest spełnione przez współrzędne punktu wtedy i tylko wtedy gdy punkt należy do figury  $f$ . O równaniu takim mówimy, że jest to równanie figury  $f$ . Na odwrót, jeśli jest dane pewne równanie, to można wyznaczyć figurę odpowiadającą temu równaniu i na podstawie równania badać własności tej figury.

Podstawową rolę we współczesnym wykładzie geometrii analitycznej odgrywają wektory.

Miara wektora na osi. Niech będzie dana prosta. Obierzmy na niej dwa punkty: punkt początkowy  $O$  i punkt jednostkowy  $I$ . Nadajmy tej prostej zwrot od  $O$  do  $I$ . Otrzymaną w ten sposób oś  $\overline{OI}$  oznaczmy  $Ox$ . Odcinek  $\overline{OI}$  będziemy uważać za jednostkę długości

$$OI = 1$$

Wektor  $\overline{OI}$  będziemy nazywać *wersorem* (wektorem jednostkowym) osi  $Ox$  i oznaczać  $\vec{i}$

$$\overline{OI} = \vec{i}$$

Niech  $\vec{v}$  będzie dowolnym wektorem na osi  $Ox$  i niech  $v$  oznacza długość (moduł) tego wektora.

Miarą wektora  $\vec{v}$  na osi  $Ox$  nazywamy liczbę  $v_x$ , która równa się długości tego wektora wziętej z odpowiednim znakiem, a mianowicie:

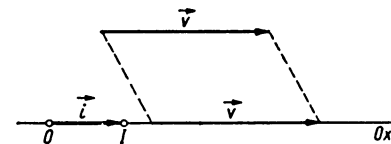
$v_x = +v$ , gdy wektor jest skierowany zgodnie z osią  $Ox$ ,

$v_x = -v$ , gdy wektor jest skierowany niezgodnie z osią  $Ox$ ;

miarą wektora zerowego jest zero.

Powyższe określenie stosuje się nie tylko, gdy wektor leży na danej osi, ale także wtedy, gdy jest z nią kolinearny (rys. 135-1). Każdy wektor kolinearny z pewną

osią ma określoną miarę na tej osi. Na odwrót, jeśli wiadomo, że wektor jest kolinearny z osią i jeśli jest dana miara tego wektora na tej osi, to wektor ten jest określony jako wektor swobodny (jego punktu zaczepienia nie znamy).



Rys. 135-1

Każdy wektor  $\vec{v}$  leżący na osi  $Ox$  lub kolinearny z osią  $Ox$  można przedstawić w postaci iloczynu miary tego wektora i wersora osi

$$\vec{v} = v_x \vec{i} \quad (135.1)$$

Miarę wektora na osi nazywamy też *współrzedną wektora na osi*. Wprowadzenie współrzednej wektora na osi jest podstawą metody analitycznej w geometrii, gdyż sprowadza działania na wektorach do działań na liczbach.

Działania na wektorach i działania na ich współrzednych. Rozważając jednocześnie kilka wektorów  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ , oznaczamy ich miary odpowiednio:  $u_x$ ,  $v_x$ ,  $w_x$ .

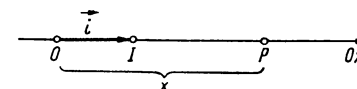
**Twierdzenie 135.1.** Jeśli wektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  leżą na osi  $Ox$ , względnie są z nią kolinearne, to równość tych wektorów jest równoważna równości ich współrzednych, a działaniom na tych wektorach odpowiadają analogiczne działania na ich współrzednych, a mianowicie:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{v} && \Leftrightarrow u_x = v_x \\ \vec{w} &= \vec{u} + \vec{v} && \Leftrightarrow w_x = u_x + v_x \\ \vec{w} &= \vec{u} - \vec{v} && \Leftrightarrow w_x = u_x - v_x \\ \vec{w} &= k\vec{v} && \Leftrightarrow w_x = kv_x \end{aligned}$$

**Współrzedna punktu na osi.** Niech  $P$  będzie dowolnym punktem osi  $Ox$  (rys. 135-2). Wektor  $\overline{OP}$ , zwany *wektorem wodzącym* punktu  $P$  wyprowadzonym z punktu początkowego osi, można przedstawić w postaci iloczynu wersora osi i stosownie dobranej liczby  $x$

$$\overline{OP} = x \vec{i} \quad (135.2)$$

Liczbę  $x$  nazywamy *współrzedną punktu  $P$  na osi  $Ox$* . Można powiedzieć, że współrzedna punktu jest to współrzedna wektora wodzącego tego punktu.



Rys. 135-2

Każdemu punktowi prostej  $OI$  została w ten sposób przyporządkowana liczba  $x$  stanowiąca współrzedną tego punktu. Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne. Prosta, na której w ten sposób odwzorowano zbiór liczb rzeczywistych,

nazywamy *osią liczbową*. Oś liczbową o punkcie początkowym  $O$  i współrzędnej  $x$  będziemy oznaczali  $Ox$ .

Jeśli rozważamy jednocześnie kilka punktów na osi  $Ox$

$$P \quad A \quad B \quad P_0 \quad P_1$$

to ich współrzędne oznaczamy odpowiednio

$$x \quad x_A \quad x_B \quad x_0 \quad x_1$$

Dla każdego z tych punktów zachodzi równość analogiczna do (135.2), np.

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} \quad \overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} \quad (135.3)$$

**Współrzędna wektora i współrzędne punktów wyznaczających wektor**

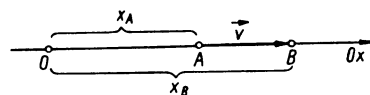
**Twierdzenie 135.2.** Jeśli wektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

leży na osi  $Ox$ , to zachodzi równość

$$v_x = x_B - x_A \quad (135.4)$$

Wynika stąd, że aby otrzymać współrzędną wektora należy od współrzędnej końca odjąć współrzędną początku (rys. 135-3).



Rys. 135-3

**Dowód.** Dla dowolnych punktów  $A, O, B$  prawdziwą jest równość  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ , zatem

$$\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Korzystając z (135.1) i (135.3), możemy tę równość zapisać w postaci

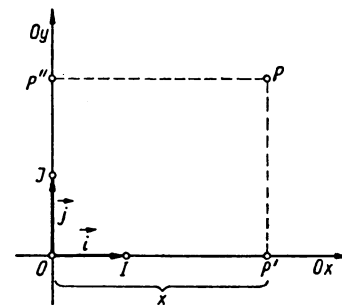
$$v_x \vec{i} = x_B \vec{i} - x_A \vec{i} = (x_B - x_A) \vec{i}$$

Z równości tych wektorów wynika równość ich miar  $v_x = x_B - x_A$  cnu.

**Współrzędne punktu na płaszczyźnie.** Obierzmy na płaszczyźnie dwie wzajemnie prostopadłe osie liczbowe o wspólnym początku  $O$  i jednakowych jednostkach  $OI = OJ = 1$ . Wersor pierwszej osi oznaczmy  $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ , wersor drugiej osi  $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ . Współrzędną punktu na pierwszej osi oznaczmy  $x$ , a na drugiej  $y$ . W związku z tym, osie te oznaczmy  $Ox$  i  $Oy$ , a płaszczyznę wraz z tymi osiami oznaczmy  $Oxy$ .

Proste  $Ox$  i  $Oy$  tworzą *układ rzutowania*: jeśli  $Ox$  jest rzutnią, to  $Oy$  jest kierunkiem rzutu i na odwrót. Niech  $P$  będzie dowolnym punktem płaszczyzny  $Oxy$ ,  $P'$  jego rzutem na  $Ox$ , a  $P''$  jego rzutem na  $Oy$ . Niech  $x$  będzie współrzędną punktu  $P'$  na  $Ox$ , zaś  $y$  – współrzędną punktu  $P''$  na  $Oy$  (rys. 135-4). Parę liczb  $(x, y)$  nazywamy *parą współrzędnych punktu  $P$  na płaszczyźnie  $Oxy$* , liczbę  $x$  nazywamy

*współrzędną pierwszą* czyli *odciętą* punktu  $P$ , a liczbę  $y$  – *współrzędną drugą* czyli *rzędną* punktu  $P$ . Mówiąc „współrzędne punktu” będziemy mieć zawsze na myśli parę liczb o ustalonej kolejności: najpierw  $x$ , a potem  $y$ .



Rys. 135-4

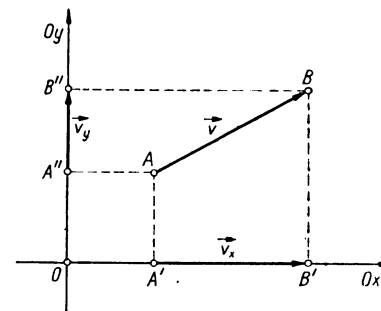
Wprowadzoną w ten sposób wzajemnie jednoznaczność między punktami płaszczyzny a parami liczb nazywamy *układem współrzędnych prostokątnych kartezjańskich*. Punkt  $O$  nazywamy *początkiem układu*, osie  $Ox$  i  $Oy$  – *osiąmi układu*, a wektory  $\vec{i}, \vec{j}$  – *wersorami układu*.

**Współrzędne wektora na płaszczyźnie.** Niech będzie dany na płaszczyźnie  $Oxy$  wektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

Rzuty tego wektora na osie układu (rys. 135-5)

$$\vec{v}_x = \overrightarrow{A'B'} \quad \vec{v}_y = \overrightarrow{A''B''} \quad (135.5)$$



Rys. 135-5

są *wektorami składowymi* wektora  $\vec{v}$ . Suma (wektorowa) tych wektorów jest równa wektorowi  $\vec{v}$

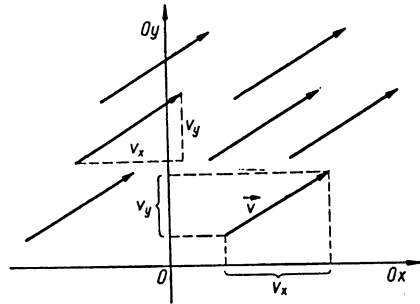
$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \quad (135.6)$$

Natomiast miary tych wektorów są liczbami

$$v_x, v_y \quad (135.7)$$

które nazywamy *współrzednymi* wektora  $\vec{v}$ .

Każdy wektor na płaszczyźnie  $Oxy$  (zaczepiony lub swobodny) ma określoną parę współrzednych. Zauważmy, że translacja wektora nie zmienia jego współrzednych (rys. 135-6). Znając współrzedne wektora możemy skonstruować ten wektor



Rys. 135-6. Współrzedne  $v_x, v_y$  wektora wyznaczają ten wektor jako wektor swobodny

jako wektor swobodny. Dla wyznaczenia wektora zaczepionego potrzebna jest jeszcze druga para liczb: para współrzednych punktu zaczepienia. Tak więc w układzie  $Oxy$  para liczb wyznacza punkt i para liczb wyznacza wektor swobodny. Dla odróżnienia:

– parę liczb wyznaczających punkt będziemy ujmować w nawiasy małe i pisać je obok litery oznaczającej dany punkt

$$P(x, y)$$

– parę liczb wyznaczających wektor będziemy ujmować w nawiasy klamrowe i traktować na równi z symbolem wektora

$$\vec{v} = [v_x, v_y]$$

**Obliczenie modułu wektora.** Moduł (długość) wektora i współrzedne wektora łączy związek (tw. Pitagorasa)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (135.8)$$

Porównanie wzorów (135.6) i (135.8) uwidacznia różnicę między pojęciami: „składowe” i „współrzedne”.

**Przedstawienie wektora za pomocą jego współrzednych i wersorów układu**

**Twierdzenie 135.3.** Dowolny wektor płaszczyzny  $Oxy$  można przedstawić jako sumę wersorów układu mnożonych przez odpowiednie współrzedne wektora

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad (135.9)$$

**Dowód.** Każdy z wektorów składowych (135.5) można przedstawić wzorem analogicznym do (135.1)

$$\vec{v}_x = v_x \vec{i} \quad \vec{v}_y = v_y \vec{j}$$

Wstawiając to do (135.6), otrzymujemy (135.9).

### Działania na wektorach i działania na współrzednych wektorów

**Twierdzenie 135.4.** Jeśli wektory  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  leżą w płaszczyźnie  $Oxy$ , to równość tych wektorów, oraz działania na nich przenoszą się na pary ich współrzednych, a mianowicie

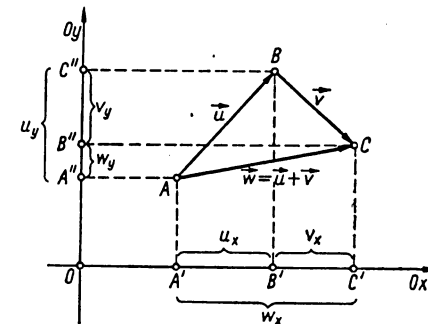
$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_x = v_x \quad u_y = v_y \quad (135.10)$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow w_x = u_x + v_x \quad w_y = u_y + v_y \quad (135.11)$$

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} \Leftrightarrow w_x = u_x - v_x \quad w_y = u_y - v_y \quad (135.12)$$

$$\vec{w} = k\vec{v} \Leftrightarrow w_x = kv_x \quad w_y = kv_y \quad (135.13)$$

**Dowód** (135.10) opiera się na tw. 84.5 i na tym, że para współrzednych wyznacza wektor swobodny na płaszczyźnie  $Oxy$ ; dowód (135.11) opiera się na tw. 81.12 o rzucie sumy wektorów (rys. 135-7); dowód (135.12) jest podobny; dowód (135.13) opiera się na tw. 84.12.



Rys. 135-7

**Współrzedne wektora i współrzedne punktów wyznaczających ten wektor**

**Twierdzenie 135.5.** Jeśli wektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

leży na płaszczyźnie  $Oxy$ , to zachodzą równości

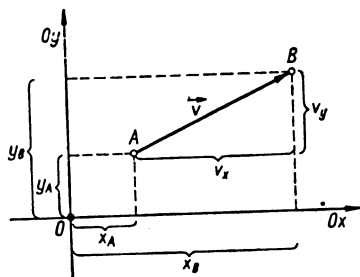
$$v_x = x_B - x_A \quad v_y = y_B - y_A \quad (135.14)$$

Oznacza to, że aby otrzymać współrzedne wektora, należy utworzyć różnice jednoczesnych współrzednych końca i początku tego wektora

Dowód (rys. 135-8) podobny do dowodu twierdzenia 135.2.

Odległość dwóch punktów (długość odcinka) wyraża się wzorem

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (135.15)$$



Rys. 135-8

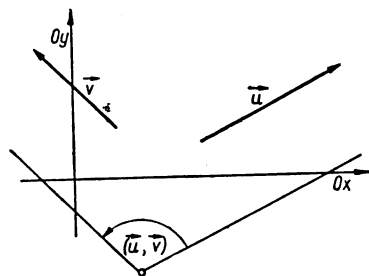
**Dowód.** Długość odcinka  $\overline{AB}$  i moduł wektora  $\overrightarrow{AB}$  – to jedno i to samo. Z twierdzenia 135.5 i wzoru (135.8) wynika

$$AB = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \text{cnu.}$$

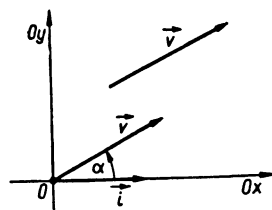
**Kąt dwóch wektorów.** Niech  $\vec{u}, \vec{v}$  będą wektorami niezerowymi na płaszczyźnie  $Oxy$ . Kątem skierowanym wektorów  $\vec{u}, \vec{v}$

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{lub krócej} \quad (\vec{u}, \vec{v})$$

będziemy nazywać swobodny kąt skierowany, którego pierwsze ramię ma kierunek i zwrot wektora  $\vec{u}$ , a drugie ramię ma kierunek i zwrot wektora  $\vec{v}$  (rys. 135-9).



Rys. 135-9



Rys. 135-10

Przez kąt wektora z osią będziemy rozumieli kąt skierowany, którego pierwsze ramię ma kierunek i zwrot osi, a drugie ramię ma kierunek i zwrot wektora.

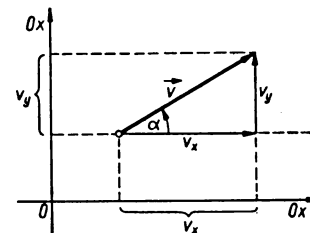
Przez kąt dwóch osi będziemy rozumieli kąt wersorów tych osi.

Przez kąt kierunkowy wektora  $\vec{v}$  będziemy rozumieli kąt wektora  $\vec{v}$  z osią  $Ox$  (rys. 135-10), tzn. kąt

$$\alpha = \angle(Ox, \vec{v})$$

**Związki między modułem, współrzędnymi i kątem kierunkowym wektora.** Z rys. 135-11 odczytujemy łatwo następujące związki

$$v_x = v \cos \alpha \quad v_y = v \sin \alpha \quad (135.16)$$



Rys. 135-11

Związki te pozwalają wyznaczyć współrzędne, gdy dany jest moduł i kąt kierunkowy. Na odwrót, gdy są dane współrzędne, wyznaczamy najpierw ze wzoru (135.8) moduł

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (135.17)$$

a następnie cosinus i sinus kąta kierunkowego

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} \quad \sin \alpha = \frac{v_y}{v} \quad (135.18)$$

co już pozwala wyznaczyć miarę kąta kierunkowego.

**Wyznaczenie kąta dwóch wektorów, jeśli są znane ich współrzędne.** Niech będą dane dwa niezerowe wektory

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \quad \vec{w} = [w_x, w_y]$$

Kąty kierunkowe tych wektorów oznaczmy

$$\alpha = \angle(Ox, \vec{v}) \quad \beta = \angle(Ox, \vec{w})$$

**Zagadnienie.** Wyznaczyć kąt

$$\varphi = \angle(\vec{v}, \vec{w})$$

**Rozwiązanie.** Dla dowolnych trzech osi  $a, b, c$  na płaszczyźnie  $Oxy$  zachodzi związek (zwany tw. Chasles'a dla kątów skierowanych)

$$\angle(a, c) = \angle(a, b) + \angle(b, c)$$

Zatem dla wektorów  $\vec{v}, \vec{w}$  i osi  $Ox$  mamy

$$\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \angle(\vec{v}, Ox) + \angle(Ox, \vec{w})$$

czyli

$$\varphi = (-\alpha) + \beta$$

Stąd

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{v_x}{v} \frac{w_x}{w} + \frac{v_y}{v} \frac{w_y}{w}$$

$$\sin \varphi = \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta = \frac{v_x}{v} \frac{w_y}{w} - \frac{v_y}{v} \frac{w_x}{w}$$

czyli

$$\cos \varphi = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{vw} \quad \sin \varphi = \frac{1}{vw} \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \quad (135.19)$$

(dla zapisania wzoru na sinus posłużyliśmy się wyznacznikiem, zob. cz. I, str. 106). Ze wzorów tych wynikają dwie ważne równości

$$vw \cos(\vec{v}, \vec{w}) = v_x w_x + v_y w_y \quad (135.20)$$

$$vw \sin(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \quad (135.21)$$

### Iloczyn skalarny dwóch wektorów

**Definicja 135.1.** Iloczyn skalarny dwóch wektorów  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ , oznaczany symbolem  $\vec{v} \cdot \vec{w}$

jest to liczba równa iloczynowi modułów tych wektorów i cosinusa kąta między nimi, gdy są to wektory niezerowe, tzn.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = vw \cos(\vec{v}, \vec{w}) \quad (135.22)$$

zaś równa zero, gdy  $v = 0$  lub  $w = 0$ .

**Twierdzenie 135.6.** Iloczyn skalarny dwóch wektorów równa się sumie iloczynów równomiennych współrzędnych tych wektorów

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y \quad (135.23)$$

**Dowód.** Prawdziwość twierdzenia wynika z def. 135.1 i ze wzoru (135.20).

**Uwaga.** Jeśli  $v \neq 0$  i  $w \neq 0$ , to mamy podwójną równość

$$vw \cos(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y \quad (135.24)$$

Jeśli  $v = 0$  lub  $w = 0$ , to kąt  $(\vec{v}, \vec{w})$  jest nieokreślony i formalnie rzecz biorąc, wyrażenie po lewej stronie nie ma sensu, ale pozostałe wyrażenia mają sens i są równe.

### Warunek prostokątności wektorów niezerowych

**Twierdzenie 135.7.** Jeśli dwa niezerowe wektory  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  są prostopadłe, to ich iloczyn skalarny jest równy zero

$$v_x w_x + v_y w_y = 0 \quad (135.25)$$

Na odwrót, jeśli powyższy warunek jest spełniony, to albo co najmniej jeden z tych wektorów jest zerowy albo wektory te są prostopadłe.

**Dowód** wynika z równości (135.24).

### Warunek równoległości wektorów niezerowych

**Twierdzenie 135.8.** Jeśli dwa niezerowe wektory  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  są równoległe, to wyznacznik tych wektorów jest równy zero

$$\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} = 0 \quad (135.26)$$

Na odwrót, jeśli wyznacznik dwóch wektorów jest równy zero, to albo co najmniej jeden z tych wektorów jest zerowy albo wektory te są równoległe.

**Dowód** wynika z równości (135.21).

**Uwaga 1.** Przyjmując umowę, że „wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora”, można uprościć wypowiedź tw. 135.8 i powiedzieć że „równość (135.26) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym równoległości wektorów”. Jednak taka uogólniona „równoległość” nie jest przechodnia:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  i  $\vec{b} \parallel \vec{c}$  nie zapewniają równoległości  $\vec{a} \parallel \vec{c}$  w przypadku, gdy  $\vec{b} = 0$ .

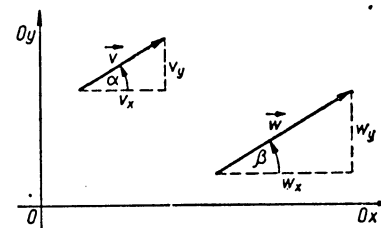
Dlatego, nie naruszając uprzednio wprowadzonego pojęcia równoległości wektorów niezerowych, wprowadzimy obecnie pojęcie kolinearności, definiując je następująco: *Wektory są kolinearne, jeśli po zaczepieniu: ich we wspólnym początku mieszczą się w jednej prostej.* Wówczas twierdzenie 135.8 brzmi:

*Warunkiem koniecznym i wystarczającym kolinearności dwóch wektorów jest zerowanie się ich wyznacznika.*

**Uwaga 2.** W przypadku wektorów niezerowych i nierównoległych do  $Oy$  z warunku (135.26) wynika proporcja

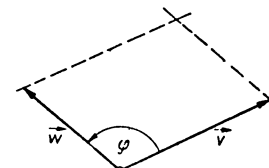
$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{w_y}{w_x} \quad (135.27)$$

która wyraża, że *tangensy kątów kierunkowych* wektorów równoległych są równe (rys. 135-12).



Rys. 135-12

**Pole równoległoboku** wyznaczonego przez dwa niezerowe wektory  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  zaczepione we wspólnym początku (rys. 135-13) jest równe modułowi wyznacznika (135.21).



Rys. 135-13

ujemny zależnie od tego, czy kąt  $\angle(\vec{v}, \vec{w})$  jest ostry, otrzymać pole trójkąta wyznaczonego przez wektory  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  jako połowę modułu wyznacznika tych wektorów.

### Iloczyn skalarny

Wektor  $\vec{v}$  ma następujące własności:

przez liczbę  $(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$   
 dla dowolnych wektorów  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

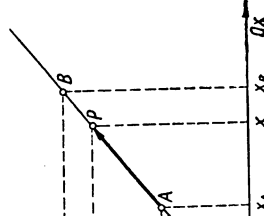
Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .



Rys. 135-14

(135.4) i (135.5) do współrzędnych, mamy

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= x_B - x_A \\ y_B - y_A &= y_B - y_A \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (135.29)$$

Wektor  $\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ .

do przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$  odpowiada pewien punkt  $P$ . Gdy  $t$  rośnie od 0 do 1, to punkt  $P$  przesuwa się po odcinku  $\overline{AB}$  od  $A$  do  $B$ . Dlatego nazywamy punkt  $P$  *punktem bieżącym odcinka*  $AB$ . Między punktami tego odcinka a liczbami przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$  istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość.

**Środek odcinka.** Środek  $S$  odcinka  $\overline{AB}$  jest punktem, dla którego

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

Aby wyznaczyć punkt  $S$ , podstawiamy do (135.28) i (135.29)  $t = 1/2$ . Otrzymujemy wówczas

$$x_S - x_A = \frac{1}{2} (x_B - x_A) \quad y_S - y_A = \frac{1}{2} (y_B - y_A)$$

skąd

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (135.30)$$

Wykazaliśmy, że *współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi równomiernych współrzędnych końców odcinka*.

**Punkt bieżący prostej  $AB$**  jest wyznaczony równaniami (135.29) przy założeniu, że  $t$  jest dowolną liczbą rzeczywistą. Warunek ten zwykle pomijamy w zapisie i *równania parametryczne prostej  $AB$*  zapisujemy w postaci wektorowej

$$\overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB} \quad (135.31)$$

i w postaci analitycznej

$$\begin{aligned} x - x_A &= t(x_B - x_A) \\ y - y_A &= t(y_B - y_A) \end{aligned} \quad (135.32)$$

**Podział odcinka (inne ujęcie).** Zastępując warunek (135.31) warunkiem

$$\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{PB} \quad (135.33)$$

otrzymujemy równania parametryczne prostej  $AB$  w postaci

$$x = \frac{x_A + kx_B}{1+k} \quad y = \frac{y_A + ky_B}{1+k} \quad (135.34)$$

Parametrem jest tu  $k$ . Odpowiedniość między wartościami  $k$  i punktami  $P$  w równaniach powyższych jest inna niż odpowiedniość między  $t$  i  $P$  w równaniach (135.31) i (135.32). Środkowi odcinka  $AB$  odpowiada wartość  $k = 1$ . Porównanie tych dwóch parametrów punktu na prostej przedstawia poniższa tabela

|   | A          | B         |
|---|------------|-----------|
| t | t < 0      | 0 < t < 1 |
| k | -1 < k < 0 | 0 < k     |
|   | ∞          | k < -1    |

$k$  dąży do  $+\infty$ , gdy  $P$  dąży do  $B$  od strony  $A$ ;  $k$  dąży do  $-\infty$ , gdy  $P$  dąży do  $B$  z przeciwnej strony. Punkt  $P$  dzieli odcinek  $\overline{AB}$  w stosunku  $k$ ; podział ten jest wewnętrzny dla  $k > 0$ , zaś zewnętrzny dla  $k < 0$ .

1. Co to jest wektor? Kiedy dwa wektory są równe, a kiedy przeciwne? Czym różni się równość wektorów od równości odcinków? Co to jest wersor? Co to jest wektor zerowy?
2. Jak tworzymy sumę i różnicę dwóch danych wektorów?
3. Wypowiedzieć prawo łączności i prawo przemienności dodawania wektorów. Objasnić je na rysunkach.
4. Wypowiedzieć i objasnić na rysunkach prawo trójkąta (o module sumy i sumie modułów).
5. Co to jest iloczyn wektora przez liczbę?
6. Co to są wektory kolinearne? Co to są wektory komplanarne?
7. Wypowiedzieć definicję kąta dwóch wektorów.
8. Czym są współrzędne wektora i współrzędne punktu w układzie  $Oxy$ ?
9. Napisać wzór na odległość dowolnego punktu płaszczyzny  $Oxy$ :  
a) od początku układu; b) od innego punktu płaszczyzny  $Oxy$ .
10. Napisać wzór na moduł wektora, którego współrzędne są dane.
11. Co to jest kąt kierunkowy wektora na płaszczyźnie  $Oxy$ ?
12. Jakie są związki między kątem kierunkowym i współrzędnymi wektora na płaszczyźnie  $Oxy$ ?
13. Jak za pomocą współrzędnych w układzie  $Oxy$  wyrażają się:  
1) równość wektorów, 2) ich suma, 3) różnica, 4) iloczyn wektora przez liczbę, 5) iloczyn skalarny, 6) cosinus kąta między dwoma wektorami, 7) warunek prostokątności, 8) warunek równoległości?
14. Jak obliczyć współrzędne wektora, gdy dane są współrzędne początku i końca wektora?
15. Jak za pomocą współrzędnych punktów wyznacza się: 1) długość odcinka, 2) środek odcinka, 3) punkt dzielący odcinek w danym stosunku?
16. Co to jest iloczyn skalarny? Napisz wzory na iloczyn skalarny.
17. Znaleźć na płaszczyźnie  $Oxy$  punkt symetryczny do punktu  $(4, -1)$  względem:  
a) osi odciętych, b) dwusiecznej I i III ćwiartki, c) osi rzędnych, d) początku układu.
18. Kwadrat ma bok równy 2. Jakie są współrzędne jego wierzchołków, jeśli przekątne leżą na osiach układu?
19. Romb ma bok równy 5 i przekątną równą 6. Jakie są współrzędne wierzchołków, jeśli przekątne leżą na osiach układu?
20. Trójkąt  $ABC$  o bokach  $AB = \sqrt{10}$ ,  $BC = CA = 5$  leży na płaszczyźnie  $Oxy$  tak, że bok  $AC$  leży na osi  $Ox$ , a wierzchołek  $B$  na dodatniej półosi  $Oy$ . Wyznaczyć współrzędne wierzchołków.
21. Dane są moduły wektorów  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  oraz moduł  $s$  ich sumy  $\vec{a} + \vec{b}$ . Obliczyć moduł różnicy tych wektorów. (Wsk.: tw. cosinusów.)
22. Wektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  o modułach  $u = 3$ ,  $v = 5$  tworzą kąt  $120^\circ$ . Obliczyć moduł sumy i moduł różnicy tych wektorów.

23. Punkt  $S$  jest punktem przecięcia się środkowych trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że  $\vec{OS} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ .
24. Wykazać, że trójkąt o wierzchołkach  $(3, 2)$ ,  $(6, 5)$ ,  $(1, 10)$  jest prostokątny.
25. Obliczyć obwód trójkąta o wierzchołkach  $(2, 3)$ ,  $(-3, 3)$ ,  $(0, -1)$ .
26. Obliczyć długości środkowych trójkąta o wierzchołkach  $(2, 1)$ ,  $(-2, 3)$ ,  $(0, 3)$ .
27. Do jakiego punktu należy przedłużyć wektor o początku  $(1, -1)$  i końcu  $(-4, 5)$ , aby jego długość potroiła się?
28. Podzielić odcinek łączący punkty  $(0, 2)$ ,  $(8, 0)$  na części proporcjonalne do odległości tych punktów od początku układu.
29. Dane są wektory  $\vec{p} = [2, -3]$ ,  $\vec{q} = [1, 2]$  oraz  $\vec{a} = [9, 4]$ . Obliczyć współczynniki  $k$ ,  $l$  pozwalające wyrazić wektor  $\vec{a}$  w postaci  $k\vec{p} + l\vec{q}$ .
30. Zbadać czy punkty  $(2, 3)$ ,  $(5, 7)$ ,  $(11, 15)$  leżą na jednej prostej. (Wsk.: warunek równoległości wektorów).
31. Wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  o modułach  $a = 3$ ,  $b = 4$  tworzą kąt  $120^\circ$ . Obliczyć  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ ,  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ ,  $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ ,  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ ,  $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$ .
32. Wykazać, że wektor  $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  jest prostopadły do  $\vec{a}$ .

### 136. Równanie linii prostej na płaszczyźnie

Równaniem prostej  $l$  nazywamy równanie, które jest spełnione przez współrzędne każdego punktu należącego do prostej  $l$ , a jest niespełnione przez współrzędne każdego punktu nie należącego do prostej  $l$ . Równanie prostej może być zapisane *wektorowo* (za pomocą wektorów) lub *analitycznie* (za pomocą współrzędnych). Przy układaniu równania dążymy zwykle do otrzymania zapisu analitycznego, a zapis wektorowy traktujemy jako etap przejściowy. Mówiąc „równanie prostej”, będziemy mieli na myśli równanie zapisane analitycznie.

Równanie prostej zawiera pewien *sens geometryczny*, zależny od *sposobu wyznaczenia prostej*. Z sensu tego korzystamy przy układaniu równania prostej. Ale potem wykonujemy uproszczenia i redukcje, sens geometryczny zacierają się, a dochodzimy do równania o określonej *postaci (budowie algebraicznej)*.

Poniżej wymieniamy najważniejsze sposoby wyznaczenia prostej na płaszczyźnie i kilka postaci równania prostej. Później omówimy je dokładniej.

**Sposób wyznaczenia prostej (sens geometryczny równania).** Prosta może być wyznaczona na płaszczyźnie na kilka sposobów, np. może to być:

- 1 — prosta przechodząca przez dany punkt i prostopadła do danego wektora;
- 2 — prosta przechodząca przez dany punkt i równoległa do danego wektora;
- 3 — prosta przechodząca przez dany punkt i nachylona do osi odciętych pod danym kątem;
- 4 — prosta przechodząca przez dane dwa różne punkty.

Przypadki szczególne:

2\* — prosta przechodząca przez dany punkt i równoległa do jednej z osi układu;

4\* — prosta odcinająca na osiach układu dwa wektory o danych miarach.

**Postać (budowa algebraiczna) równania prostej.** Równanie prostej zapisujemy zwykle w jednej z następujących postaci:

| Nazwa postaci | Równanie                                                       | Założenie                 | Zastrzeżenie |
|---------------|----------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------|
| ogólna        | $Ax + By + C = 0$                                              | $A \neq 0$ lub $B \neq 0$ |              |
| wyznacznikowa | $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ p & q \end{vmatrix} = 0$     | $p \neq 0$ lub $q \neq 0$ |              |
| kierunkowa    | $y = mx + b$                                                   |                           | 1)           |
| odcinkowa     | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$                                | $a \neq 0$ i $b \neq 0$   | 2)           |
| parametryczna | $\begin{aligned} x &= x_0 + pt \\ y &= y_0 + qt \end{aligned}$ | $p \neq 0$ lub $q \neq 0$ |              |

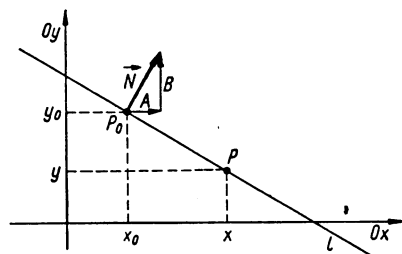
1) nie stosuje się w przypadku prostej równoległej do  $Oy$ ;

2) nie stosuje się w przypadku prostej przechodzącej przez początek układu lub równoległej do jednej z osi układu.

W równaniach tych  $x, y$  są zmienne i oznaczają współrzędne dowolnego punktu  $P$  płaszczyzny  $Oxy$ ; punkt  $P$  leży na prostej wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie prostej. Inne litery, z wyjątkiem  $t$ , oznaczają stałe; od wartości tych stałych zależy położenie prostej na płaszczyźnie  $Oxy$ . Zmienna  $t$ , zwana parametrem, wyznacza jednocześnie  $x$  i  $y$ , a przez to uzależnia je od siebie; w ten sposób dwa równania parametryczne spełniają podobną rolę jak jedno równanie, np. kierunkowe.

**1. Prosta  $l$  przechodząca przez dany punkt  $P_0(x_0, y_0)$  i prostopadła do danego niezerowego wektora  $\vec{N} = [A, B]$  ma równanie**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (136.1)$$



Rys. 136-1

**Dowód.** Punkt  $P(x, y)$  leży na prostej  $l$  (rys. 136-1) wtedy i tylko wtedy, gdy wektor  $\vec{P_0P}$  jest prostopadły do  $\vec{N}$  lub zerowy, czyli (tw. 135.7) gdy jest

$$\vec{N} \cdot \vec{P_0P} = 0$$

co wobec  $\vec{N} = [A, B]$ ,  $\vec{P_0P} = [x - x_0, y - y_0]$  przybiera postać (136.1).

**Przykład 1.** Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt  $(4, -2)$  i prostopadłej do wektora  $[-2, 1]$ .

**Rozwiązanie.** Równanie to ma postać

$$-2(x - 4) + (y + 2) = 0$$

Po wykonaniu działań i redukcji otrzymujemy postać ogólną

$$-2x + y + 10 = 0$$

**Przykład 2.** Jaką prostą przedstawia równanie

$$3x + 2y - 5 = 0$$

**Rozwiązanie.** Równanie to sprowadzamy do postaci (136.1), łącząc wyraz wolny z jednym z pozostałych wyrazów, np.

$$3x + 2\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0$$

skąd odczytujemy, że jest to prosta przechodząca przez punkt  $\left(0, \frac{5}{2}\right)$  i prostopadła do wektora  $[3, 2]$ .

Włączając wyraz wolny do obu pozostałych wyrazów w inny sposób, np.

$$3(x - 1) + 2(y - 1) = 0$$

odczytamy, że jest to prosta przechodząca przez punkt  $(1, 1)$  i prostopadła do wektora  $[3, 2]$ , co nie przeczy poprzedniemu stwierdzeniu, gdyż jedna prosta może być wyznaczona na kilka sposobów.

**Przykład 3.** Wskazać wektor prostopadły do prostej

$$3x + 7y - 11 = 0$$

**Rozwiązanie.** Wektorem takim jest  $[3, 7]$  oraz każdy wektor otrzymany z niego w wyniku mnożenia przez dowolną liczbę różną od zera.

**Postać ogólna równania prostej  $Ax + By + C = 0$ .** Wykonując w równaniu (136.1) działania i redukcję, otrzymujemy  $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$ . Oznaczając wyraz wolny  $-Ax_0 - By_0$  literą  $C$ , dostajemy postać ogólną równania prostej

$$Ax + By + C = 0$$

Z postaci ogólnej można natychmiast odczytać wektor prostopadły do prostej; jest to wektor  $[A, B]$ .

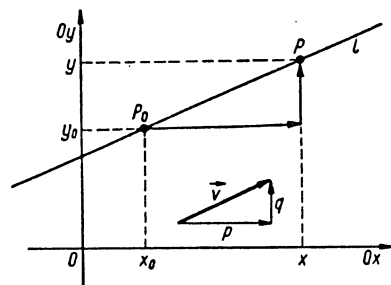
**2. Prosta  $l$  przechodząca przez dany punkt  $P_0(x_0, y_0)$  i równoległa do danego niezerowego wektora  $\vec{v} = [p, q]$  ma równanie**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p & q \end{vmatrix} = 0 \quad (136.2)$$

czyli równanie

$$q(x-x_0)-p(y-y_0)=0 \quad (136.2')$$

**Dowód.** Punkt  $P(x, y)$  leży na prostej  $l$  (rys. 136-2) wtedy i tylko wtedy, gdy wektor  $\vec{P_0P}$  jest równoległy do  $\vec{v}$  lub zerowy, co wg tw. 135.8 wyraża się równaniem (136.2).



Rys. 136-2

**Przykład 4.** Ułożyć równanie prostej przechodzącej przez punkt (3, 1) i równoległej do wektora  $[-2, 1]$ .

**Rozwiązanie**

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

czyli  $(x-3)-(-2)(y-1)=0$ , czyli  $x+2y-5=0$ .

**Przykład 5.** Wskazać wektor  $\vec{v}$  równoległy do prostej  $x-4y+8=0$ .

**Rozwiązanie.** Sprowadzając to równanie do postaci (136.2'), np.

$$x-4(y-2)=0$$

odczytujemy  $q=1$ ,  $p=4$ . Zatem  $\vec{v}=[p, q]=[4, 1]$ .

**Twierdzenie 136.1.** Wektory  $[A, B]$  i  $[-B, A]$  są prostopadłe albo zerowe.

**Dowód.** Wektory te mają równe moduły, więc albo są oba zerowe albo oba niezerowe, ale wówczas, wobec tego, że iloczyn skalarny ich jest zerem, są prostopadłe.

Twierdzenie to pozwala wskazać wektor równoległy do prostej danej w postaci ogólnej  $Ax+By+C=0$ . Najpierw odczytujemy wektor prostopadły do tej prostej  $[A, B]$ . Następnie przestawiamy ze sobą jego współrzędne i w jednej z nich zmieniamy znak. Otrzymujemy w ten sposób wektor  $[-B, A]$  prostopadły do poprzedniego, a więc równoległy do prostej.

**2\*. Prosta równoległa do jednej z osi układu.** Prosta równoległa do osi  $Ox$  jest to prosta równoległa do wektora  $\vec{i}=[1, 0]$ . Wstawiając do (136.2')  $p=1$ ,  $q=0$ , dostajemy  $0(x-x_0)+1(y-y_0)=0$ , czyli

$$y=y_0$$

Z równania tego odczytujemy, że jest to zbiór punktów, których rzędna jest jedna-

kowa i równa  $y_0$  (jest to rzędna jednego z tych punktów), zaś o odciętej nie ma tu mowy, czyli jest ona dowolna.

Prosta równoległa do osi  $Oy$  jest to prosta równoległa do wektora  $\vec{j}=[0, 1]$ . Wstawiając do (136.2')  $p=0$ ,  $q=1$ , dostajemy  $1(x-x_0)+0(y-y_0)=0$  czyli

$$x=x_0$$

jest to zbiór punktów o odciętej stałej i równej  $x_0$  i o rzędnej dowolnej.

**Współczynnik kierunkowy prostej. Definicja 136.1.** Niech  $l$  będzie prostą nie prostopadłą do osi  $Ox$ . Kątem nachylenia prostej  $l$  do osi  $Ox$  nazywamy kąt skierowany między osią  $Ox$  a dowolnym niezerowym wektorem leżącym na prostej  $l$ . Tangens tego kąta nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej  $l$  na płaszczyźnie  $Oxy$ .

Jeśli  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  są na prostej  $l$  wektorami o przeciwnych zwrotach

$$\angle(Ox, \vec{u}) = \alpha \quad \angle(Ox, \vec{v}) = \alpha + 180^\circ$$

to, każdy z tych kątów może być uważany za kąt nachylenia  $l$  do  $Ox$ ; ponieważ  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ)$ , więc współczynnik kierunkowy jest jednoznacznie określony dla każdej prostej nie prostopadłej do  $Ox$ .

Prosta prostopadła do  $Ox$  nie ma współczynnika kierunkowego.

Zamiast mówić „prosta nachylona do osi  $Ox$  pod danym kątem  $\alpha$ ” będziemy mówić „prosta o danym współczynniku kierunkowym  $m$ ”, przyjmując  $m = \operatorname{tg} \alpha$ .

Z rys. 136-5, widać że stosunek przyrostu rzędnej do przyrostu odciętej dla dwóch dowolnych punktów prostej jest równy współczynnikowi kierunkowemu tej prostej

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \operatorname{tg} \alpha = m \quad x_1 \neq x_0$$

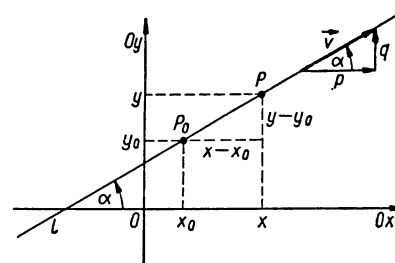
**3. Prosta o danym współczynniku kierunkowym  $m$  przechodząca przez dany punkt  $P_0(x_0, y_0)$  ma równanie**

$$y-y_0=m(x-x_0) \quad (136.3)$$

**Dowód.** Niech  $\vec{v}=[p, q]$  będzie wektorem niezerowym na prostej  $l$  (rys. 136-3) nieprostopadłej do osi  $Ox$ . Jest  $m = \operatorname{tg} \alpha = q/p$ ,  $p \neq 0$ . Pisząc równanie prostej  $l$  według (136.2), dostajemy  $p(y-y_0)=q(x-x_0)$ , czyli

$$y-y_0=\frac{q}{p}(x-x_0)$$

Podstawiając  $q/p=m$ , dostajemy równanie (136.3).



Rys. 136-3

Zamiast dowodu wystarczy spojrzeć na rys. 136-3, aby odczytać

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \operatorname{tg} \alpha = m \quad \text{skąd} \quad y-y_0 = m(x-x_0)$$

Postać kierunkowa równania prostej  $y = mx + b$ . Każdą prostą nieprostopadłą do osi  $Ox$  można przedstawić równaniem w postaci kierunkowej. Prostej prostopadłej do  $Ox$  nie można przedstawić w ten sposób. Postać kierunkowa równania prostej występowała w definicji funkcji liniowej (wzór 25.1), tam współczynnik kierunkowy był oznaczony literą  $a$  (w celu utrzymania analogii do funkcji kwadratowej  $ax^2 + bx + c$ ). W geometrii analitycznej współczynnik kierunkowy tradycyjnie oznacza się literą  $m$  (dla odróżnienia od  $a$  występującego w postaci odcinkowej; natomiast wyraz wolny  $b$  jest „tym samym  $b$ ”, które występuje w postaci odcinkowej).

Sprawdzenie równania prostej do postaci kierunkowej polega na wyliczeniu z tego równania  $y$  jako funkcji liniowej zmiennej  $x$ . Z postaci kierunkowej odczytujemy łatwo tangens kąta nachylenia prostej do osi  $Ox$

$$\operatorname{tg} \alpha = m$$

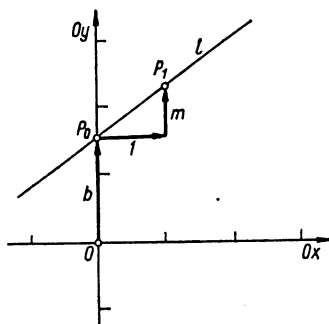
oraz rzędną punktu przecięcia się tej prostej z osią  $Oy$

$b$

co pozwala na szybkie nakerślenie prostej.

**Przykład 6.** Nakreślić prostą  $y = mx + b$ , gdzie  $m$  i  $b$  są dane liczbowo, np.  $m = 3/5$ ,  $b = 3/2$ .

**Rozwiązanie.** Najpierw na osi  $Oy$  znajdujemy punkt  $P_0$  o rzędnej  $b$  (rys. 136-4), a potem przesuwając się o  $+1$  w kierunku  $Ox$  oraz o  $m$  w kierunku  $Oy$ , dochodzimy



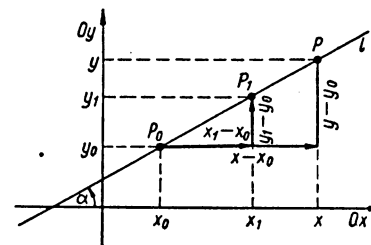
Rys. 136-4

do punktu  $P_1$ . Prosta  $P_0P_1$  jest szukaną prostą. Zamiast przesunąć o 1 i o  $m$  można obrać dwa dowolne przesunięcia o  $\Delta x$  i  $\Delta y$  tak dobrane, aby  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ .

**4. Prosta przechodząca przez dwa dane punkty różne  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$  ma równanie**

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (136.4)$$

**Dowód.** Prostą przechodzącą przez punkty  $P_0$  i  $P_1$  możemy uważać za prostą przechodzącą przez punkt  $P_0$  i równoległą do wektora  $\overrightarrow{P_0P_1}$  (rys. 136-5). Stosując (136.2), otrzymujemy (136.4).



Rys. 136-5

Równanie to można sprowadzić do postaci ogólnej zawsze, a do postaci kierunkowej wtedy, gdy  $x_1 \neq x_0$ .

**Przykład 7.** Ułożyć równanie prostej przechodzącej przez punkty  $(3, 4)$  i  $(6, -1)$ .

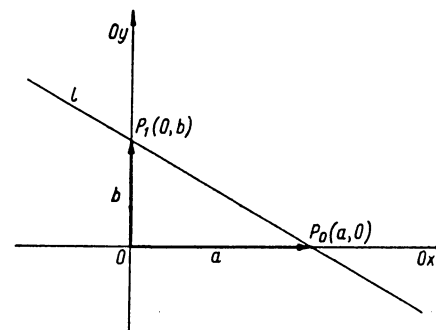
**Rozwiązanie**

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 \\ 6-3 & -1-4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{czyli} \quad -5(x-3) - 3(y-4) = 0$$

skąd dalej otrzymujemy postać ogólną  $5x + 3y - 27 = 0$  lub kierunkową  $y = -\frac{5}{3}x + 9$ .

**4\*. Prosta odcinająca na osiach układu niezerowe wektory  $\overrightarrow{OP_0}$ ,  $\overrightarrow{OP_1}$  o danych miarach  $a$ ,  $b$  (rys. 136-6) ma równanie**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (136.5)$$



Rys. 136-6

**Dowód.** Jest to prosta przechodząca przez punkty  $P_0(a, 0)$  i  $P_1(0, b)$ . Pisząc dla niej równanie w postaci (136.4), dostajemy

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 \\ 0-a & b-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{czyli} \quad b(x-a) + ay = 0$$

skąd po podzieleniu obu stron przez  $ab$  i przeniesieniu 1 na prawą stronę, dostajemy (136.5).

Postać (136.5) nazywamy **postacią odcinkową równania prostej**.

**Przykład 8.** Napisać równanie prostej odcinającej z I ćwiartki układu Oxy trójkąt o polu równym 6.

**Rozwiązanie.** Będzie to każda prosta dana w postaci odcinkowej, dla której  $ab = 12$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Jeśli oberzemy dla  $a$  wartość  $c$ , to  $b = 12/c$ . Prostych takich jest nieskończenie wiele. Wspólnym ich równaniem jest

$$\frac{x}{c} + \frac{cy}{12} = 1 \quad c > 0 \quad (136.6)$$

Dla każdej dodatniej wartości  $c$  otrzymujemy inną prostą spełniającą warunki zadania. Dla każdej ujemnej wartości  $c$  otrzymamy prostą ograniczającą wraz z ujemnymi półosiąmi trójkąt o polu 6.

$$\vec{P_0P} = t\vec{v}$$

co w zapisie analitycznym daje

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= tp \\ y - y_0 &= tq \end{aligned} \right\} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \end{cases} \quad (136.7)$$

**Proste równoległe.** Dwie proste dane w postaci ogólnej są równoległe, gdy wektory  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  prostopadłe do tych prostych są równoległe.

Dwie proste dane równaniami w postaci kierunkowej są równoległe, gdy mają ten sam współczynnik kierunkowy.

**Prostopadłość dwóch prostych** zachodzi wtedy, gdy wektory prostopadłe odpowiednio do tych prostych są wzajemnie prostopadłe.

**Kąt między dwiema prostymi** wyznaczymy, znajdując kąt między wektorami prostopadłymi do tych prostych.

**Odległość punktu od prostej.** Aby obliczyć odległość punktu  $P_0$  od prostej  $l$ , możemy poprowadzić pomocniczą prostą  $n$  prostopadłą do  $l$  i przechodzącą przez  $P_0$ . Punkt  $P_1$  przecięcia się prostych  $l, n$  wyznaczmy z układu równań tych prostych. Odległość  $P_0P_1$  jest szukaną odległością punktu  $P_0$  od  $l$ .

**Postać parametryczna równania prostej**, krócej: **parametryczne równania prostej**. Rozważmy prostą  $l$ , która przechodzi przez punkt  $P_0(x_0, y_0)$  i jest równoległa do niezerowego wektora  $\vec{v} = [p, q]$  (rys. 136-3). Punkt  $P(x, y)$  leży na tej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy wektor  $\vec{P_0P}$  jest iloczynem wektora  $\vec{v}$  przez pewną liczbę  $t$  (może to być dowolna liczba rzeczywista)

**Odległość dwóch prostych równoległych** obliczamy prowadząc z dowolnego punktu prostopadłą, wyznaczając punkty przecięcia i obliczając ich odległość.

**Półpłaszczyzna.** Prosta  $Ax + By + C = 0$ , gdzie  $A \neq 0$  lub  $B \neq 0$ , rozcina płaszczyznę na dwie figury, zwane stronami prostej. Po jednej stronie prostej jest  $Ax + By + C > 0$ , po drugiej stronie prostej jest  $Ax + By + C < 0$ . Aby dowiedzieć się jaka nierówność zachodzi po danej stronie, wystarczy wstawić do równania współrzędne dowolnego punktu leżącego po tej stronie i zobaczyć jakiego znaku jest wartość lewej strony równania.

Jeśli prosta rozcinająca płaszczyznę jest dana w postaci kierunkowej, to „na prostej” jest  $y = mx + b$ , „powyżej tej prostej” jest  $y > mx + b$ , a „poniżej tej prostej” jest  $y < mx + b$ .

## Zagadnienia związane z prostą na płaszczyźnie

Analogia pojęć geometrycznych i analitycznych

| Pojęcia geometryczne                        | Pojęcia analityczne                                                                   |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| punkt                                       | para liczb                                                                            |
| linia prosta                                | równanie 1 stopnia                                                                    |
| punkt leży na prostej                       | para liczb spełnia równanie 1 stopnia                                                 |
| punkt nie leży na prostej                   | para liczb nie spełnia równania 1 stopnia                                             |
| dwie proste                                 | dwa równania 1 stopnia                                                                |
| punkt wspólny dwóch prostych                | para liczb spełniająca układ dwóch równań 1 stopnia                                   |
| dwie proste nie mają punktu wspólnego       | dwa równania 1 stopnia tworzą układ sprzeczny                                         |
| dwie proste przecinają się w pewnym punkcie | układ dwóch równań 1 stopnia ma dokładnie jedno rozwiązanie jest nim pewna para liczb |
| z badać czy dany punkt leży na prostej      | z badać czy dana para liczb spełnia dane równanie                                     |
| oberzmy dowolny punkt tej prostej           | wyznaczymy dowolną parę liczb spełniającą to równanie 1 stopnia                       |
| znaleźć punkt przecięcia dwóch prostych     | rozwiązać układ dwóch równań 1 stopnia                                                |

## Pytania i zadania

1. Jaki jest związek między prostą (będącą tworem geometrycznym) a jej równaniem (które jest pojęciem algebraicznym)?

2. Napisać równanie prostej: a) przechodzącej przez dany punkt i równoległej do danego wektora, b) przechodzącej przez dwa dane punkty, c) przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danego wektora, d) przechodzącej przez dany punkt i tworzącej z osią  $Ox$  kąt skierowany, którego tangens jest dany.
3. Co to jest współczynnik kierunkowy prostej?
4. Napisać równanie prostej w postaci: a) wyznaczkowej, b) kierunkowej, c) ogólnej, d) odcinkowej i objaśnić sens geometryczny wszystkich wielkości występujących w tych równaniach.
5. Wypowiedzieć i napisać warunek równoległości i warunek prostopadłości prostych, które są dane równaniami w postaci: a) kierunkowej, b) ogólnej, c) jedna w postaci wyznaczkowej, druga w postaci ogólnej, d) jedna w postaci kierunkowej, druga w postaci ogólnej.
6. Jak wyznacza się kąt między dwiema prostymi danymi równaniami w postaci ogólnej?
7. Jak wyznacza się punkt przecięcia dwóch prostych danych na płaszczyźnie  $Oxy$  pewnymi równaniami?
8. Jak można wyznaczyć odległość punktu o danych współrzędnych od prostej danej równaniem?
9. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt:
  - a)  $M_0(1, -8)$  i równoległej do prostej  $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-2}$ ;
  - b)  $M_0(x_0, y_0)$  i prostopadłej do prostej  $Ax + By + C = 0$ .
10. Napisać równanie prostych w których mieszczą się boki i środkowe trójkąta o wierzchołkach  $A(3, 2)$ ,  $B(5, -2)$ ,  $C(1, 0)$ .
11. Narysować proste: a)  $y = \frac{2}{3}x + 3$ , b)  $y = 3x$ , c)  $y = -2$ , d)  $y = -\frac{3}{4}x + 3$ , e)  $y = -2x - 5$ , f)  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$  i wyznaczyć punkty przecięcia się tych prostych z osią  $Ox$ .
12. Które z punktów  $(3, 1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(6, 3)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, -1)$  leżą na prostej  $2x - 3y - 3 = 0$ ?
13. Czy punkty  $(1, -3)$  i  $(0, 0)$  leżą po tej samej stronie prostej  $2x - y + 5 = 0$ ?
14. Wyznaczyć stałą  $c$  tak, aby prosta  $cx + (c+1)y + c^2 = 0$  przechodziła przez punkt: a)  $(1, 1)$ , b)  $(1, -1)$ .
15. Sprowadzić prostą  $3x - 5y - 30 = 0$  do postaci odcinkowej i obliczyć pole trójkąta ograniczonego tą prostą i osiami układu.
16. Wskazać wektor równoległy do prostej  $Ax + By + C = 0$ .
17. Przy jakich wartościach  $a, b$  proste
 
$$ax - 2y - 1 = 0 \quad 6x - 4y - b = 0$$
 a) są równoległe, b) pokrywają się, c) mają jeden punkt wspólny, d) są prostopadłe?
18. Znaleźć jeden z kątów między prostymi:
 

|                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| a) $5x - y + 7 = 0$ | b) $3x - 2y + 7 = 0$ |
| $x - 2y - 4 = 0$    | $2x + 3y - 3 = 0$    |

19. Prosta  $l$  ma równanie  $2x + 3y = 0$ . Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt  $(2, 1)$  oraz: a) równoległej do  $l$ , b) prostopadłej do  $l$ , c) tworzącej z  $l$  kąt  $45^\circ$ .
20. Napisać równanie symetralnej odcinka wyciętego z prostej  $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$  przez osie układu.
21. Obliczyć odległość punktu  $(2, 0)$  od prostej  $y = 3x + 7$ .
22. Obliczyć wzajemną odległość prostych  $2x - 3y + 6 = 0$ ,  $2x - 3y + 10 = 0$  oraz długości odcinków, które te proste wycinają z osi  $Ox$  i  $Oy$ .

### 137. Przekształcenia płaszczyzny w ujęciu analitycznym

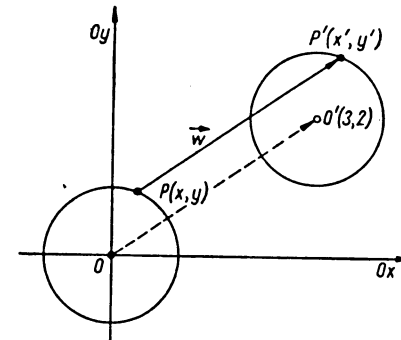
**Translacja** o wektor  $\vec{w} = [a, b]$  jest to przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem punktu  $P(x, y)$  jest taki punkt  $P'(x', y')$ , że

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{w} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases} \quad (137.1)$$

**Przykład 1.** Okrąg o środku w początku układu i promieniu równym 1 ma równanie

$$x^2 + y^2 = 1$$

Zastosować translację o wektor  $\vec{w} = [3, 2]$  (rys. 137-1).



Rys. 137-1

**Rozwiązanie.** Wzory (137.1) wyrażające translację w tym przypadku postać

$$x = x' - 3$$

$$y = y' - 2$$

Podstawiając je do równania okręgu, dostajemy

$$(x' - 3)^2 + (y' - 2)^2 = 1$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie  $(3, 2)$  i promieniu 1.

**Przykład 2.** Dana jest figura o równaniu  $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 0$ . Znaleźć translację sprowadzającą tę figurę do takiego położenia, w którym w równaniu jej nie występowałyby wyrazy 1 stopnia.

**Rozwiązanie.** Podstawiamy  $x = x' - a$ ,  $y = y' - b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są na razie niewiadome. Otrzymujemy po wykonaniu działań

$$2x'^2 + 3y'^2 - (4a + 4)x' - (6b - 6)y' + 2a^2 + 3b^2 + 4a - 6b = 0$$

Wyrazy 1 stopnia znikną, jeśli będzie

$$4a + 4 = 0 \quad 6b - 6 = 0 \quad \text{czyli} \quad a = -1, \quad b = 1$$

Figura po translacji o wektor  $[-1, 1]$  będzie mieć równanie

$$2x'^2 + 3y'^2 = 5$$

(Figurą tą jest elipsa – zob.p138.)

**Obrót płaszczyzny dookoła punktu  $O$  o kąt skierowany  $\varphi$  jest to przekształcenie płaszczyzny, w którym punktowi  $P(x, y)$  zostaje przyporządkowany punkt  $P'(x', y')$  taki, że**

$$\angle POP' = \varphi$$

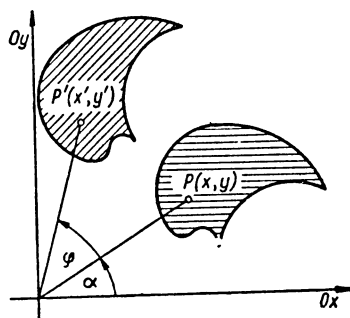
Wykażemy, że w ujęciu analitycznym obrót ten wyraża się wzorami

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi & x &= x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi & y &= -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \quad (137.2)$$

**Dowód.** Oznaczmy  $OP = OP' = r > 0$ . Wtedy  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ . Zatem (rys. 137-2)

$$x' = r \cos(\alpha + \varphi) = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = r \sin(\alpha + \varphi) = r \cos \alpha \sin \varphi + r \sin \alpha \cos \varphi = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$



Rys. 137-2

Udowodniliśmy lewą parę związków (137.2). Jeśli potraktujemy te związki jako równania o niewiadomych  $x, y$  i wyliczymy je, to otrzymamy prawą parę związków (137.2), co pozostawiamy Czytelnikowi do wykonania.

**Przykład 3.** Dana jest krzywa o równaniu

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$$

Jakim równaniem wyrazi się ta krzywa po obrocie o kąt  $45^\circ$ ?

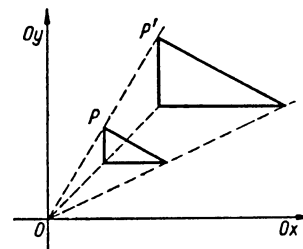
**Rozwiązanie.** Po wstawieniu do równania prawej pary związków (137.2) przy uwzględnieniu  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$  i wykonaniu rachunków, które pozostawiamy Czytelnikowi, otrzymamy

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

**Jednokładność o środku  $O$  i skali  $s \neq 0$  jest to przekształcenie płaszczyzny, które dowolnemu punktowi  $P(x, y)$  przyporządkowuje punkt  $P'(x', y')$  taki, że**

$$\overrightarrow{OP'} = s \overrightarrow{OP} \quad \text{czyli} \quad \begin{aligned} x' &= s x \\ y' &= s y \end{aligned} \quad (137.3)$$

(rys. 137-3).



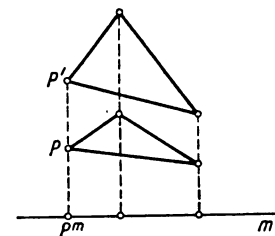
Rys. 137-3

**Przykład 4.** Wyznaczyć obraz paraboli  $y = x^2$  w jednokładności o środku  $O$  i skali  $s = 2$ .

**Rozwiązanie.** Ze wzorów (137.3) wyliczamy  $x = x'/s = x'/2$ ,  $y = y'/s = y'/2$ . Wstawiając to do równania paraboli, otrzymujemy  $y' = x'^2/2$ . Jest to też parabola (zob. rys. 29-1).

**Powinowactwo prostokątne** o osi  $m$  i skali  $s \neq 0$  jest to przekształcenie płaszczyzny, które dowolnemu punktowi  $P(x, y)$  przyporządkowuje punkt  $P'(x', y')$  w ten sposób, żeby wektory poprowadzone od rzutu  $P^m$  punktu  $P$  na prostą  $m$  do punktów  $P$  i  $P'$  (rys. 137-4) spełniały warunek

$$\overrightarrow{P^m P'} = s \overrightarrow{P^m P} \quad (137.4)$$



Rys. 137-4

Powinowactwo prostokątne względem osi odciętych wyraża się analitycznie wzorami

$$x' = x \quad y' = sy \quad (137.5)$$

**Przykład 5.** Stosując do okręgu

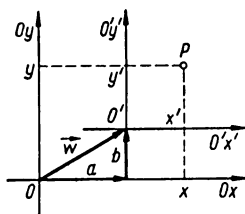
$$x^2 + y^2 = 25$$

powinowactwo względem osi  $Ox$  w skali  $s = 4/5$ , otrzymamy krzywą

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

**Twierdzenie 137.1.** W powinowactwie pole figury ulega zmianie w skali  $s$ , tzn. pole  $f' = s \cdot \text{pole } f$

**Przesunięcie układu.** Jeśli na płaszczyźnie  $Oxy$  wprowadzimy nowy układ  $O'x'y'$  o początku  $O'$  i osiach odpowiednio równoległych i zgodnie skierowanych z osiami starego układu (rys. 137-5), to zastępując stare współrzędne  $x, y$  nowymi współrzędnymi  $x', y'$ , mówimy, że zastosowaliśmy *przesunięcie układu*.



Rys. 137-5

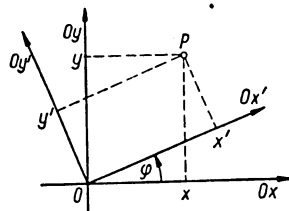
Przesunięcie układu o wektor  $\vec{OO'} = \vec{w}$  jest równoważne translacji płaszczyzny o wektor  $-\vec{w}$ . Wzory na przesunięcie układu otrzymamy, biorąc wzory (137.1) i zastępując w nich  $a, b$  przez  $-a, -b$

$$x = x' + a \quad y = y' + b \quad (137.6)$$

**Obrót układu.** Jeśli na płaszczyźnie  $Oxy$  wprowadzimy nowy układ  $Ox'y'$  o tym samym początku  $O$  i o osiach  $Ox', Oy'$  tworzących z osiami starego układu kąt

$$\angle Ox, Ox' = \angle Oy, Oy' = \varphi$$

to mówimy, że zastosowaliśmy *obrót układu* o kąt  $\varphi$  (rys. 137-6).



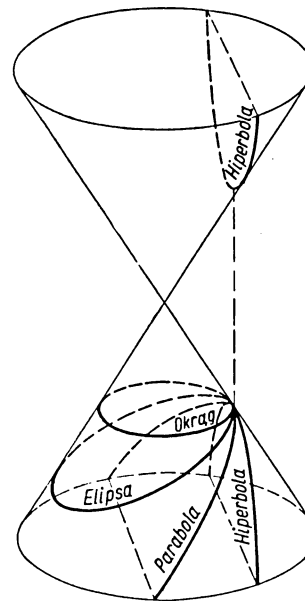
Rys. 137-6

Obrót układu o kąt  $\varphi$  jest równoważny obrotowi płaszczyzny dookoła punktu  $O$  o kąt  $-\varphi$ . Wzory na obrót układu otrzymamy, biorąc wzory (137.2) i zastępując w nich  $\varphi$  przez  $-\varphi$

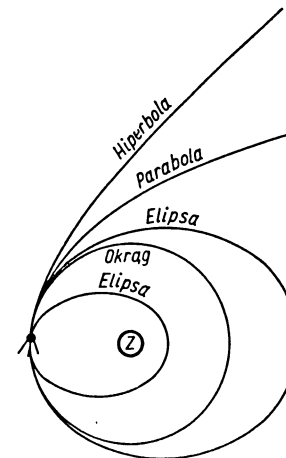
$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \quad (137.7)$$

## 138. Linie krzywe drugiego stopnia

**Ogólne wiadomości o krzywych drugiego stopnia.** Do krzywych drugiego stopnia należą: *okrąg, elipsa, parabola* i *hiperbola*. Krzywe te znano w starożytności i nazywano *stożkowymi*, gdyż otrzymywano je przecinając powierzchnię stożkową płaszczyznami o różnych nachyleniach względem osi (rys. 138-1). Krzywe te występują w wielu zjawiskach fizycznych, np. w mechanice ciał niebieskich. Kepler wykazał, że planety poruszają się po elipsach. Z praw powszechnego ciążenia wynika, że sta-



Rys. 138-1. Krzywe stożkowe



Rys. 138-2. Rodzaje orbit

tek kosmiczny, poruszający się bezwładnie w polu grawitacji ziemskiej, zależnie od nadanej mu prędkości może poruszać się po elipsie, okręgu, paraboli lub hiperboli (rys. 138-2), których ogniskiem (a w przypadku okręgu — środkiem) jest Ziemia.

Dzięki metodzie analitycznej Kartezjusza wykład krzywych stożkowych może

być dziś łatwy, bowiem każda krzywa stożkowa wyraża się na płaszczyźnie  $Oxy$  pewnym równaniem drugiego stopnia

$$\underbrace{x^2 + y^2 = r^2}_{\text{okrąg}} \quad \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{elipsa}} \quad \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{hiperbola}} \quad \underbrace{y^2 = 2px}_{\text{parabola}} \quad (138.1)$$

i wszystkie własności tej krzywej mogą być wyprowadzone z jej równania. Z tego powodu krzywe stożkowe nazywamy *krzywymi drugiego stopnia*.

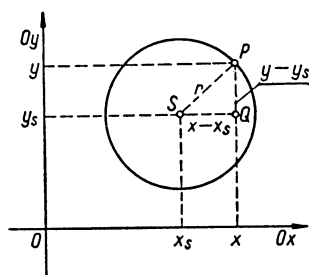
**Okrąg** o środku  $S(x_s, y_s)$  i promieniu  $r, r > 0$ , jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny  $P(x, y)$ , dla których jest

$$SP = r \quad \text{czyli} \quad \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} = r$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy, wobec założenia  $r > 0$ , równanie równoważne, nie zawierające pierwiastka

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$$

Jest to *równanie okręgu w postaci uwidaczniającej środek i promień*. Równanie to wyraża twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta  $SPQ$  (rys. 138-3).



Rys. 138-3

Na odwrót, każde równanie drugiego stopnia o 2 zmiennych, tj. równanie

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

w którym co najmniej jedna ze stałych  $A, B, C$  jest różna od 0, przedstawia albo jedną z czterech krzywych stożkowych, albo w przypadkach osobliwych: punkt, prostą, dwie proste lub zbiór pusty.

Wykonując zaznaczone działania i przeprowadzając redukcję, otrzymamy *równanie okręgu w postaci zredukowanej*

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (138.2)$$

które charakteryzuje się tym, że

- 1 — brak w nim iloczynu zmiennych  $xy$ ,
- 2 — kwadraty zmiennych  $x^2, y^2$  występują z jednakowymi współczynnikami.

Równanie dowolnego okręgu może być sprowadzone do postaci (138.2). Na odwrót, zbadajmy co może przedstawiać równanie (138.2).

Uzupełniając do kwadratów, sprowadzamy (138.2) do postaci

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

Jeśli prawa strona jest liczbą dodatnią, równanie przedstawia okrąg. Jeśli prawa strona jest zerem, równanie przedstawia punkt  $x = -a/2, y = -b/2$  („okrąg o promieniu zerowym”). Jeśli prawa strona jest liczbą ujemną, równanie przedstawia zbiór pusty („okrąg urojony”).

Wykazaliśmy, że równanie (138.2) przedstawia okrąg, punkt lub zbiór pusty.

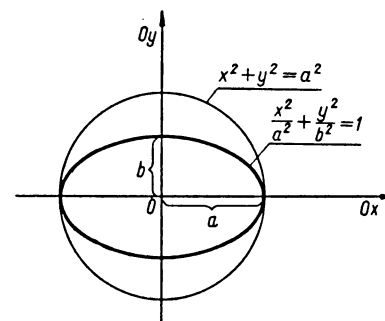
**Styczna do okręgu.** Jak wiemy styczna do okręgu jest prostopadła do promienia w punkcie styczności. Jeśli jest dany punkt styczności na okręgu i środek okręgu, to łatwo ułożyć równanie stycznej, jako równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danego wektora.

**Elipsa.** *Elipsą* nazywamy linię krzywą określoną równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq b \quad (138.3)$$

oraz każdą figurę otrzymaną z tej figury przez izometrię.

**Twierdzenie 138.1.** *Elipsa (138.3) jest obrazem okręgu  $x^2 + y^2 = a^2$  w powinowactwie prostokątnym względem osi  $Ox$  w skali  $s = b/a$  (rys. 138-4).*



Rys. 138-4

**Dowód.** Stosując do tego okręgu wzory (137.5)  $s = b/a$ , otrzymujemy równanie (138.3). Może być  $a > b$  lub  $a < b$ . Będziemy zakładać  $a > b$ .

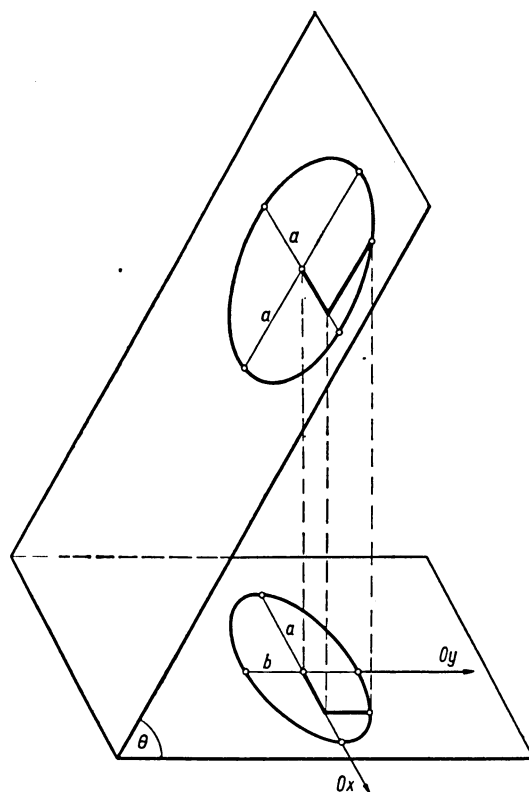
W powyższym przekształceniu obrazem wnętrza okręgu jest figura zwana *wnętrzem elipsy*. Z twierdzenia 137.1 wynika, że pole wnętrza elipsy wraz z elipsą (mówimy krótko: *pole elipsy*) równa się  $\frac{b}{a} \pi a^2$ , czyli  $\text{pole elipsy} = ab\pi$ .

**Symetrie elipsy.** Elipsa ma dwie osie symetrii wzajemnie prostopadłe oraz środek symetrii; dla elipsy (138.3) są nimi osie i początek układu  $Oxy$ .

**Elipsa jako rzut okręgu.** Z twierdzenia 138.1 wynika, że elipsę (138.3) można uwa-

zać za rzut prostokątny okręgu o promieniu  $a$  leżącego w płaszczyźnie nachylonej do rzutni pod kątem  $\theta$ , którego cosinus jest równy  $b/a$  (rys. 138-5).

Środek, średnicę, cięciwę, styczną i sieczną elipsy określamy jako rzuty odpowiednich figur w okręgu. Średnice elipsy mają różne długości. Najdłuższą średnicę



Rys. 138-5. Elipsa jako rzut okręgu

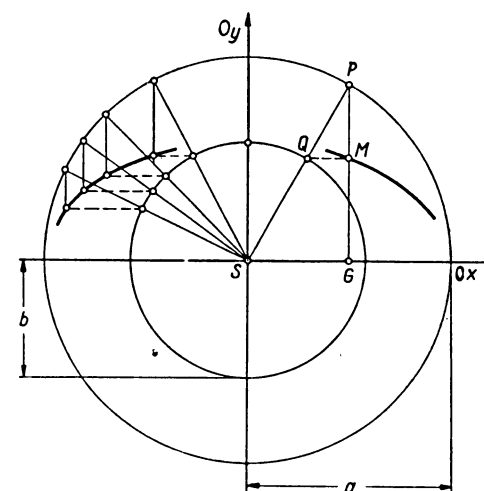
elipsy nazywamy *osią wielką*; połowę jej długości  $a$  nazywamy *półosią wielką*. Najkrótszą średnicę nazywamy *osią małą*; połowę jej długości  $b$  nazywamy *półosią małą*.

**Kreślenie elipsy.** Z twierdzenia 138.1 wynika jeden ze sposobów kreślenia elipsy (rys. 138-6):

- 1 — kreślimy okrąg o promieniu  $a$  (*okrąg opisany*),
- 2 — kreślimy współśrodkowo okrąg o promieniu  $b$  (*okrąg wpisany*),
- 3 — kreślimy rzędną  $\overline{PG}$  dowolnego punktu okręgu opisanego,
- 4 — kreślimy promień  $\overline{PS}$ , promień ten przecina okrąg wpisany w pewnym punkcie  $Q$ ,

5 — rzutujemy punkt  $Q$  na odcinek  $\overline{PG}$ ; otrzymany rzut  $M$  jest szukanym punktem elipsy, bowiem

$$MG:PG = QS:PS = b:a \text{ skąd } MG = \frac{b}{a} PG \text{ czyli } y_M = \frac{b}{a} y_P.$$



Rys. 138-6. Kreślenie elipsy przez skracanie rzędnych punktów okręgu

**Hiperbola.** Hiperbolą nazywamy linię krzywą określoną równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (138.4)$$

oraz każdą figurę otrzymaną z tej figury przez izometrię. Liczby  $a, b$  są dodatnie; możliwe jest  $a > b$ ,  $a = b$  lub  $a < b$ .

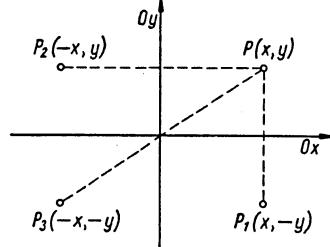
W dalszym ciągu mówiąc „hiperbola” będziemy mieli na myśli hiperbolę położoną względem układu  $Oxy$  tak, jak to określa równanie (138.4). Wszystkie własności hiperboli wyprowadzimy z jej równania.

**Symetrie hiperboli.** Hiperbola ma dwie osie symetrii, którymi są osie układu, oraz środek symetrii, którym jest początek układu.

**Dowód.** W równaniu (138.4) obie zmienne występują w kwadratach, zatem para  $(x, y)$  może spełniać równanie hiperboli tylko jednocześnie z parami  $(x, -y)$ ,  $(-x, y)$  i  $(-x, -y)$ . Ale (rys. 138-7):

- punkt  $P_1(x, -y)$  jest symetryczny do  $P(x, y)$  względem osi  $Ox$ ,
- punkt  $P_2(-x, y)$  jest symetryczny do  $P(x, y)$  względem osi  $Oy$ ,
- punkt  $P_3(-x, -y)$  jest symetryczny do  $P(x, y)$  względem punktu  $O$ ,

a to dowodzi istnienia trzech wyżej wymienionych symetrii.

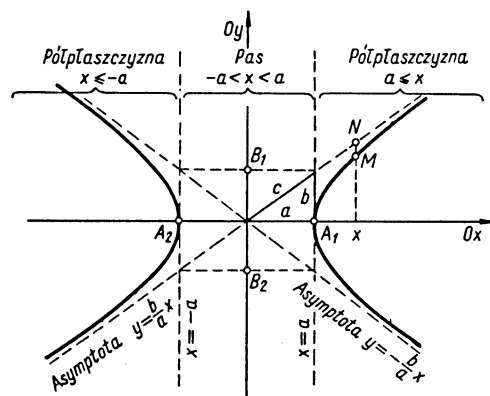


Rys. 138-7

**Gałęzie, wierzchołki, osie i półosie hiperboli.** Będziemy badali rozmieszczenie punktów hiperboli na płaszczyźnie  $Oxy$ , prowadząc różne proste i szukając na nich punktów hiperboli. Wpierw jednak przekształcimy równanie hiperboli, rozwiązując je względem  $y^2$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \quad (138.5)$$

Stąd od razu odczytujemy, że dla  $|x| < a$  prawa strona jest ujemna i równanie jest sprzeczne. Oznacza to, że w pasie  $-a < x < a$  nie znajduje się żaden punkt hiperboli (rys. 138-8).



Rys. 138-8

Rozważmy teraz półpłaszczyznę  $x \geq a$  i półpłaszczyznę  $x \leq -a$ . Dla punktów w tych półpłaszczyznach jest  $|x| \geq a$  i równanie (138.5) rozwiązuje się względem  $y$

$$y = + \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{lub} \quad y = - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (138.6^{1,2})$$

W tych półpłaszczyznach zawarta jest hiperbola. Jedna część hiperboli leży w półpłaszczyźnie  $x \geq a$ , a druga część jest symetryczna do pierwszej i leży w półpłaszczyźnie  $x \leq -a$ . Każdą z tych części nazywamy *gałęzią hiperboli*. Wzajemna od-

ległość obu gałęzi hiperboli równa się  $2a$  i jest osiągana w punktach  $A_1(a, 0)$ ,  $A_2(-a, 0)$  zwanych *wierzchołkami hiperboli*.

Odcinek  $A_1A_2$  nazywamy *osią rzeczywistą*, jego długość równa się  $2a$ . Liczbę  $a$  nazywamy *półosią rzeczywistą*. Odcinek  $B_1B_2$  długości  $2b$ , prostopadły do osi rzeczywistej i połowiący się z nią wzajemnie, nazywamy *osią urojoną*. Liczbę  $b$  nazywamy *półosią urojoną*. Prostokąt, dla którego punkty  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  są środkami boków, okazuje się pomocny przy kreśleniu hiperboli, bowiem przedłużając jego przekątne, otrzymujemy dwie proste, zwane *asymptotami hiperboli*.

**Asymptoty hiperboli.** Jeśli w równaniu (138.4) zastąpimy prawą stronę (równą 1) nową prawą stroną równą 0

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (138.7)$$

to otrzymamy nowe równanie, oczywiście sprzeczne z równaniem hiperboli. Równanie (138.7) można napisać w postaci

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

skąd widać, że jest ono alternatywą dwóch równań liniowych

$$y = + \frac{b}{a} x \quad \text{lub} \quad y = - \frac{b}{a} x \quad (138.8^{1,2})$$

a więc przedstawia dwie proste. Żadna z tych prostych nie ma punktu wspólnego z hiperbolą. Istnieje wiele prostych nie mających punktu wspólnego z hiperbolą, ale osobliwością tych dwóch prostych jest to, że ich *odległość od hiperboli jest równa 0*. Mianowicie *do dowolnie małej dodatniej liczby  $\varepsilon$  można dobrać dwa punkty: punkt  $M$  na hiperboli i punkt  $N$  na jednej z tych prostych tak, że  $MN < \varepsilon$* .

**Dowód.** Niech  $M$  i  $N$  mają wspólną odciętą  $x$ ,  $x \geq a$ , a rzędne ich wyznaczmy z równań (138.6<sup>1</sup>) i (138.8<sup>1</sup>). Wówczas mamy

$$\begin{aligned} MN &= y_N - y_M = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} < \frac{ab}{x} \end{aligned}$$

skąd widać, że  $MN$  będzie mniejsze od dowolnie małej liczby  $\varepsilon$ , jeśli tylko  $x$  będzie dość duże.

Każda prosta równoległa do jednej z asymptot (ale różna od niej) przecina hiperbolę w dokładnie jednym punkcie. Dowód. Punkty przecięcia wyznaczamy, rozwiązując układ równań złożony z równania hiperboli (może to być równanie (138.5)) i równania prostej  $y = \frac{b}{a} x + p$ ,  $p \neq 0$ . Okazuje się (szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi do wykonania,) że istnieje jedyny punkt wspólny  $x = \frac{-a}{2pb} (b^2 + p^2)$ ,  $y =$

$= \frac{-1}{2p}(b^2 - p^2)$ . Podobnie jest, jeśli weźmiemy prostą równoległą do drugiej asymptoty  $y = -\frac{b}{a}x + p$ .

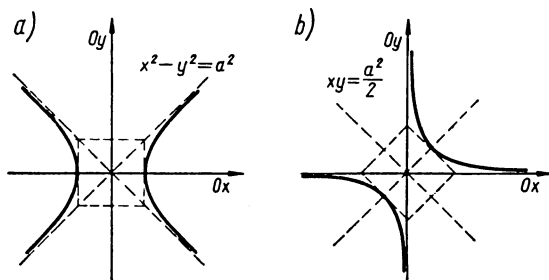
**Hiperbola równoosiowa.** Jeśli osie hiperboli są równe  $a = b$ , to hiperbola nazywa się *równoosiową*. Równanie hiperboli równoosiowej  $x^2/a^2 - y^2/a^2 = 1$  może być napisane w postaci

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (138.9)$$

Zastępując  $a^2$  zerem, dostajemy równanie obu asymptot łącznie

$$x^2 - y^2 = 0$$

Jedną asymptotą ma równanie  $y = x$ , druga ma równanie  $y = -x$ ; są wzajemnie prostopadłe (rys. 138-9).



Rys. 138-9. Hiperbola równoosiowa w położeniu: a) osiowym, b) asymptotycznym – względem osi układu

Poddając hiperbolę (138.9) obrotowi dookoła punktu  $O$  o kąt  $45^\circ$  otrzymamy hiperbolę, której asymptotami będą osie układu. Aby dowiedzieć się jakie będzie równanie tej hiperboli, podstawmy do równania (138.9) wzory na obrót, przyjmując  $\varphi = 45^\circ$

$$x = x' \cos 45^\circ + y' \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \quad (138.10)$$

$$y = -x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

Po wykonaniu łatwych rachunków, które pozostawiamy Czytelnikowi, otrzymamy

$$x'y' = \frac{a^2}{2} \quad (138.11)$$

Wzory (138.10) ustalają odpowiedniość między punktami hiperboli (138.9) i punktami hiperboli (138.11). Jeśli nie zamierzamy korzystać z tej odpowiedniości, a tylko interesuje nas figura otrzymana w wyniku obrotu, to możemy opuścić znaki „prim” i zapisać otrzymaną krzywą

$$xy = \frac{a^2}{2} \quad (138.12)$$

Z hiperboli równoosiowej (138.9) przez powinowactwo możemy otrzymać dowolną hiperbolę (138.4).

**Szkicowanie hiperboli.** W celu naszkicowania hiperboli wskazane jest narysować najpierw asymptoty i wierzchołki, a następnie przy rysowaniu korzystać z symetrii i z tej własności, że hiperbola zbliża się do asymptot, ale ich nie dotyka. Dla dokładniejszego narysowania można wyznaczyć kilka punktów, obliczając ich współrzędne z równania hiperboli.

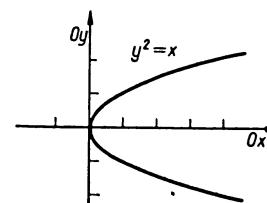
Sposoby dokładnego konstruowania punktów hiperboli pomijamy.

**Parabola.** Linie krzywą, która w pewnym układzie  $Oxy$  ma równanie

$$y^2 = 2px \quad (138.13)$$

nazywamy *parabolą*. Stała  $2p$  jest nazywana *parametrem paraboli*, a liczba  $p$  – *półparametrem*,  $p \neq 0$ . Słowo parametr jest tu użyte w innym znaczeniu niż np. w nazwie „parametryczne równania prostej”.

Przy szkicowaniu paraboli można wyznaczyć kilka jej punktów według współrzędnych obliczonych z równania. Rys. 138-10 przedstawia parabolę  $y^2 = x$ , tj. parabolę o parametrze  $2p = 1$ . Jeśli tę parabolę obrócimy o  $90^\circ$ , to otrzymamy



Rys. 138-10

parabolę przedstawioną na rys. 22-2. Wszystkie własności geometryczne paraboli  $y^2 = 2px$  przenoszą się na parabolę o równaniu  $y = ax^2$ ; trzeba tylko uwzględnić zamianę ról  $x$  i  $y$  oraz ewentualną zmianę oznaczeń współczynnika.

W dalszym ciągu, mówiąc krótko „parabola”, będziemy rozumieli przez to parabolę (138.13).

**Oś symetrii i wierzchołek paraboli.** Równanie paraboli (138.13) zawiera zmienną  $y$  tylko w kwadracie. Jeśli para liczb  $(x, y)$  spełnia to równanie, to para  $(x, -y)$  również spełnia to równanie. Wynika stąd, że oś  $Ox$  jest *osią symetrii paraboli*.

Można udowodnić, że jest to jedyna oś symetrii i że parabola nie posiada środka symetrii.

Punkt, w którym parabola przecina swoją oś symetrii, nazywa się *wierzchołkiem* paraboli. Wierzchołek paraboli (138.13) znajduje się w początku układu.

**Przecięcie krzywej drugiego stopnia prostą.** Dowolna krzywa 2 stopnia, tj. krzywa o równaniu  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , w którym co najmniej jedna ze stałych  $A, B, C$  jest różna od 0, i dowolna prosta na płaszczyźnie  $Oxy$  mogą mieć co najwyżej 2 punkty wspólne.

**Dowód.** Jeśli prosta nie jest prostopadła do osi  $Ox$ , to ma równanie kierunkowe

$$y = mx + b \quad (138.15)$$

Wstawiając to do (138.14) otrzymamy równanie o jednej niewiadomej  $x$  stopnia co najwyżej drugiego, skąd otrzymamy co najwyżej dwie odcięte  $x_1, x_2$ . Równanie (138.15) przyporządkowuje każdej wartości  $x$  jedną rzędną i w ten sposób otrzymamy najwyżej dwa punkty.

Jeśli prosta jest prostopadła do  $Ox$ , to ma równanie  $x = c$ , co wstawione do (138.14) prowadzi do trójmianu kwadratowego o zmiennej  $y$ , a więc daje najwyżej dwa punkty.

**Stopień równania krzywej we współrzędnych prostokątnych nie zmienia się przy translacji i obrocie (a także przy jednokładności i powinowactwie).**

**Dowód.** Niech  $T$  będzie jednym z wymienionych przekształceń i niech  $f(x, y) = 0$  będzie równaniem algebraicznym w postaci zredukowanej. Wzory na przekształcenie  $T$  wprowadzają w miejsce  $x, y$  pewne funkcje liniowe zmiennych  $x', y'$ , w wyniku czego otrzymujemy równanie  $g(x', y') = 0$  stopnia nie wyższego niż wyjściowe równanie

$$\text{stopień } g \leq \text{stopień } f$$

Powtórzmy to rozumowanie, stosując do krzywej  $g(x', y') = 0$  przekształcenie  $T^{-1}$ . Przekształcenie to jest przekształceniem tej samej grupy i również wprowadza w miejsce  $x', y'$  liniowe funkcje zmiennych  $x, y$ , co nie podwyższa stopnia równania. Ale teraz otrzymamy z powrotem równanie wyjściowe. Zatem teraz jest

$$\text{stopień } f \leq \text{stopień } g$$

Z powyższych dwóch nierówności wynika, że  $f(x, y)$  i  $g(x', y')$  są tego samego stopnia.

**Badanie krzywej drugiego stopnia.** Jeśli krzywa jest dana równaniem (138.14), to staramy się sprowadzić ją do postaci kanonicznej, tj. do jednej z postaci (138.1). Istotnym dla postaci kanonicznej jest brak iloczynu zmiennych, tj. wyrazu  $Bxy$ , który potocznie nazywamy wyrazem *mieszanym*. Jedną z metod usunięcia wyrazu mieszanego opiera się na następującym twierdzeniu:

Jeśli w równaniu (138.14) występuje wyraz *mieszany*, tj. jeśli  $B \neq 0$ , to obrót układu o kąt  $\varphi$  dobrany tak, aby

$$\text{ctg } 2\varphi = \frac{A - C}{B}$$

usuwa z tego równania wyraz *mieszany* (zob. przykł. 3 w p. 137).

Po usunięciu wyrazu mieszanego staramy się usunąć wyrazy 1 stopnia. Jeśli w równaniu (138.14) nie ma wyrazu mieszanego, a jedna ze zmiennych:  $x$  lub  $y$  – występuje w kwadracie i w pierwszej potęgze, to stosując odpowiednie przesunięcie układu możemy z tego równania usunąć pierwszą potęgę tej zmiennej (zob. przykł. 2 w p. 137).

## Zadania

- Jaką krzywą przedstawia równanie  $x^2 + y^2 = 100$ ? Czy punkt  $(6, 8)$  leży na tej krzywej? Jaką rzędną powinien mieć punkt o odciętej  $x = 5$ , aby leżał na tej krzywej?
- Jakie jest położenie punktów  $(2, 1)$ ,  $(10, 2)$ ,  $(11, 1)$  względem okręgu  $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$ ?
- Co przedstawiają równania: a)  $x^2 + y^2 - 12x - 20y + 100 = 0$   
b)  $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 = 0$   
c)  $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 10 = 0$   
d)  $x^2 + y^2 - x = 0$
- Napisać równanie stycznej do okręgu  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$  w punkcie styczności  $(-2, 0)$ .
- Wyznaczyć równanie okręgu przechodzącego przez dane trzy punkty  $(-1, -1)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(8, 2)$ .
- Przy jakim  $c$  prosta  $2x - 3y + c = 0$  jest styczna do okręgu  $x^2 + y^2 = 13$ ?
- Napisać równanie elipsy będącej rzutem okręgu  $x^2 + y^2 = 100$  (rys. 138-5) nachylonego do rzutni pod kątem  $60^\circ$ .
- Znaleźć translację usuwającą wyraz pierwszego stopnia z równania  $x^2 + 4y^2 + 4y = 0$ . Jaka to krzywa?
- Nakreślić elipsę o osiach  $2a = 12$ ,  $2b = 8$ .
- Nakreślić hiperbolę  $9x^2 - 16y^2 = 144$ . Napisać równania asymptot.
- Prosta  $y = x - 3$  przecina hiperbolę  $x^2 - 4y^2 = 9$  w punktach  $M_1, M_2$  oraz asymptoty tej hiperboli w punktach  $N_1, N_2$ . Wykazać, że odcinki  $\overline{M_1 M_2}, \overline{N_1 N_2}$  mają wspólny środek.
- Jaką wartość ma mieć  $p$  w równaniu prostej  $y = 2x + p$ , aby prosta ta była styczną do hiperboli  $x^2 - y^2 = 1$ ?
- Znaleźć równanie stycznej do paraboli  $y^2 = 4x$ , jeśli współczynnik kierunkowy stycznej ma być równy  $1/2$ .
- Zbadać krzywą  $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$ .
- Wyznaczyć wierzchołek, oś i naszkicować parabolę: a)  $y^2 - 2x + 8y = 0$ , b)  $x^2 - 3y + 3 = 0$ , c)  $y^2 - 8x - 8y + 8 = 0$ , d)  $4x^2 + 4x + 4y + 9 = 0$ .

## 139. Ogniska stożkowych

**Ogniska elipsy.** Będziemy rozważać elipsę

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b > 0 \quad (139.1)$$

zwając ją w dalszym ciągu krótko: elipsą.

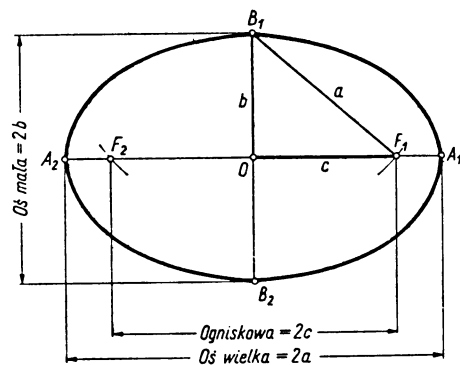
**Ogniskami elipsy** nazywamy dwa punkty

$$F_1(c, 0) \quad F_2(-c, 0)$$

gdzie  $c$  jest liczbą dodatnią, określoną związkiem

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (139.2)$$

Ogniska elipsy leżą na osi wielkiej elipsy, symetrycznie względem środka elipsy (rys. 139-1); ich wzajemną odległość, równą  $2c$ , nazywamy *ogniskową*; odległość każdego ogniska od środka, równą  $c$ , nazywamy *półogniskową*



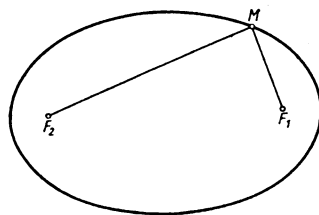
Rys. 139-1. Elipsa:  $O$  — środek,  $A_1, A_2$  — wierzchołki,  $F_1, F_2$  — ogniska

$$F_1 F_2 = 2c = \text{ogniskowa}$$

$$OF_1 = OF_2 = c = \text{półogniskowa}, \quad c < a$$

Związek (139.2) wyraża twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta  $OB_1 F_1$ .

**Promienie wodzący punktu elipsy.** Odcinki poprowadzone z dowolnego punktu elipsy do ognisk elipsy nazywamy *promieniami wodzącymi* tego punktu elipsy (rys. 139-2).



Rys. 139-2. Promienie wodzące  $MF_1$  i  $MF_2$  punktu  $M$  elipsy

**Twierdzenie 139.1.** Suma promieni wodzących punktu elipsy jest stała i równa osi wielkiej elipsy

$$MF_1 + MF_2 = \text{const} = 2a \quad (139.3)$$

**Dowód.** Jest  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$  oraz  $M(x, y)$ , przy czym  $y$  spełnia (139.1). Stosując wzór (135.15) na odległość dwóch punktów, mamy

$$MF_1 + MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Rugujemy  $y^2$ , korzystając z (139.1), oraz  $b^2$ , korzystając z (139.2). Po wykonaniu rachunków, które zostawiamy Czytelnikowi, dostajemy

$$MF_1 + MF_2 = \sqrt{\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2}$$

Teraz skorzystamy z (16.23) i (16.22), mając na uwadze to, że dla elipsy jest  $|x| \leq a$ ,  $c < a$ , więc  $\frac{cx}{a} - a < 0$ , zatem  $\left|\frac{cx}{a} - a\right| = a - \frac{cx}{a}$

$$MF_1 + MF_2 = \left|\frac{cx}{a} - a\right| + \left|\frac{cx}{a} + a\right| = a - \frac{cx}{a} + \frac{cx}{a} + a = 2a$$

**Twierdzenie 139.2** (odwrotne do poprzedniego). Jeśli suma odległości punktu  $M$  od dwóch stałych punktów  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$  jest stała i równa  $2a$

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

to punkt  $M$  leży na elipsie (139.1), gdzie  $b^2 = a^2 - c^2$ .

**Dowód.** Założenie  $MF_1 + MF_2 = 2a$  wyraża się we współrzędnych

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Uwalniając się od pierwiastków i wprowadzając stałą  $b^2 = a^2 - c^2$  (Czytelnik zechce wykonać rachunki), dochodzimy do (139.1).

**Mimośród elipsy.** Występujący często stosunek  $\frac{c}{a}$  oznaczamy  $e$  i nazywamy *mimośrodem*; ponieważ  $c < a$ , więc jest  $e < 1$

$$\frac{\text{półogniskowa}}{\text{półos wielka}} = \frac{c}{a} = e = \text{mimośród}; \quad e < 1$$

**Ogniska hiperboli.** Będziemy rozważać hiperbolę o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (139.4)$$

nazywając ją krótko: hiperbolą.

*Ogniskami* hiperboli nazywamy dwa punkty

$$F_1(c, 0) \quad F_2(-c, 0)$$

gdzie  $c$  jest liczbą dodatnią, określoną związkiem

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (139.5)$$

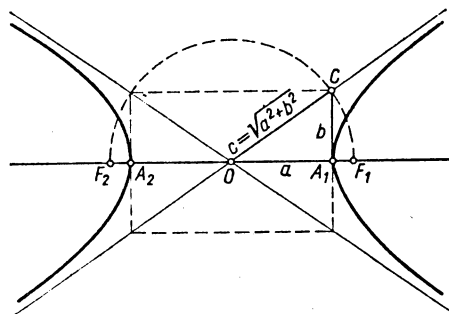
Ogniska hiperboli leżą na osi rzeczywistej, symetrycznie względem środka hiperboli (rys. 139-3); ich wzajemną odległość, równą  $2c$ , nazywamy *ogniskową*; odległość każdego ogniska od środka hiperboli, równą  $c$ , nazywamy *półogniskową*

$$F_1 F_2 = 2c = \text{ogniskowa}$$

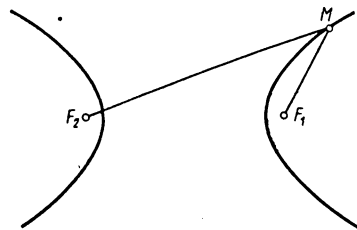
$$OF_1 = OF_2 = c = \text{półogniskowa}, \quad c > a$$

Związek (139.5) wyraża twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta  $OA_1 C$  (rys. 139-3).

**Promień wodzący punktu hiperboli.** Odcinki poprowadzone z dowolnego punktu hiperboli do ognisk hiperboli nazywamy *promieniami wodzącymi* punktu  $M$  hiperboli (rys. 139-4).



Rys. 139-3. Hiperbola:  $O$  — środek,  $A_1, A_2$  — wierzchołki,  $F_1, F_2$  — ogniska



Rys. 139-4. Promień wodzący  $MF_1$  i  $MF_2$  punktu  $M$  hiperboli

**Twierdzenie 139.3.** *Moduł różnicy promieni wodzących punktu hiperboli jest stały i równy osi rzeczywistej hiperboli*

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \quad (139.6)$$

**Twierdzenie 139.4** (odwrotne do poprzedniego). *Jeśli moduł różnicy odległości punktu  $M$  od dwóch stałych punktów  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$  jest stały i równy  $2a$*

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

to punkt  $M$  leży na hiperboli (139.4), gdzie  $b^2 = c^2 - a^2$ .

Dowody tych twierdzeń są analogiczne do poprzednich dowodów.

**Mimośród hiperboli.** Stosunek  $\frac{c}{a}$  oznaczamy  $e$  i nazywamy *mimośrodem* hiperboli; ponieważ jest  $c > a$ , więc  $e > 1$

$$\frac{\text{półogniskowa}}{\text{półos rzeczywista}} = \frac{c}{a} = e = \text{mimośród}; \quad e > 1$$

**Ognisko i kierownica paraboli.** Będziemy rozważać parabolę o równaniu

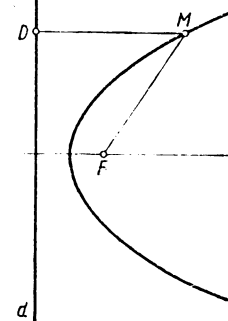
$$y^2 = 2px \quad (139.7)$$

nazywając ją krótko: parabolą.

**Ogniskiem** paraboli nazywamy punkt  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ . **Kierownicą** paraboli nazywamy prostą  $d$  o równaniu  $x = -p/2$  (rys. 139-5).

Każda parabola ma jedno ognisko i jedną kierownicę. Ognisko leży na osi paraboli w odległości  $|p|$  od kierownicy, która jest prostopadła do osi. Wierzchołek paraboli leży na osi i połowi odcinek łączący ognisko z jego rzutem na kierownicę.

Rys. 139-5. Parabola:  $F$  — ognisko,  $d$  — kierownica,  $M$  — punkt paraboli,  $D$  — rzut punktu  $M$  na kierownicę,  $MF$  — promień wodzący punktu paraboli,  $MD$  — odległość punktu paraboli od kierownicy



**Promień wodzący punktu paraboli.** Odcinek poprowadzony z dowolnego punktu paraboli do ogniska paraboli nazywamy *promieniem wodzącym* tego punktu paraboli.

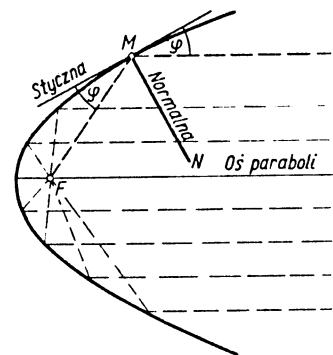
**Twierdzenie 139.5.** *Promień wodzący punktu paraboli jest równy odległości tego punktu od kierownicy*

$$MF = MD \quad (139.8)$$

**Twierdzenie 139.6.** *Jeśli są dane: prosta  $d$  o równaniu  $x = -p/2$  i punkt  $F(p/2, 0)$ , to każdy punkt  $M(x, y)$  równoodległy od  $F$  i od  $d$  spełnia równanie  $y^2 = 2px$ .*

Dowody tych twierdzeń są łatwe i pozostawiamy je Czytelnikowi.

**Styczne do stożkowych i promienie wodzące.** *Promień wodzący punktu paraboli jest nachylony do stycznej pod takim samym kątem jak prosta równoległa do osi paraboli* (rys. 139-6). Własność ta jest wykorzystywana przy precyzyjnych reflektorach i radarach.



Rys. 139-6. Promień świetlny wychodzący z ogniska po odbiciu się od paraboli biegnie równoległe do jej osi

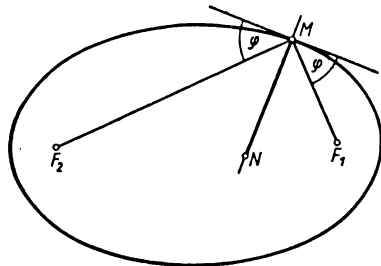
Własności stycznej do elipsy i hiperboli przedstawiają rys. 139-7 i 139-8.

**Kierownice elipsy i hiperboli.** Elipsa i hiperbola mają po dwie kierownice i po dwa ogniska. Dla wszystkich trzech stożkowych: elipsy, hiperboli i paraboli —

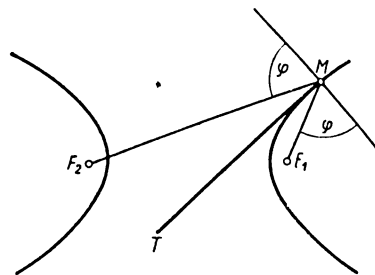
— stosunek promienia wodzącego do odległości od kierownicy jest stały i równy mimośrodu

$$\frac{MF}{MD} = \text{const} = e \begin{cases} < 1 \text{ dla elipsy} \\ = 1 \text{ dla paraboli} \\ > 1 \text{ dla hiperboli} \end{cases}$$

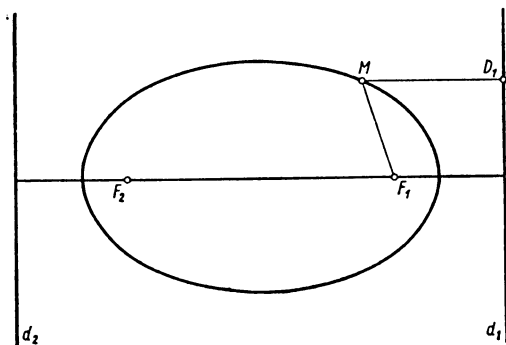
(rys. 139-9 i 139-10).



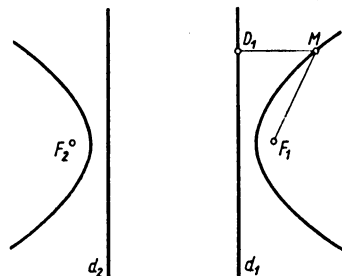
Rys. 139-7. Promienie wodzące punktu elipsy tworzą ze styczną równe kąty



Rys. 139-8. Promienie wodzące punktu hiperboli tworzą ze styczną równe kąty



Rys. 139-9. Elipsa:  $F_1, F_2$  — ogniska,  $d_1, d_2$  — kierownice,  $MF_1$  — promień wodzący prawy,  $MD_1$  — odległość punktu elipsy od kierownicy prawej



Rys. 139-10. Hiperbola:  $F_1, F_2$  — ogniska,  $d_1, d_2$  — kierownice,  $MF_1$  — promień wodzący prawy,  $MD_1$  — odległość punktu hiperboli od kierownicy prawej

### Pytania i zadania

1. Wymienić krzywe stożkowe i napisać ich równania w najprostszym położeniu względem układu  $Oxy$ . Objaśnić sens geometryczny wielkości występujących w tych równaniach. Dlaczego nazywamy te krzywe stożkowymi i dlaczego — krzywymi 2 stopnia?

2. Z jakich własności okręgu i elipsy wynikają ich równania?
3. Jak określa się hiperbolę? Która geometryczna własność hiperboli może być podstawą jej określenia? Co to jest hiperbola równoosiowa?
4. Czym różnią się: symetria okręgu, symetria elipsy i hiperboli, symetria paraboli?
5. Co to jest oś wielka i oś mała elipsy? Co to jest oś rzeczywista i oś urojona hiperboli? Co to jest oś paraboli? Gdzie leżą wierzchołki tych krzywych? Gdzie leżą ich ogniska? Co to są promienie wodzące? Co to jest mimośród?
6. Wypowiedzieć twierdzenie o promieniach wodzących: 1 — elipsy, 2 — hiperboli, 3 — paraboli, które dotyczy ich: a) długości, b) nachyleń względem stycznej i normalnej.
7. Co to jest asymptota hiperboli?
8. Napisać i objaśnić wzory na: a) przesunięcie układu, b) obrót układu.
9. Wyznaczyć mimośród elipsy o osiach 10 i 8.
10. Wyznaczyć mimośród hiperboli  $x^2 - 2y^2 = 4$ .
11. Gdzie leżą wszystkie punkty, w których wystrzał z działa i wybuch pocisku u celu są słyszalne jednocześnie?
12. Kiedy są podobne do siebie: a) dwie elipsy, b) dwie hiperbole, c) dwie parabole, d) dwa okręgi?
13. Napisać równanie wyrażające warunek, że punkt  $M(x, y)$  leży na okręgu o środku  $(-1, 2)$  i promieniu 3.
14. Gdzie leżą punkty spełniające nierówność  $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ ?
15. Naskicować krzywe: a)  $9x^2 + 25y^2 = 225$ , b)  $16x^2 - 9y^2 = 144$ , c)  $x^2 - a^2 = 0$ , d)  $x^2 - y^2 = a^2$ , e)  $x^2 - y^2 = -a^2$ .
16. Zbadać przez uzupełnienie do kwadratu i naskicować krzywe: a)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ , b)  $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$ , c)  $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$ , d)  $y^2 - 12x + 6y + 33 = 0$ .
17. Naskicować rodzinę krzywych: a)  $xy = c$ , b)  $x^2 + 4y^2 = c^2$ , c)  $x^2 = c^2$ , d)  $(x-c)^2 + (y-c)^2 = c^2$ , e)  $y = 2(x-c)$ , f)  $y = (x-c)^3$ .
18. Jakie powinowactwo przekształca elipsę

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ w elipsę} \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 ?$$

19. Jak należy przesunąć układ współrzędnych, aby punkt  $(9, -5)$  otrzymał współrzędne  $(0, 12)$ ?
20. Jakie współrzędne otrzyma punkt  $(1, \sqrt{3})$ , jeśli układ obrócimy o  $60^\circ$ ?
21. O jaki kąt należy obrócić układ, aby współrzędne punktu  $(2, 0)$  stały się równe?

### Odpowiedzi do rozdziału XXI

135

17. a)  $(4, 1)$ ; b)  $(-1, 4)$ ; c)  $(-4, -1)$ ; d)  $(-4, 1)$ .
18.  $(\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, -\sqrt{2})$ .
19.  $(\pm 3, 0)$ ,  $(0, \pm 4)$  lub  $(\pm 4, 0)$ ,  $(0, \pm 3)$ .
20.  $A(-1, 0)$ ,  $B(0, 3)$ ,  $C(4, 0)$  lub  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 3)$ ,  $C(-4, 0)$ .

21.  $r^2 = 2a^2 + 2b^2 - s^2$ . 22.  $\sqrt{19}$ , 7. 23. Zob. tw. 81.6.  
 24. Warunek prostopadłości wektorów lub twierdzenie Pitagorasa.  
 25.  $10 + 2\sqrt{5}$ . 26.  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{10}$ , 1. 27.  $(-14, 17)$  28. Punkt dzielący  $(8/5, 8/5)$ .  
 29.  $k = 2$ ,  $l = 5$ . 30. Tak. 31.  $-6, 3, 13, -61, 37, 73, 32$ . Wykazać, że  $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ .

### 136

9. a)  $\frac{x-1}{5} = \frac{y+8}{-2}$ ; b)  $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ A & B \end{vmatrix} = 0$   
 10. Boki:  $2x+y=8$ ,  $x+2y=1$ ,  $x-y=1$ ; środkowe:  $x=3$ ,  $x+y=3$ ,  $y=0$ .  
 11. a)  $x = -9/2$ , b)  $x = 0$ , c) nie istnieje, d)  $x = 4$ , e)  $x = -5/2$ , f)  $x = 2$ . 12. Pierwszy, trzeci, piąty 13. Tak. 14. a)  $c = -1$ , b)  $c = \pm 1$ . 15. 30. 16. Np.  $[B, -A]$ .  
 17. a)  $a = 3$ ,  $b \neq 2$ ; b)  $a = 3$ ,  $b = 2$ ; c)  $a \neq 3$ ; d)  $a = -4/3$ . 18.  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ . 19. a)  $2x+3y-7=0$ ; b)  $3x-2y-4=0$ ; c)  $x-5y+3=0$  lub  $5x+y-11=0$  są to dwusieczne kątów między prostymi a) i b). 20.  $y-2 = \frac{3}{2}(x-3)$ . 21.  $13/\sqrt{10}$ . 22.  $9/\sqrt{13}$ , 2, 3.

### 138

1. Okrąg o środku  $O$  i promieniu  $r = 10$ , tak,  $y = \pm\sqrt{75}$ . 2. Na okręgu, wewnątrz, zewnątrz. 3. a) okrąg o środku  $(6, 10)$  i promieniu 6, b) punkt  $(-4, 1)$ , c) zbiór pusty, d) okrąg o środku  $(1/2, 0)$  i promieniu  $1/2$ . 4.  $3x-4y = -6$ . 5. Równanie to powinno mieć postać  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , gdzie  $a, b, c$ , na razie niewiadome. Wstawiając kolejno trzy dane punkty, otrzymamy trzy równania pozwalające wyznaczyć  $a = -6$ ,  $b = -4$ ,  $c = -12$ . Równanie okręgu  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ , czyli  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ . 6. Jest styczną gdy istnieje jeden punkt wspólny, tj. gdy wyróżnik trójmianu otrzymanego w wyniku rugowania jednej ze współrzędnych jest równy 0. Odpowiedź  $c = \pm 13$ . 7.  $x^2 + 4y^2 = 100$ . 8. Elipsa o środku  $(-2, 0)$  i półosiach 2, 1;  $x' = x+2$ ,  $y' = y$ . 10.  $y = \pm \frac{3}{4}x$ . 12. Zob. zad. 6;  $p = \pm 1/\sqrt{3}$ . 13.  $y = \frac{1}{2}x + 2$ . 14. Uzupełniając do kwadratu dostajemy  $(y-2)^2 = 4(x-3)$ . Przesuwając układ o 3 w prawo i o 2 w górę dostajemy  $y'^2 = 4x'$ , parabola. 15. a)  $(-8, -4)$ ,  $y = -4$ , b)  $(0, 1)$ ,  $x = 0$ , c)  $(-1, 4)$ ,  $y = 4$ , d)  $(-1/2, -2)$ ,  $x = -1/2$ .

### 139

9.  $e = 3/5$ . 10.  $e = \sqrt{6}/2$ . 11. Gałąź hiperboli, której ogniskami są działo i cel. 12. a) b) gdy mają jednakowe mimośrod, c) d) zawsze. 13.  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ . 14. W pierścieniu o środku  $(0, 0)$  i promieniach 5 i 3. 15. a) elipsa  $a = 5$ ,  $b = 3$ , b) hiperbola  $a = 3$ ,  $b = 4$ , c) dwie proste równoległe do  $Oy$ , d) hiperbola równoosiowa, e) hiperbola otrzymana z poprzedniej przez obrót o  $90^\circ$ . 16. a) okrąg o środku  $(1, -2)$  i promieniu 5, b) elipsa o środku  $(5, -2)$  i półosiach: 3 i 2, c) hiperbola o środku  $(3, -2)$  i półosiach 3 i 2, d) parabola o wierzchołku  $(2, -3)$  i osi równoległej do  $Ox$ . 17. a) hiperbole o asymptotach  $Ox$ ,  $Oy$ , b) elipsy podobne o wspólnych osiach symetrii, c) wszystkie proste równoległe do  $Oy$ , d) okręgi styczne do osi układu, e) parabole przystające o wspólnej osi symetrii, f) tzw. parabole sześć-

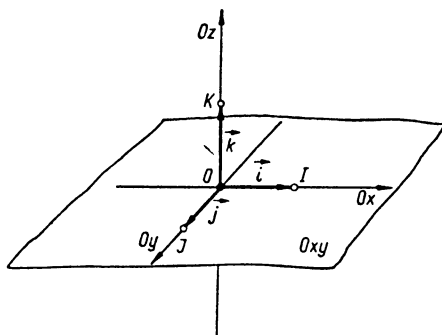
cienne, otrzymane z przesunięcia krzywej  $y = x^3$  w kierunku  $Ox$ . Krzywe każdej z tych rodzin pokrywają całą płaszczyznę  $Oxy$  i z wyjątkiem rodziny d) nie przecinają się wzajemnie w obrębie danej rodziny. 18.  $y' = \frac{4}{3}y$ ,  $x' = x$ . 19.  $x' = x - 9$ ,  $y' = y + 17$ . 20.  $(2, 0)$ . 21.  $135^\circ$  lub  $315^\circ$ .

## GEOMETRIA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI

## 140. Współrzędne punktu i współrzędne wektora w przestrzeni

Układ współrzędnych w przestrzeni. Obierzmy w przestrzeni trzy wzajemnie prostopadłe osie liczbowe o wspólnym początku  $O$  i punktach jednostkowych  $I, J, K$  (rys. 140-1)

$$OI = OJ = OK = 1$$



Rys. 140-1

Wersory tych osi oznaczmy odpowiednio

$$\vec{OI} = \vec{i} \quad \vec{OJ} = \vec{j} \quad \vec{OK} = \vec{k}$$

Współrzedną punktu na pierwszej osi oznaczmy  $x$ , na drugiej  $-y$ , na trzeciej  $-z$ . W związku z tym osie te oznaczmy

$$Ox \quad Oy \quad Oz$$

Będziemy je nazywali *osiąmi układu*: osią pierwszą, osią drugą i osią trzecią<sup>1)</sup>. Uporządkowaną trójkę osi  $Ox, Oy, Oz$  będziemy nazywali *układem*

$$Oxyz$$

<sup>1)</sup> W płaskim układzie  $Oxy$  używa się nazw: odcięta (abscissa), rzędna (ordinata). W układzie przestrzennym dla trzeciej współrzędnej (applicata) brak polskiej nazwy.

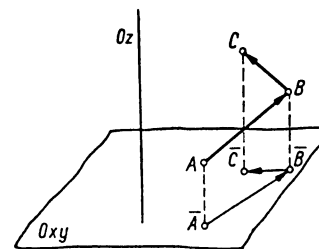
przestrzeń, w której obrano układ  $Oxyz$  będziemy nazywali *przestrzenią  $Oxyz$* .

Każda z trzech osi układu jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej pozostałe dwie osie układu. Trzy takie płaszczyzny nazywamy *płaszczyznami układu  $Oxyz$*  i oznaczamy

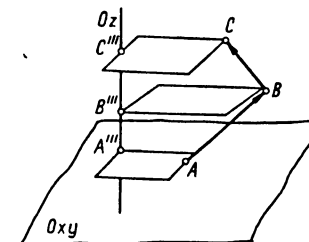
$$Oyz \quad Ozx \quad Oxy$$

Każda płaszczyzna układu tworzy z prostopadłą do niej osią układu przestrzenny prostokątny układ rzutowania o podwójnym sensie:

– płaszczyzna jest rzutnią, oś kierunkiem rzutu; mamy wtedy prostokątny rzut na płaszczyznę (rys. 140-2);



Rys. 140-2



Rys. 140-3

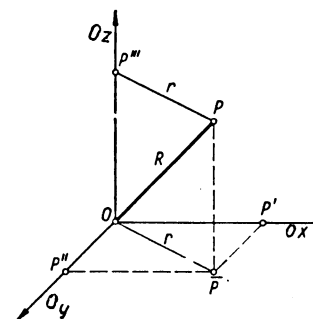
– oś jest rzutnią, płaszczyzna jest kierunkiem rzutu; mamy wtedy prostokątny rzut na prostą (rys. 140-3). W obu tych rodzajach rzutu zachowane jest prawo: *Rzut sumy równa się sumie rzutów*.

Niech  $P$  będzie dowolnym punktem przestrzeni  $Oxyz$ . Rzuty punktu  $P$  na osie  $Ox, Oy, Oz$  oznaczmy odpowiednio

$$P' \quad P'' \quad P'''$$

a współrzędne tych punktów na osiach  $Ox, Oy, Oz$  oznaczmy

$$x \quad y \quad z$$



Rys. 140-4. Układ prostokątny w przestrzeni:  $P$  – punkt przestrzeni,  $R$  – odległość punktu  $P$  od początku układu,  $r$  – odległość punktu  $P$  od osi  $Oz$

co zapisujemy łącznie

$$P(x, y, z)$$

Co się tyczy rzutów punktu  $P$  na płaszczyzny układu, to przeważnie korzystamy tylko z rzutu na płaszczyznę  $Oxy$  i rzut ten będziemy oznaczać  $\bar{P}$  (rys. 140-4).

Odcinek  $OP$  łączący punkt  $P$  z początkiem układu nazywamy *promieniem wodzącym* punktu  $P$ . Wektor  $\vec{OP}$  nazywamy *wektorem wodzącym* punktu  $P$ .

Odległość punktu od początku układu jest równa pierwiastkowi sumy kwadratów współrzędnych tego punktu

$$R = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (140.1)$$

**Dowód.** Stosując tw. Pitagorasa do trójkątów  $OPP'$  i  $OPP''$ , mamy

$$R^2 = r^2 + z^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{skąd} \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

**Współrzędne wektora w przestrzeni.** Niech będzie dany wektor

$$\vec{v}$$

Rzuty tego wektora na osie układu (rys. 140-5)

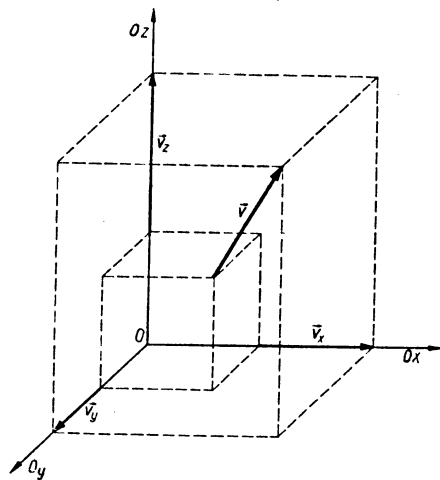
$$\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$$

są *składowymi* wektora  $\vec{v}$ ; zachodzi bowiem równość wektorowa

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z \quad (140.2)$$

Natomiast miary tych rzutów na osiach układu są liczbami

$$v_x, v_y, v_z$$



Rys. 140-5. Wektor i jego rzuty (składowe)

które nazywamy współrzędnymi wektora  $\vec{v}$ . Każdy wektor ma określoną trójkę współrzędnych i na odwrót: każda uporządkowana trójka liczb wyznacza wektor, którego współrzędnymi są te liczby. Dlatego będziemy trójkę liczb stanowiących współrzędne wektora traktować jak wektor

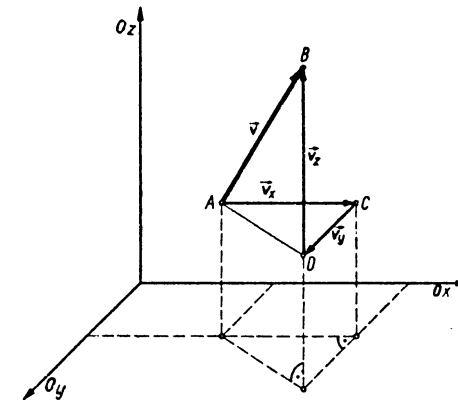
$$\vec{v} = [v_x, v_y, v_z] \quad (140.3)$$

**Przedstawienie wektora za pomocą jego współrzędnych i wersorów układu.** Dowolny wektor przestrzeni można przedstawić jako sumę iloczynów wersorów układu przez współrzędne wektora

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (140.4)$$

**Obliczenie modułu wektora.** Moduł wektora  $\vec{v} = \vec{AB}$  oznaczamy  $v$  lub  $AB$ . Moduł wektora jest równy pierwiastkowi sumy kwadratów współrzędnych wektora (rys. 140-6)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (140.5)$$



Rys. 140-6. Wektor jest sumą swych składowych

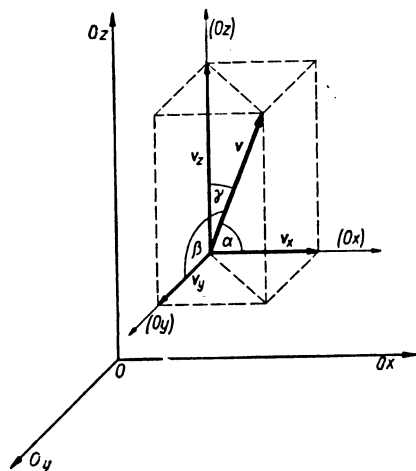
**Kąt między dwoma wektorami w przestrzeni** (def. 117.1) jest nieskierowany. Jego miara stopniowa  $\varphi$  spełnia nierówność  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ . Jeśli jest wiadoma wartość cosinusa tego kąta, to jego miarę można wyznaczyć jednoznacznie; bowiem każdej wartości cosinusa należącej do przedziału  $\langle -1; +1 \rangle$  odpowiada dokładnie jedna wartość miary kąta należąca do przedziału  $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ .

Z drugiej strony znajomość kąta między wektorem  $\vec{v}$  a pewnym znanym wektorem, np. wersorem osi układu, nie wyznacza kierunku wektora  $\vec{v}$ ; wiadomo tylko, że wektor  $\vec{v}$  ma kierunek jednej z tworzących stożka o danej osi i danym kącie rozwarcia.

**Kąt między wektorem i osią oraz kąt między dwiema osiami** określamy za pomocą wersorów tych osi.

**Kąty kierunkowe i cosinusy kierunkowe.** Kątami kierunkowymi niezerowego wektora  $\vec{v}$  w układzie  $Oxyz$  nazywamy kąty, jakie ten wektor tworzy z osiami układu (rys. 140-7)

$$\alpha = \{Ox, \vec{v}\} \quad \beta = \{Oy, \vec{v}\} \quad \gamma = \{Oz, \vec{v}\}$$



Rys. 140-7. Kąty kierunkowe  $\alpha, \beta, \gamma$  wektora w przestrzeni  $Oxyz$

Cosinusy tych kątów

$$\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \cos \gamma$$

nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora  $\vec{v}$  w układzie  $Oxyz$ .

**Twierdzenie 140.1.** Cosinusy kierunkowe niezerowego wektora są stosunkami współrzędnych tego wektora do jego modułu

$$\cos \{Ox, \vec{v}\} = \frac{v_x}{v} \quad \cos \{Oy, \vec{v}\} = \frac{v_y}{v} \quad \cos \{Oz, \vec{v}\} = \frac{v_z}{v} \quad (140.6)$$

**Twierdzenie 140.2.** Suma kwadratów cosinusów kierunkowych dowolnego wektora niezerowego jest równa 1

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (140.7)$$

**Dowód.** Wzór (140.7) wynika ze wzorów (140.6) i (140.5).

## 141. Działania na wektorach i działania na współrzędnych wektorów w przestrzeni

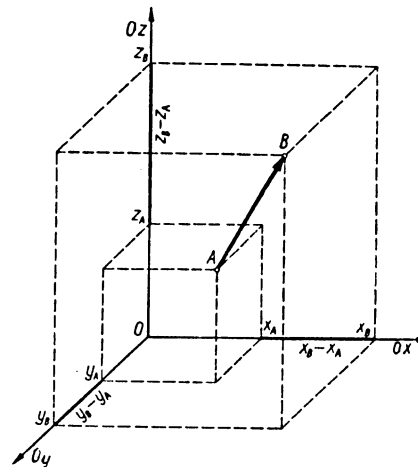
Wykonywanie działań na wektorach za pomocą działań na współrzędnych wektorów. Równość wektorów oraz działania na wektorach przenoszą się na trójki współrzędnych tych wektorów, a mianowicie

$$\begin{aligned} \vec{u} = \vec{v} &\Leftrightarrow u_x = v_x & u_y = v_y & u_z = v_z \\ \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} &\Leftrightarrow w_x = u_x + v_x & w_y = u_y + v_y & w_z = u_z + v_z \\ \vec{w} = \vec{u} - \vec{v} &\Leftrightarrow w_x = u_x - v_x & w_y = u_y - v_y & w_z = u_z - v_z \\ \vec{w} = k\vec{v} &\Leftrightarrow w_x = kv_x & w_y = kv_y & w_z = kv_z \end{aligned}$$

Dowody są analogiczne do dowodów na str. 365.

**Współrzędne wektora i współrzędne punktów wyznaczających ten wektor** (rys. 141-1).  
Jeśli  $\vec{v} = \vec{AB}$ , to

$$v_x = x_B - x_A \quad v_y = y_B - y_A \quad v_z = z_B - z_A \quad (141.1)$$



Rys. 141-1. Współrzędne wektora równają się różnicom współrzędnych końca i początku wektora

**Odległość dwóch punktów (długość odcinka)** wyraża się wzorem

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (141.2)$$

**Środek odcinka.** Współrzędne środka odcinka są równe średnim arytmetycznym jednoimiennych współrzędnych końców tego odcinka. Środek odcinka  $\vec{AB}$  ma współrzędne

$$\frac{x_A + x_B}{2} \quad \frac{y_A + y_B}{2} \quad \frac{z_A + z_B}{2} \quad (141.3)$$

**Rzut wektora  $\vec{v}$  na oś  $l$  w przestrzeni** jest wektorem  $\vec{v}_l$ , którego miara na osi  $l$  jest równa

$$v_l = v \cos \{l, \vec{v}\} \quad (141.4)$$

w przypadku wektora  $\vec{v}$  niezerowego, zaś jest zerem, gdy  $v = 0$ .

Jeśli  $\vec{u}$  jest wektorem niezerowym o kierunku i zwrocie osi  $l$ , to zamiast  $v_l$  możemy napisać  $v_u$ . Wówczas wzór (141.4) można zapisać

$$v_u = v \cos \{\vec{u}, \vec{v}\} \quad (141.5)$$

**Iloczyn skalarny dwóch wektorów**  $\vec{u}, \vec{v}$  jest to liczba  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  określona wzorem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos \{\vec{u}, \vec{v}\} \quad (141.6)$$

jeśli  $u \neq 0$  i  $v \neq 0$ , zaś równa zero, jeśli  $u = 0$  lub  $v = 0$ .

W przypadku  $u \neq 0$  ze wzorów (141.6) i (141.5) wynika wzór

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv_u$$

W przypadku  $v \neq 0$ , zamieniając role wektorów, dostajemy

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = vu_v$$

Jeśli  $u \neq 0$  i  $v \neq 0$  mamy łącznie

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos \{\vec{u}, \vec{v}\} = u v_u = v u_v \quad (141.7)$$

**Własności iloczynu skalarnego.** Mnożenie skalarne wektorów ma następujące własności:

1 – przemienność mnożenia skalarnego wektorów

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2 – łączność mnożenia skalarnego z mnożeniem wektora przez liczbę

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$$

3 – rozdzielność mnożenia skalarnego względem dodawania wektorów

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

4 – prawo zerowego iloczynu skalarnego

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (u = 0 \text{ lub } v = 0 \text{ lub } \vec{u} \perp \vec{v})$$

5 – iloczyn skalarny dowolnego wektora przez ten sam wektor jest równy kwadratowi modułu tego wektora

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$$

**Dowód** własności 3. Jeśli  $u = 0$ , wzór jest prawdziwy. Jeśli  $u \neq 0$ , można rzutować wektory na oś wektora  $\vec{u}$ . Oznaczmy  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{s}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{s} = u s_u$$

Rzut sumy jest sumą rzutów, więc  $s_u = (\vec{v} + \vec{w})_u = v_u + w_u$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = u(v_u + w_u) = u v_u + u w_u = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

**Wyrażenie iloczynu skalarnego za pomocą współrzędnych wektorów.**

**Twierdzenie 141.1** Iloczyn skalarny dwóch wektorów równa się sumie iloczynów równoimiennych współrzędnych tych wektorów

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \quad (141.8)$$

**Dowód.** Skorzystamy z wzoru (140.4), z własności 2 i 3 iloczynu skalarnego i z tego, że  $\vec{i} \cdot \vec{w} = w_x$ ,  $\vec{j} \cdot \vec{w} = w_y$ ,  $\vec{k} \cdot \vec{w} = w_z$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot \vec{w} = v_x(\vec{i} \cdot \vec{w}) + v_y(\vec{j} \cdot \vec{w}) + v_z(\vec{k} \cdot \vec{w}) = \\ &= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \end{aligned}$$

**Twierdzenie 141.2.** Cosinus kąta między dwoma niezerowymi wektorami jest dany wzorem

$$\cos \{\vec{u}, \vec{v}\} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{u v} \quad (141.9)$$

$$\text{gdzie } u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

**Dowód.** Wzór ten wynika z porównania wzorów (141.6) i (141.8).

**Warunek równoległości wektorów** niezerowych  $\vec{u}, \vec{v}$ . Wektory  $\vec{u}, \vec{v}$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba  $k$  taka, że

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad \text{czyli} \quad u_x = kv_x, \quad u_y = kv_y, \quad u_z = kv_z$$

**Warunek prostopadłości wektorów** niezerowych wyraża się zerowaniem ich iloczynu skalarnego.

### Pytania i zadania

- Określić poznane działania na wektorach: a) syntetycznie, tj. bez pomocy współrzędnych, b) analitycznie, tj. za pomocą współrzędnych.
- Co to jest przestrzenny układ rzutowania? Jak otrzymuje się rzut punktu, odcinka i wektora na prostą – względnie na płaszczyznę?
- Jak wyraża się we współrzędnych wzajemna symetria dwóch punktów względem: a) początku układu, b) osi  $Oz$ , c) płaszczyzny  $Oxy$ ?
- Jak wyraża się we współrzędnych odległość punktu  $P(x, y, z)$  od: a) początku układu, b) osi  $Oz$ , c) płaszczyzny  $Oxy$ ?
- Co to są kąty kierunkowe wektora w przestrzeni? Jaki jest związek między trzema cosinusami kierunkowymi dowolnego wektora niezerowego? Jaki jest związek między modulem, cosinusami kierunkowymi i współrzędnymi dowolnego niezerowego wektora?
- Jak wyznacza się w przestrzeni: a) długość odcinka, b) środek odcinka?
- Jaki jest związek między współrzędnymi wektora a współrzędnymi punktów wyznaczających ten wektor?
- Podać definicję i sposób obliczania iloczynu skalarnego.
- Co można powiedzieć o module sumy  $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ , jeśli wiadomo, że  $u = 10$ ,  $v = 6$ ?
- Początkiem układu  $Oxyz$  jest naroże sześcianu o krawędzi  $2a$ , zaś osie układu są wyznaczone przez krawędzie sześcianu i skierowane tak, aby dowolny punkt sześcianu miał współrzędne nieujemne. Jakie współrzędne mają środki ścian sześcianu? Jakie współrzędne ma środek sześcianu?
- Dany jest punkt  $(-3, 2, -1)$ . Wyznaczyć: a) jego rzuty na płaszczyzny  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$ , b) jego rzuty na osie  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , c) punkty symetryczne do niego

- względem płaszczyzn:  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$ , osi:  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  i względem początku układu.
12. Trzy siły o modułach 2, 10 i 11, wzajemnie prostopadłe, zaczepione są w jednym punkcie. Wyznaczyć moduł wypadkowej i kąt jaki tworzy ona z największą ze składowych.
  13. Przez początek  $A$  niezerowego wektora  $\vec{AB}$  poprowadzono w przestrzeni pęk prostych i na każdą z nich rzutowano prostopadłe punkt  $B$ . Jaka figurę tworzą te rzuty?
  14. Wyznaczyć trzecią współrzędną  $a_z$  wektora  $\vec{a}$ , jeśli wiadomo, że  $a_x = 4$ ,  $a_y = -12$ ,  $a = 13$ .
  15. Obliczyć współrzędne wektora, którego moduł jest równy 2, a kąty kierunkowe  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $120^\circ$ .
  16. Obliczyć cosinusy kierunkowe wektora  $(12, -15, -16)$ .
  17. Czy kąty kierunkowe wektora mogą być równe: a)  $120^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , b)  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $60^\circ$ , c)  $90^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $60^\circ$ ?
  18. Dwa kąty kierunkowe wektora są równe  $120^\circ$  i  $45^\circ$ . Wyznaczyć trzeci.
  19. Jakie współrzędne ma koniec  $M$  wektora  $\vec{OM}$  o module  $OM = 3$  i wszystkich trzech kątach kierunkowych równych?
  20. Zbadać równoległość wektorów  $\vec{a} = [2, -1, 3]$ ,  $\vec{b} = [-6, 3, -9]$ . Który z nich jest dłuższy, ile razy i czy są zgodnie skierowane? Wyrazić odpowiedź w jednym wzorze wektorowym.
  21. Obliczyć moduły sumy i różnicy wektorów  $[3, -5, 8]$ ,  $[-1, 1, -4]$ .
  22. Dane są punkty  $A(3, -1, +2)$ ,  $B(-1, 2, 1)$ . Obliczyć współrzędne wektorów  $\vec{AB}$  i  $\vec{BA}$ .
  23. Punkt  $A$  ma współrzędne  $(1, 2, -3)$ , wektor  $\vec{AB}$  ma współrzędne  $(3, -1, 4)$ . Obliczyć współrzędne punktu  $B$ .
  24. Punkt  $B$  ma współrzędne  $(1, -1, 2)$ , wektor  $\vec{AB}$  ma współrzędne  $[2, -3, -1]$ . Obliczyć współrzędne punktu  $A$ .
  25. Wyznaczyć współrzędne końców odcinka, który punktami  $(2, 0, 2)$  i  $(5, -2, 0)$  jest podzielony na trzy równe części.
  26. Znaleźć środki boków trójkąta o wierzchołkach  $(3, 2, -5)$ ,  $(1, -4, 3)$  i  $(-3, 0, 1)$ .
  27. Dane są trzy kolejne wierzchołki równoległoboku  $(3, -1, 2)$ ,  $(1, 2, -4)$ ,  $(-1, 1, 2)$ . Wyznaczyć czwarty wierzchołek.
  28. Sprawdzić czy punkty  $A(3, -1, 2)$ ,  $B(1, 2, -1)$ ,  $C(-1, 1, -3)$ ,  $D(3, -5, 3)$  są wierzchołkami trapezu.
  29. Obliczyć miarę rzutu wektora  $[1, -3, 1]$  na oś  $MN$ , gdzie  $M(-5, 7, -6)$ ,  $N(7, -9, 9)$ .
  30. Obliczyć moduł wektora  $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ , jeśli  $u = 4$ ,  $v = 2$ ,  $w = 6$  i każde dwa z wektorów  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  tworzą kąt  $60^\circ$ . Wsk.: Oblicz  $\vec{p} \cdot \vec{p}$ .
  31. Obliczyć cosinus kąta między wektorami  $[2, -4, 4]$ ,  $[-3, 2, 6]$ .

9.  $4 \leq s \leq 16$ .
10.  $(0, a, a)$ ,  $(a, 0, a)$ ,  $(0, 0, a)$ ,  $(2a, a, a)$ ,  $(a, 2a, a)$ ,  $(a, a, 2a)$ ,  $(a, a, a)$ .
11. a)  $(-3, 2, 0)$ ,  $(-3, 0, -1)$ ,  $(0, 2, -1)$ ; b)  $(-3, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, -1)$ ; c)  $(-3, 2, 1)$ ,  $(-3, -2, -1)$ ,  $(3, 2, -1)$ ,  $(-3, -2, 1)$ ,  $(3, 2, 1)$ ,  $(3, -2, -1)$ ,  $(3, -2, 1)$ .
12. Moduł 15, kąt  $47^\circ 46'$ .
13. Powierzchnię kuli o średnicy  $\overline{AB}$ .
14.  $a_z = \pm 3$ .
15.  $(\sqrt{2}, 1, -1)$ .
16.  $12/25$ ,  $-3/5$ ,  $-16/25$ .
17. a) Tak, b) nie, c) tak.
18.  $60^\circ$  lub  $120^\circ$ .
19.  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$ .
20.  $b = -3a$ .
21. 6; 14.
22.  $\vec{AB} = [-4, 3, -1]$   $\vec{BA} = [4, -3, 1]$ .
23.  $B(4, 1, 1)$ .
24.  $A(-1, 2, 3)$ .
25.  $(-1, 2, 4)$ ,  $(8, -4, -2)$ .
26.  $(2, -1, -1)$ ,  $(-1, -2, 2)$ ,  $(0, 1, -2)$ .
27.  $(1, -2, 8)$ .
28.  $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ ,  $\vec{AC} \nparallel \vec{BD}$ ,  $\vec{AD} \nparallel \vec{BC}$ .
29. 3.
30. 10.
31.  $5/21$ .

## Rozdział XXIII

### RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

#### 142. Prawdliwość statystyczna

**Doświadczenie losowe, zdarzenie losowe.** Doświadczeniem losowym nazywamy doświadczenie, które może być powtarzane dowolnie wiele razy w warunkach identycznych lub bardzo zbliżonych i którego wynik nie daje się przewidzieć jednoznacznie. Wynik doświadczenia losowego nazywamy *zdarzeniem losowym* (krótko: *zdarzeniem*).

Przykład 142.1

|   | Doświadczenie losowe                                            | Przykłady zdarzeń losowych                                      |
|---|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1 | Rzut monetą                                                     | orzeł; reszka                                                   |
| 2 | Rzut kością do gry                                              | 5 oczek; parzysta liczba oczek; co najmniej 3 oczka             |
| 3 | Strzelanie do celu                                              | trafienie; nie trafienie                                        |
| 4 | Urodzenie dziecka                                               | pleć męska; pleć żeńska                                         |
| 5 | Wybranie 13 kart z talii 52 kart                                | wszystkie trefle; co najmniej 1 as; 0 asów                      |
| 6 | Obserwacja czasu świecenia żarówki                              | 50 godzin; od 60 godzin do 100 godzin; więcej niż 80 godzin     |
| 7 | Losowanie toto-lotka                                            | sześć spośród 49 dyscyplin sportowych                           |
| 8 | Obserwacja liczby cząstek $\alpha$ emitowanych przez substancję | 3 cząstki; co najmniej jedna cząstka; co najwyżej jedna cząstka |
| 9 | Pomiar pewnej wielkości fizycznej                               | wynik pomiaru należy do przedziału $<10; 50>$                   |

**Częstość zdarzenia.** W pojedynczym doświadczeniu losowym dane zdarzenie — nazwijmy je  $A$  — może zajść lub nie zajść. Jeśli doświadczenie to zostało powtórzone  $n$  razy, w wyniku czego zdarzenie  $A$  zaszło  $l$  razy, to iloraz

$$\frac{l}{n}$$

nazywamy *częstością względną* zdarzenia  $A$  (krótko: *częstością zdarzenia  $A$* ).

**Prawdliwość statystyczna.** Aczkolwiek wyniku pojedynczego doświadczenia losowego nie można przewidzieć, to jednak, powtarzając doświadczenie wiele razy w warunkach identycznych lub bardzo zbliżonych, zauważa się na ogół interesujące zjawisko, zwane *prawdliwością statystyczną*, a polegające na tym, że przy coraz większej liczbie doświadczeń losowych częstość zdarzenia dąży do pewnej stałej liczby.

**Przykład 142.2.** Częstość wyrzucania orła przy rzucie monetą w krótkich seriach doświadczeń bywa rozmaita, ale po wykonaniu ponad 100 rzutów częstość odchyła się od liczby 0,5 nieznacznie. Podobnie w długiej serii rzutów kością do gry częstość wypadnięcia 5 oczek waha się dokoła liczby  $\frac{1}{6}$ .

*Rachunek prawdopodobieństwa* jest to dział matematyki zajmujący się badaniem prawidłowości w zakresie doświadczeń losowych.

#### Pytania

1. Podać kilka przykładów doświadczeń losowych oraz zdarzeń związanych z tymi doświadczeniami.
2. Co to jest częstość zdarzenia?
3. Na czym polega prawidłliwość statystyczna? Podać przykłady.

#### 143. Zdarzenia losowe

**Zbiór zdarzeń elementarnych.** Najprostsze wyniki doświadczenia losowego nazywamy *zdarzeniami elementarnymi*. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego oznaczamy literą  $E$ . Zdarzenia elementarne i zbioru zdarzeń elementarnych nie definiuje się, są to bowiem pojęcia podstawowe rachunku prawdopodobieństwa, jak punkt i przestrzeń są pojęciami podstawowymi w geometrii. Dla każdego doświadczenia losowego należy oddzielnie stwierdzić co uważamy za zdarzenia elementarne i określić zbiór zdarzeń elementarnych.

W przypadku rzutu kością mamy 6 zdarzeń elementarnych; oznaczmy je symbolami

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$$

przy czym  $e_1$  oznacza wyrzucenie 1 oczka,  $e_2$  — wyrzucenie dwóch oczek itd. Zdarzenia losowe, które można otrzymać w tym doświadczeniu, mogą być uważane za zbiory pewnych zdarzeń elementarnych. Oto przykłady.:

Niech  $A$  będzie zdarzeniem losowym polegającym na wyrzuceniu parzystej liczby oczek. Zdarzenie  $A$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedno ze zdarzeń elementarnych  $e_2, e_4$  lub  $e_6$ . Zdarzenie  $A$  może być uważane za zbiór tych zdarzeń elementarnych

$$A = \{e_2, e_4, e_6\}$$

Zdarzenie losowe  $B$  polegające na wyrzuceniu co najmniej 3 oczek zapisujemy

$$B = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

Zdarzenie

$$C = \{e_5, e_6\}$$

polega na wyrzuceniu co najmniej 5 oczek, zaś zdarzenie

$$D = \{e_5\}$$

polega na wyrzuceniu dokładnie 5 oczek.

Zbiorem zdarzeń elementarnych dla rzutu kością jest zbiór

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

Widać, że zdarzenia losowe  $A, B, C, D$  a także inne zdarzenia losowe otrzymywane przy rzucie kością można uważać za podzbiory  $E$ .

Zbiór zdarzeń elementarnych może być skończony (gdy liczba zdarzeń elementarnych jest skończona) lub nieskończony (gdy istnieje nieskończenie wiele zdarzeń elementarnych). W naszych rozważaniach ograniczymy się wyłącznie do doświadczeń losowych, których zbiory zdarzeń elementarnych są skończone.

**Zdarzenie losowe jako podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych.**

**Definicja 143.1.** Każdy podzbiór zbioru  $E$  zdarzeń elementarnych nazywamy *zdarzeniem losowym* (krótko: *zdarzeniem*).

**Zachodzenie zdarzenia.** Niech  $A$  będzie dowolnym zdarzeniem losowym. Mówimy, że *zachodzi zdarzenie  $A$* , gdy zachodzi jedno ze zdarzeń elementarnych wchodzących w skład tego zdarzenia.

**Zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe.** Podzbiorymi zbioru  $E$  są też dwa szczególne zbiory:

– sam zbiór  $E$  wszystkich zdarzeń elementarnych, który nazywamy *zdarzeniem pewnym*,

– zbiór pusty  $\emptyset$ , który nazywamy *zdarzeniem niemożliwym*.

Zdarzenie pewne zachodzi w każdym doświadczeniu losowym. Zdarzenie niemożliwe nie zachodzi w żadnym doświadczeniu losowym. Przy rzucie kością „wyrzucenie co najmniej 1 oczka” jest zdarzeniem pewnym, natomiast „wyrzucenie siedmiu oczek” jest zdarzeniem niemożliwym.

**Liczba zdarzeń losowych. Twierdzenie 143.1.** Jeśli zbiór zdarzeń elementarnych  $E$  ma  $n$  elementów, to zdarzeń losowych jest  $2^n$  (łącznie ze zdarzeniem pewnym i zdarzeniem niemożliwym).

**Dowód.** Zdarzenie  $k$ -elementowe jest podzbiorem  $k$  elementów wziętych ze zbioru  $E$  zawierającego  $n$  elementów, jest więc  $k$ -elementową kombinacją zbioru  $n$  elementów (zob. p. 44). Liczba takich zdarzeń przy ustalonym  $k$  jest równa wartości symbolu Newtona  $\binom{n}{k}$ . Suma symbolów Newtona przy ustalonym  $n$  oraz przy  $k$  przebiegającym wartości  $0, 1, 2, \dots, n$  zgodnie ze związkiem (45.3) jest równa  $2^n$ .

## Przykłady zbiorów zdarzeń elementarnych

**Przykład 143.1.** Rzut monetą. Zdarzeniami elementarnymi są:  $o$  – wyrzucenie orła,  $r$  – wyrzucenie reszki. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór

$$E = \{o, r\}$$

Możliwe są następujące 4 zdarzenia losowe:

$\{o\}$  – wyrzucenie orła

$\{r\}$  – wyrzucenie reszki

$E = \{o, r\}$  – wyrzucenie orła lub reszki (zdarzenie pewne)

$\emptyset$  – nie wyrzucenie ani orła ani reszki (zdarzenie niemożliwe).

Poniższe dwa przykłady wskazują, że w zależności od interesującego nas zagadnienia, można, dla tego samego doświadczenia losowego, określić zbiór zdarzeń elementarnych w różny sposób.

**Przykład 143.2.** Dwukrotny rzut monetą. Zdarzeniami elementarnymi są:  $(o, o)$  – dwukrotne wyrzucenie orła,  $(o, r)$  – wyrzucenie najpierw orła, potem reszki,  $(r, o)$  – wyrzucenie najpierw reszki, potem orła,  $(r, r)$  – dwukrotne wyrzucenie reszki. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór

$$E = \{(o, o), (o, r), (r, o), (r, r)\}$$

Możliwych jest tu  $2^4 = 16$  zdarzeń losowych. Oto niektóre z nich:

$\{(o, o), (o, r), (r, o)\}$  – wyrzucenie co najmniej 1 orła,

$\{(o, o), (o, r)\}$  – wyrzucenie orła w pierwszym rzucie,

$\{(o, o)\}$  – wyrzucenie dwóch orłów.

**Przykład 143.3.** Dwukrotny rzut monetą. Interesuje nas liczba wyrzuconych orłów. Można teraz określić zdarzenia elementarne następująco:  $e_0$  – wyrzucenie zero orłów,  $e_1$  – wyrzucenie 1 orła,  $e_2$  – wyrzucenie 2 orłów. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór

$$E = \{e_0, e_1, e_2\}$$

Możliwych jest teraz  $2^3 = 8$  zdarzeń losowych. Oto niektóre z nich:

$\{e_1, e_2\}$  – wyrzucenie co najmniej 1 orła,

$\{e_0, e_1\}$  – wyrzucenie co najwyżej 1 orła,

$\{e_1\}$  – wyrzucenie dokładnie 1 orła,

$\{e_0, e_1, e_2\} = E$  – wyrzucenie nie więcej niż dwóch orłów (zdarzenie pewne).

Przy tak określonym zbiorze zdarzeń elementarnych nie można mówić o zdarzeniu polegającym na wyrzuceniu orła w pierwszym rzucie.

### Pytania

1. Wymień podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa.
2. Podaj określenie zdarzenia losowego jako podzbioru zbioru zdarzeń elementarnych.
3. Co to jest zdarzenie pewne, a co to jest zdarzenie niemożliwe? Kiedy one zachodzą?
4. Ile zdarzeń losowych można utworzyć z  $n$  zdarzeń elementarnych?

## 144. Relacje między zdarzeniami

### Relacje między zbiorami a relacje między zdarzeniami

Ponieważ zdarzenia losowe są zbiorami, więc między zdarzeniami losowymi występują wszystkie te relacje, które występują między zbiorami. Oto nazwy relacji między zbiorami i odpowiadające im nazwy relacji między zdarzeniami.

|   | Relacja między zbiorami             | Relacja między zdarzeniami          | Symbol relacji         |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|
| 1 | suma zbiorów $A, B$                 | suma zdarzeń $A, B$                 | $A \cup B$             |
| 2 | iloczyn zbiorów $A, B$              | iloczyn zdarzeń $A, B$              | $A \cap B$             |
| 3 | różnica zbiorów $A, B$              | różnica zdarzeń $A, B$              | $A - B$                |
| 4 | uzupełnienie zbioru $A$             | zdarzenie przeciwne do $A$          | $A'$                   |
| 5 | zbiór $A$ zawiera się w zbiorze $B$ | zdarzenie $A$ pociąga zdarzenie $B$ | $A \subset B$          |
| 6 | zbiory $A, B$ rozłączne             | zdarzenia $A, B$ wykluczające się   | $A \cap B = \emptyset$ |

**Przykład 144.1.** Rzut kością.  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ . Zdarzenie  $A = \{e_2, e_4, e_6\}$  oznacza wyrzucenie parzystej liczby oczek,  $B = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$  – wyrzucenie co najmniej 3 oczek, zaś  $C = \{e_5\}$  – wyrzucenie dokładnie 5 oczek. Wtedy

- suma  $A \cup B = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  oznacza wyrzucenie co najmniej dwóch oczek,
- iloczyn  $A \cap B = \{e_4, e_6\}$  oznacza wyrzucenie 4 lub 6 oczek,
- różnica  $A - B = \{e_2\}$  oznacza wyrzucenie dokładnie 2 oczek,
- zdarzeniem przeciwnym do  $A$  jest  $A' = \{e_1, e_3, e_5\}$  i oznacza wyrzucenie nieparzystej liczby oczek,
- zdarzenie  $C$  pociąga zdarzenie  $B$ ,  $C \subset B$  oznacza to, że gdy zajdzie zdarzenie  $C$ , to zajdzie także zdarzenie  $B$ ,
- zdarzenia  $A$  i  $C$  wykluczają się,  $A \cap C = \emptyset$  oznacza to, że zdarzenia te nie mogą zajść jednocześnie.

**Zachodzenie relacji.** W poniższej tabeli podano kiedy zachodzą poszczególne relacje między zdarzeniami

|   | Nazwa relacji                       | Relacja zachodzi                                         |
|---|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1 | Suma zdarzeń $A, B$                 | gdy zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń $A, B$         |
| 2 | iloczyn zdarzeń $A, B$              | gdy zachodzi zdarzenie $A$ i zdarzenie $B$               |
| 3 | różnica zdarzeń $A, B$              | gdy zachodzi zdarzenie $A$ i nie zachodzi zdarzenie $B$  |
| 4 | zdarzenie przeciwne do $A$          | gdy $A$ nie zachodzi                                     |
| 5 | zdarzenie $A$ pociąga zdarzenie $B$ | gdy z zajścia zdarzenia $A$ wynika zajście zdarzenia $B$ |
| 6 | zdarzenia $A$ i $B$ wykluczają się  | gdy zdarzenia $A$ i $B$ nie mogą zajść jednocześnie      |

### Pytania i zadania

1. Wymień nazwy relacji między zbiorami i odpowiadające im nazwy relacji między zdarzeniami.
  2. Niech  $A, B$  będą dowolnymi zdarzeniami losowymi. Kiedy zachodzi zdarzenie: a)  $A \cup B$ , b)  $A \cap B$ , c)  $A - B$ , d)  $A'$ ?
  3. Kiedy zdarzenia  $A$  i  $B$  wykluczają się?
  4. Kiedy zdarzenie  $A$  pociąga zdarzenie  $B$ ?
- Podać przykłady ilustrujące odpowiedzi na pytania 2, 3, 4.

5. Cztery samoloty wtargnęły do obszaru państwa. Każdy z nich może być w określonym czasie wykryty lub niewykryty.

- a) Określić zbiór zdarzeń elementarnych.
- b) Zapisać jako podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych następujące zdarzenia losowe:

$A$  – wykryto dokładnie jeden samolot,  
 $B$  – wykryto co najmniej jeden samolot,  
 $C$  – wykryto co najmniej dwa samoloty,  
 $D$  – wykryto dokładnie dwa samoloty.

- c) Co oznaczają zdarzenia  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $B \cup C$ ,  $B \cap C$ ,  $B \cup D'$ ,  $A \cup B \cup C \cup D$ ,  $A \cap B \cap C$ ?

6. Kandydat na wyższe studia techniczne zdaje egzaminy wstępne z matematyki, z fizyki i z języka obcego. Interesuje nas z których przedmiotów kandydat zdał egzamin.

- a) Określić zbiór zdarzeń elementarnych.

- b) Zapisać jako podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych następujące zdarzenia losowe:

$A_1$  – kandydat zdał egzamin ze wszystkich trzech przedmiotów,  
 $A_2$  – kandydat nie zdał egzaminu tylko z matematyki,  
 $A_3$  – kandydat zdał egzamin tylko z języka obcego,

- $A_4$  — kandydat zdał egzamin z dokładnie dwóch przedmiotów,  
 $A_5$  — kandydat zdał egzamin z języka obcego,  
 $A_6$  — kandydat zdał egzamin z co najmniej dwóch przedmiotów,  
 $A_7$  — kandydat zdał egzamin z co najwyżej dwóch przedmiotów.
7. Z partii towaru zawierającej sztuki dobre i złe wylosowano trzy sztuki towaru. Niech  $A$  oznacza zdarzenie — wśród wylosowanych sztuk wszystkie są dobre,  $B$  — jest co najmniej jedna sztuka dobra,  $C$  — jest co najwyżej jedna sztuka dobra. Objasnić co oznaczają zdarzenia:  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A \cup B$ ,  $B \cup C$ ,  $A \cap B$ ,  $B \cap C$ ,  $B' \cap C'$ .
8. Do celu oddano trzy strzały. Niech  $A_i$  oznacza zdarzenie losowe polegające na trafieniu do celu w  $i$ -tym strzale ( $i = 1, 2, 3$ ). Zapisać przy pomocy działań na zdarzeniach  $A_i$  zdarzenie polegające na trafieniu do celu a) 3 razy, b) ani razu, c) co najmniej raz, d) nie więcej niż raz, e) po raz pierwszy w trzecim strzale.
9. Niech  $A$ ,  $B$  i  $C$  będą dowolnymi zdarzeniami. Przy pomocy działań na zdarzeniach zapisać, że ze zdarzeń  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a) zachodzi tylko  $A$ ; b) zachodzą  $A$  i  $B$  i nie zachodzi  $C$ ; c) zachodzą wszystkie trzy; d) zachodzi co najmniej jedno; e) zachodzą co najmniej dwa; f) zachodzi tylko jedno; g) zachodzą tylko dwa; h) żadne nie zachodzi; i) zachodzą nie więcej niż dwa.
10. Czterech graczy  $N$ ,  $S$ ,  $W$ ,  $E$  otrzymuje po 13 kart. Niech  $N_k$  oznacza zdarzenie, że gracz  $N$  otrzymał co najmniej  $k$  asów ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Niech  $S_k$ ,  $W_k$ ,  $E_k$  będą analogicznymi zdarzeniami dla graczy  $S$ ,  $W$ ,  $E$ . Ile asów ma gracz  $W$ , gdy zaszło zdarzenie; a)  $W'_1$ ; b)  $N_2 \cap S_2$ ; c)  $N'_1 \cap S'_1 \cap E'_1$ ; d)  $W_2 - W_3$ ; e)  $N_1 \cap S_1 \cap E_1 \cap W_1$ ; f)  $N_3 \cap W_1$ ; g)  $(N_2 \cup S_2) \cap E_2$ ?
11. Uprościć wyrażenia:  
a)  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ; b)  $(A \cup B) \cap (A \cup B')$ ;  
c)  $(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B')$ .
12. Niech  $A \subset B \subset C$ . Uprościć a)  $A \cup B \cup C$ ; b)  $A \cap B \cap C$ .
13. Wykazać, że:  
a)  $[(A \cup B) \cap (A \cup B')] \cup [(A' \cup B) \cap (A' \cup B')] = E$   
b)  $[(A \cup B) \cap (A' \cup B')] \cup [(A \cup B') \cap (A' \cup B)] = E$   
c)  $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B') = \emptyset$ .

## 145. Pojęcie prawdopodobieństwa

**Częstość a prawdopodobieństwo.** Wprawdzie nie można przewidzieć czy w pojedynczym doświadczeniu losowym zajdzie dane zdarzenie, to jednak niektóre zdarzenia zachodzą częściej — inne rzadziej. Na przykład w długim ciągu powtórzeń rzutu kością można zauważyć, że częstość zdarzenia  $A$  — „wyrzucenie parzystej liczby oczek” zbliża się do  $\frac{1}{2}$ , zaś częstość zdarzenia  $B$  — „wyrzucenie 3 lub 4 oczek” zbliża się do  $\frac{1}{3}$ , a więc zdarzenie  $A$  zachodzi częściej niż zdarzenie  $B$ .

Mówimy wtedy, że zdarzenie  $A$  jest bardziej prawdopodobne niż zdarzenie  $B$ . Jest więc rzeczą pożądaną, aby każdemu zdarzeniu losowemu  $A$  przyporządkować pewną liczbę  $P(A)$  określającą szanse zajścia tego zdarzenia w jednym doświadczeniu losowym. Liczbę  $P(A)$  nazwiemy prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ .

Prawdopodobieństwo  $P(A)$  należy określić tak, by w długim ciągu powtórzeń danego doświadczenia losowego w tych samych warunkach, częstość zdarzenia  $A$  zbliżała się do prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$ . Zatem definicja prawdopodobieństwa powinna być zgodna z następującymi podstawowymi własnościami częstości.

### Własności częstości:

- częstość jest liczbą należącą do przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$ ,
- częstość zdarzenia pewnego jest równa 1,
- częstość sumy dwóch zdarzeń wykluczających się jest równa sumie częstości tych zdarzeń.

Własności a) i b) są oczywiste, objaśnimy tylko własność c). Jeżeli w  $n$  doświadczeniach zdarzenie  $A$  zaszło  $k$  razy i zdarzenie  $B$  zaszło  $l$  razy, to oczywiście częstość  $A$  jest równa  $\frac{k}{n}$  zaś częstość  $B$  wynosi  $\frac{l}{n}$ . Ponieważ zdarzenia  $A$  i  $B$  wykluczają się, więc suma  $A \cup B$  zaszła  $k + l$  razy, zatem częstość  $A \cup B$  wynosi  $\frac{k+l}{n}$  i równa się sumie częstości zdarzeń  $A$  i  $B$ .

**Ogólna definicja prawdopodobieństwa.** Zakładamy, że zdarzenia losowe  $A$ ,  $B$  są podzbiarami tego samego zbioru  $E$  zdarzeń elementarnych.

**Definicja 145.1.** Jeśli każdemu zdarzeniu losowemu  $A$  przyporządkowano liczbę rzeczywistą  $P(A)$ , zwaną prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ , w taki sposób, aby spełnione były następujące warunki:

$$\text{I} \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (145.1)$$

II prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1

$$P(E) = 1 \quad (145.2)$$

III prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń wykluczających się jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (145.3)$$

to określoną w ten sposób funkcję  $P$  nazywamy prawdopodobieństwem.

**Przykład 145.1.** Rzut monetą.  $E = \{o, r\}$ . Wiemy, że w tym doświadczeniu mamy cztery zdarzenia losowe  $\emptyset, \{o\}, \{r\}, \{o, r\}$ . Określimy na tych zdarzeniach funkcję  $P$  w następujący sposób:

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\{o\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{r\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{o, r\}) = 1$$

Łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja  $P$  spełnia warunki I, II, III, a więc jest prawdopodobieństwem. Wartości tej funkcji są prawdopodobieństwami poszczególnych zdarzeń.

Na tych samych zdarzeniach losowych określimy inną funkcję, którą dla odróżnienia oznaczmy  $P_1$ :

$$P_1(\emptyset) = 0, \quad P_1(\{o\}) = \frac{1}{3}, \quad P_1(\{r\}) = \frac{2}{3}, \quad P_1(\{o, r\}) = 1$$

Łatwo sprawdzić, że także funkcja  $P_1$  jest prawdopodobieństwem.

Widzimy, że ogólna definicja prawdopodobieństwa, nie precyzuje jednoznacznie wartości liczbowych prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń. Z teoretycznego punktu widzenia jest wszystko jedno, czy przyjmiemy, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe  $\frac{1}{2}$  czy też np.  $\frac{1}{3}$ , byleby prawdopodobieństwa pozostałych zdarzeń losowych były określone w zgodzie z warunkami I, II, III. Dysponujemy więc pewną dowolnością przy ustalaniu wartości liczbowych prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń. Wartości te przyjmujemy w zależności od rozpatrywanego doświadczenia. Jeżeli np. rzucamy monetą symetryczną, to oczywiście przyjmujemy, że prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki jest równe prawdopodobieństwu wyrzucenia orła i równa się  $\frac{1}{2}$ . Jeżeli natomiast moneta jest niesymetryczna i obserwujemy, że częstość wypadnięcia orła przybliża się do pewnej liczby  $p$ , to wówczas przyjmujemy, że prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe  $p$ .

### Pytania

1. Jak należy rozumieć, interpretując prawdopodobieństwo za pomocą częstości, że prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe  $P(A)$ .
2. Wymień własności częstości, na których opiera się ogólna definicja prawdopodobieństwa.
3. Podaj ogólną definicję prawdopodobieństwa. Czy definicja ta określa jednoznacznie prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń losowych?

## 146. Własności prawdopodobieństwa

### Twierdzenie 146.1

1. Jeżeli zdarzenia losowe  $A_1, \dots, A_n$  wykluczają się parami (tzn. każde dwa z nich wykluczają się), to prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń jest równe sumie ich prawdopodobieństw.

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n) \quad (146.1)$$

2. Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe zero

$$P(\emptyset) = 0 \quad (146.2)$$

3. Jeżeli zdarzenie  $A$  pociąga zdarzenie  $B$ , to zachodzą następujące związki

$$P(A) \leq P(B) \quad (146.3)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (146.4)$$

4. Prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń pomniejszonej o prawdopodobieństwo ich iloczynu

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (146.5)$$

5. Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  równa się różnicy liczby 1 i prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego do  $A$

$$P(A) = 1 - P(A') \quad (146.6)$$

### Dowód

1. Prosty dowód indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi.

2.  $A \cup \emptyset = A$

Zdarzenia  $A$  i  $\emptyset$  wykluczają się, więc na podstawie (145.3)

$$P(A) + P(\emptyset) = P(A)$$

a stąd  $P(\emptyset) = 0$ .

3. Ponieważ  $A \subset B$ , więc  $B$  można przedstawić w postaci

$$B = A \cup (B - A)$$

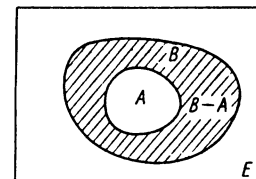
Ilustruje to rys. 146-1. Ale zdarzenia  $A$  i  $B - A$  wykluczają się, więc na podstawie (145.3)

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \quad (146.7)$$

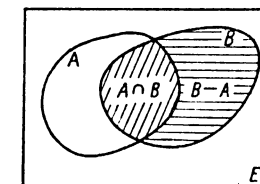
Ponieważ  $P(B - A) \geq 0$  (patrz (145.1)), więc

$$P(B) \geq P(A)$$

co kończy dowód (146.3). Jeżeli we wzorze (146.7) przeniesiemy  $P(A)$  na lewą stronę, to otrzymamy (146.4).



Rys. 146-1



Rys. 146-2

4. Dla dowolnych zdarzeń  $A, B$  zachodzą równości

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$B = (A \cap B) \cup (B - A)$$

(rys. 146-2). Zdarzenia  $A$  i  $B-A$  oraz  $A \cap B$  i  $B-A$  wykluczają się, więc

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B-A)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B-A)$$

Odejmując stronami od pierwszej z powyższych równości drugą równość otrzymujemy (146.5).

$$5. \quad A \cup A' = E$$

Oczywiście zdarzenia  $A$  i  $A'$  wykluczają się, więc

$$P(A) + P(A') = P(E)$$

ale  $P(E) = 1$  (patrz (145.2)), zatem

$$P(A) + P(A') = 1, \quad \text{czyli} \quad P(A') = 1 - P(A).$$

### Pytania

1. Cemu równa się prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego, a czemu prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego?
2. Podać wzór na prawdopodobieństwo sumy dwóch dowolnych zdarzeń. Jaką postać przybiera ten wzór, gdy zdarzenia wykluczają się?
3. Zdarzenie  $A$  pociąga  $B$ . Jaki znak nierówności wstawisz między  $P(A)$ ,  $P(B)$ ? Co wiesz o prawdopodobieństwie różnicy zdarzeń  $B$  i  $A$ ?
4. Jaki znasz związek między prawdopodobieństwami zdarzenia  $A$  i zdarzenia przeciwnego do  $A$ ?

## 147. Przykłady definiowania prawdopodobieństw

**Obliczanie prawdopodobieństw**, gdy dane są prawdopodobieństwa jednoelementowych zdarzeń.

**Przykład 147.1.** Pewne urządzenie elektryczne składa się z 5 podzespołów. Interesuje nas ile podzespołów zepsuje się w ciągu czasu  $T$ . Określimy zbiór zdarzeń elementarnych następująco

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

gdzie  $e_0$  oznacza, że w ciągu czasu  $T$  nie zepsuje się żaden podzespół,  $e_1$  oznacza że w ciągu czasu  $T$  zepsuje się 1 podzespół itd.

Przypuścimy, że zostały określone prawdopodobieństwa następujących zdarzeń losowych jednoelementowych

$$\{e_0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}$$

Niech np.

$$P(\{e_0\}) = 0,8, \quad P(\{e_1\}) = 0,1, \quad P(\{e_2\}) = 0,04, \quad P(\{e_3\}) = 0,03,$$

$$P(\{e_4\}) = 0,02, \quad P(\{e_5\}) = 0,01.$$

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na zepsuciu się w czasie  $T$  co najmniej trzech podzespołów. Zdarzenie  $A$  można zapisać następująco:

$$A = \{e_3, e_4, e_5\} = \{e_3\} \cup \{e_4\} \cup \{e_5\}$$

Stąd na podstawie (146.1) otrzymujemy

$$P(A) = P(\{e_3\}) + P(\{e_4\}) + P(\{e_5\}) = 0,03 + 0,02 + 0,01 = 0,06$$

Powyższy przykład wskazuje, że wystarczy znać prawdopodobieństwa jednoelementowych zdarzeń, aby obliczyć prawdopodobieństwa pozostałych zdarzeń.

**Twierdzenie 147.1.** Jeśli w zbiorze  $n$  zdarzeń elementarnych

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

określone zostały prawdopodobieństwa zdarzeń losowych jednoelementowych

$$P(\{e_1\}) = p_1, \dots, P(\{e_n\}) = p_n$$

w ten sposób, że

$$p_1 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$$

$$p_1 + \dots + p_n = 1$$

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia  $A$  złożonego z  $k$  zdarzeń elementarnych

$$e_{j_1}, \dots, e_{j_k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

jest równe

$$P(A) = p_{j_1} + \dots + p_{j_k} \quad (147.1)$$

**Dowód** tego twierdzenia pomijamy.

### Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

**Twierdzenie 147.2.** Jeśli w zbiorze  $n$  zdarzeń elementarnych

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

przyjęto, że prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń losowych jednoelementowych są równe między sobą (a więc równe  $\frac{1}{n}$ )

$$P(\{e_1\}) = \dots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$$

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia  $A$  złożonego z  $k$  zdarzeń elementarnych jest równe

$$P(A) = \frac{k}{n} \quad (147.2)$$

**Dowód.** Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzenia 147.1.

Przyjęła się następująca terminologia. Zdarzenia elementarne należące do zbioru  $E$  nazywa się *zdarzeniami możliwymi*, zaś zdarzenia elementarne, z których

składa się zdarzenie  $A$  — zdarzeniami sprzyjającymi zjawisku  $A$ . Twierdzenie 147.2 można wypowiedzieć w następujący sposób:

*Jeżeli wszystkie zdarzenia losowe jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia  $A$  jest równe stosunkowi liczby zdarzeń sprzyjających zjawisku  $A$  do liczby możliwych zdarzeń.*

Wzór (147.2) nazywa się *klasyczną definicją prawdopodobieństwa*.

### Przykłady obliczania prawdopodobieństw

**Przykład 147.2.** Rzut kością.  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ . Jeśli kość jest symetryczna to można przyjąć, że zdarzenia losowe jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne. Zjawisku zdarzenia  $A$  — wypadnięcie parzystej liczby oczek sprzyjają 3 zdarzenia elementarne  $e_2, e_4, e_6$ , możliwych jest 6 zdarzeń, więc  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . Zdarzeniu  $B$  — wyrzucenie co najmniej 3 oczek sprzyjają 4 zdarzenia elementarne  $e_3, e_4, e_5, e_6$ , więc  $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

**Przykład 147.3.** Dwukrotny rzut monetą. W tym doświadczeniu  $E = \{(o, o), (o, r), (r, o), (r, r)\}$ . Zjawisku zdarzenia  $A$  — wyrzucenie co najmniej raz orła, sprzyjają zdarzenia elementarne  $(o, o), (o, r), (r, o)$ , więc  $P(A) = \frac{3}{4}$ , zaś zjawisku zdarzenia  $B$  — w pierwszym rzucie orzeł, sprzyjają  $(o, o), (o, r)$ , więc  $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

Gdybyśmy w tym doświadczeniu określili zbiór zdarzeń elementarnych jak w przykładzie 143.3, tzn. przyjęlibyśmy, że  $E = \{e_0, e_1, e_2\}$ , gdzie  $e_i$  oznacza wyrzucenie  $i$  orłów ( $i = 0, 1, 2$ ), to do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$  — wyrzucenie co najmniej jednego orła, nie moglibyśmy zastosować klasycznej definicji prawdopodobieństwa, gdyż nie można przyjąć, że zdarzenia jednoelementowe  $\{e_0\}, \{e_1\}, \{e_2\}$  są jednakowo prawdopodobne. Przyjmując natomiast, że

$$P(\{e_0\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{e_1\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{e_2\}) = \frac{1}{4}$$

to w myśl wzoru (147.1) mamy

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

co jest zgodne z uprzednio otrzymanym wynikiem.

**Przykład 147.4.** Z talii 52 kart wyciągnięto jedną kartę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jest ona asem lub pikiem.

Niech  $A$  będzie zdarzeniem — wyciągnięta karta jest asem,  $B$  — wyciągnięta karta jest pikiem. Mamy obliczyć  $P(A \cup B)$ . Skorzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy dwóch dowolnych zdarzeń (patrz wzór (146.5)).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Zakładamy, że wyciągnięcie każdej karty jest jednakowo prawdopodobne, wtedy  $P(A) = \frac{4}{52}$ ,  $P(B) = \frac{13}{52}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ , gdyż w talii są 4 asy, 13 pików, jedna karta jest asem i pikiem (as pik). Szukane prawdopodobieństwo

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

### Zadania

1. Rzucono trzykrotnie monetą symetryczną. Określić zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Obliczyć prawdopodobieństwo, że orzeł pojawi się: a) dwa razy, b) co najmniej dwa razy, c) co najwyżej dwa razy.
2. Rzucono dwie kości symetryczne. Określić zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Niech  $A$  oznacza zdarzenie — suma oczek jest nieparzysta,  $B$  — przynajmniej na jednej kości wypadnie jedynka. Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B'$ .
3. Spomiędzy cyfr 1, 2, 3, 4, 5 najpierw wybiera się jedną, a następnie dokonuje się drugiego wyboru z pozostałych czterech. Określić zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Znaleźć prawdopodobieństwo, że nieparzysta cyfra zostanie wybrana: a) za pierwszym razem, b) za drugim razem, c) za pierwszym i drugim razem.
4. Wybrano losowo liczbę całkowitą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: a) kwadrat, b) czwarta potęga tej liczby będzie kończyć się na jedynkę.
5. Wykazać, że dla dowolnych zdarzeń  $A, B, C$ :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

## 148. Elementy kombinatoryki

W dziale matematyki zwanym *kombinatoryką* podstawowymi pojęciami są *permutacje*, *kombinacje* oraz *wariacje z powtórzeniami* i *wariacje bez powtórzeń*.

Niech  $n, k$  oznaczają liczby naturalne. Niech  $Z$  będzie zbiorem  $n$  elementów.

**Wariacje z powtórzeniami.** Utwórzmy  $k$ -wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy zbioru  $Z$ , przy czym w ciągu tym niektóre elementy zbioru  $Z$  mogą występować wielokrotnie. Ciąg taki nazwiemy wariacją z powtórzeniami także wtedy, gdy w nim powtórzenia nie występują.

**Definicja 148.1.** Każdy  $k$ -wyrazowy ciąg elementów zbioru  $Z$  nazywamy  $k$ -wyrazową wariacją z powtórzeniami  $n$ -elementowego zbioru  $Z$ .

Z powyższej definicji wynika, że w wariacji z powtórzeniami

— kolejność wyrazów jest istotna,

— niektóre elementy zbioru  $Z$  mogą występować wielokrotnie.

Liczbę  $k$ -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $n$  elementów oznaczamy symbolem  $W_n^k$ .

**Przykład 148.1.** Niech  $Z$  będzie zbiorem liczb 1, 2, 3, 4,  $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ . Mamy 4 jednowyrazowe wariacje z powtórzeniami (w których powtórzenia nie mogą jeszcze występować), są nimi jednowyrazowe ciągi

$$(1), (2), (3), (4)$$

więc  $W_4^1 = 4$ .

Dopisując w powyższych wariacjach na drugim miejscu dowolny element zbioru  $Z$  otrzymujemy dwuwyrazowe wariacje z powtórzeniami

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$$

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$$

więc  $W_4^2 = 4 \cdot W_4^1 = 4 \cdot 4 = 4^2$ . Weźmy dowolną dwuwyrazową wariację z powtórzeniami np. (1, 3). Dopisując w niej na trzecim miejscu kolejno każdy element zbioru  $Z$  otrzymujemy 4 trzywyrazowe wariacje z powtórzeniami

$$(1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (1, 3, 4)$$

Postępując analogicznie z pozostałymi dwuwyrazowymi wariacjami, dochodzimy do wniosku, że  $W_4^3 = 4W_4^2 = 4 \cdot 4^2 = 4^3$ .

**Twierdzenie 148.1.** Liczba  $k$ -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $n$  elementów wyraża się wzorem

$$W_n^k = n^k \quad (148.1)$$

**Dowód** (indukcją ze względu na  $k$ ). Ze zbioru  $n$  elementów można utworzyć  $n$  jednowyrazowych wariacji z powtórzeniami, więc dla  $k = 1$  wzór (148.1) jest prawdziwy. Wykażemy, że z prawdziwości tego wzoru dla  $k$  wynika jego prawdziwość dla  $k+1$

$$W_n^{k+1} = n^{k+1}$$

Rzeczywiście, z każdej  $k$ -wyrazowej wariacji z powtórzeniami można przez dopisanie w niej na  $k+1$  miejscu jakiegoś elementu zbioru  $Z$ , otrzymać  $(k+1)$ -wyrazową wariację z powtórzeniami. Dopisując zaś na  $(k+1)$  miejscu kolejno wszystkie elementy zbioru  $Z$  otrzymujemy  $n$  takich wariacji. Zatem  $W_n^{k+1} = n W_n^k$ , ale z założenia indukcyjnego  $W_n^k = n^k$ , więc  $W_n^{k+1} = n n^k = n^{k+1}$ .

**Przykład 148.2.** W zakładach piłkarskich toto-lotka należy wytypować wyniki 13 meczów piłkarskich. Jeśli w danym meczu typujemy zwycięstwo gospodarzy, to należy do kuponu wpisać 1, jeśli remis wpisujemy  $x$ , jeśli zaś zwycięstwo gości, wtedy wpisujemy 2. Na ile różnych sposobów można wypełnić kupon?

Otóż można uważać, że wypełnienie kuponu, np. w taki sposób

$$1, x, x, 2, 1, 1, 1, x, 2, x, 1, 1, 1$$

to napisanie 13-wyrazowej wariacji z powtórzeniami zbioru trzech elementów 1,  $x$ , 2.

Różnych sposobów wypełnienia kuponu jest  $W_3^{13} = 3^{13} = 1594323$ .

## Wariacje bez powtórzeń

**Definicja 148.2.** Każdy  $k$ -wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru  $Z$  (gdzie  $k \leq n$ ) nazywamy  $k$ -wyrazową wariacją bez powtórzeń  $n$ -elementowego zbioru  $Z$ . Z powyższej definicji wynika, że w wariacji bez powtórzeń

– kolejność wyrazów jest istotna,

– każdy element zbioru  $Z$  może występować co najwyżej raz.

Liczbę  $k$ -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$  elementów oznaczamy symbolem  $V_n^k$ .

**Przykład 148.3.** Niech będzie  $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ . Mamy 4 jednowyrazowe wariacje bez powtórzeń, są nimi jednoelementowe ciągi

$$(1), (2), (3), (4)$$

więc  $V_4^1 = 4$ . Dopisując w każdej z powyższych wariacji na drugim miejscu kolejno każdy element zbioru  $Z$  nie występujący w tej wariacji otrzymujemy ciągi dwuwyrazowe

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4)$$

$$(2, 1), (2, 3), (2, 4)$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 4)$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3)$$

Są to wszystkie dwuwyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru 4-elementowego. Ich liczba wynosi  $V_4^2 = 3 \cdot V_4^1 = 3 \cdot 4$ .

Weźmy teraz dowolną dwuwyrazową wariację bez powtórzeń np. (1, 3). Dopisując w tej wariacji na trzecim miejscu kolejno te elementy zbioru  $Z$ , które w niej nie występują (a takich elementów mamy już tylko dwa), otrzymujemy dwie trzywyrazowe wariacje bez powtórzeń

$$(1, 3, 2), (1, 3, 4)$$

Postępując analogicznie z pozostałymi dwuwyrazowymi wariacjami, dochodzimy do wniosku, że  $V_4^3 = 2V_4^2 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ .

**Twierdzenie 148.2.** Liczba  $k$ -wyrazowych wariacji bez powtórzeń  $n$ -elementowego zbioru wyraża się wzorem

$$V_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \quad (148.2)$$

przy czym  $k \leq n$ .

**Dowód** (indukcją) pomijamy.

Jeśli  $k = n$ , to wariacja bez powtórzeń jest permutacją  $n$ -elementowego zbioru, zatem oznaczając symbolem  $P_n$  liczbę tych permutacji, mamy

$$P_n = V_n^n = n! \quad (148.3)$$

**Kombinacje.** Przypominamy, że  $k$ -elementową kombinacją  $n$ -elementowego zbioru  $Z$  nazywamy każdy  $k$ -elementowy podzbiór tego zbioru (zob. p. 44).

W kombinacji:

– kolejność elementów nie jest istotna,

— każdy element zbioru  $Z$  może występować co najwyżej raz, zatem  $k$  musi być nie większe od  $n$ .

Liczbę  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$  elementów oznaczamy symbolem  $C_n^k$  i liczba ta wynosi

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (148.4)$$

### Pytania

1. Podać określenia: a) wariacji z powtórzeniami, b) wariacji bez powtórzeń, c) permutacji, d) kombinacji.
2. Zbiór  $Z$  ma  $n$  elementów. Ile można dla tego zbioru utworzyć: a)  $k$ -wyrazowych wariacji z powtórzeniami, b)  $k$ -wyrazowych wariacji bez powtórzeń, c) permutacji, d)  $k$ -elementowych kombinacji.

## 149. Zastosowanie kombinatoryki do obliczania prawdopodobieństwa

**Sposoby losowania.** Wiele zadań z rachunku prawdopodobieństwa daje się sprowadzić do schematu polegającego na kolejnym losowaniu  $k$  elementów spośród  $n$  elementów pewnego zbioru  $Z$ . Możliwe są przy tym dwa sposoby losowania: ze zwracaniem i bez zwracania. W pierwszym sposobie, przed wylosowaniem następnego elementu, zwraca się do zbioru  $Z$  uprzednio wylosowany element. Natomiast losowanie bez zwracania przebiega w ten sposób, że wybranego elementu nie zwraca się z powrotem do zbioru.

Wyniki losowania

|   | Sposób losowania        | Kolejność elementów wylosowanych | Wynik losowania          |
|---|-------------------------|----------------------------------|--------------------------|
| 1 | Losowanie ze zwracaniem | istotna                          | wariacja z powtórzeniami |
| 2 | Losowanie bez zwracania | istotna                          | wariacja bez powtórzeń   |
| 3 | Losowanie bez zwracania | nieistotna                       | kombinacja               |

### Przykłady obliczania prawdopodobieństw przy pomocy wzorów kombinatorycznych

**Przykład 149.1.** Rzucono 5 razy kością symetryczną. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie wypadnie:

- a) inna liczba oczek, b) sześć oczek, c) ta sama liczba oczek.

**Rozwiązanie.** Jako zdarzenia elementarne przyjmujemy 5-wyrazowe wariacje z powtórzeniami 6-elementowego zbioru  $Z = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ . Na przykład wariacja  $(e_6, e_2, e_6, e_1, e_5)$  oznaczać będzie, że w pierwszym rzucie otrzymano 6 oczek, w drugim 2 oczka, w trzecim 6 oczek, w czwartym 1 oczko i w piątym

5 oczek. Ogólnie element  $e_j$  na  $k$ -tym miejscu w wariacji oznaczać będzie wyrzucenie w  $k$ -tym rzucie  $j$  oczek ( $k = 1, \dots, 5; j = 1, \dots, 6$ ). Mamy więc  $W_6^5 = 6^5$  zdarzeń elementarnych.

a) Niech  $A$  będzie zdarzeniem – w każdym rzucie wypadnie inna liczba oczek. Zajściu zdarzenia  $A$  sprzyjają te zdarzenia elementarne, które są ciągami o różnych wyrazach, a więc 5-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru 6 elementów. Jest ich  $V_6^5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6!$ , więc

$$P(A) = \frac{6!}{6^5} = \frac{5}{54} = 0,093$$

b) Zajściu zdarzenia  $B$  – w każdym rzucie wypadnie 6 oczek, sprzyja tylko jedno zdarzenie elementarne  $(e_6, e_6, e_6, e_6, e_6)$ , więc

$$P(B) = \frac{1}{6^5} = \frac{1}{7776} = 0,00013$$

c) Zajściu zdarzenia  $C$  – w każdym rzucie wypadnie ta sama liczba oczek, sprzyja 6 zdarzeń elementarnych typu  $(e_i, e_i, e_i, e_i, e_i)$ , gdzie  $i = 1, \dots, 6$ , więc

$$P(C) = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296} = 0,00078$$

**Przykład 149.2.** W przykładzie poprzednim obliczyć prawdopodobieństwo, że 6 oczek wypadnie w co najmniej jednym rzucie.

**Rozwiązanie.** Niech  $A$  oznacza wypadnięcie w co najmniej jednym rzucie 6 oczek. Łatwiej jest obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do  $A$ . Zdarzenie  $A'$  oznacza, że w żadnym rzucie nie wypadnie 6 oczek. Zdarzeniu  $A'$  sprzyjają te zdarzenia elementarne, w których nie występuje wyraz  $e_6$ , czyli 5-wyrazowe wariacje z powtórzeniami zbioru 5 elementów  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ . Takich wariacji jest  $W_5^5 = 5^5$ , więc uwzględniając wzór (146.6) mamy

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

**Przykład 149.3.** Mamy 16 żarówek dobrych i 4 żarówki wadliwe. Wybrano losowo bez zwracania dwie żarówki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że są one dobre.

**Rozwiązanie.** Ponumerujemy żarówki dobre liczbami od 1 do 16, zaś żarówki wadliwe liczbami od 17 do 20. Ponieważ żarówki wybiera się bez zwracania i nieistotna jest kolejność w jakiej je wybrano, więc jako zdarzenia elementarne przyjmujemy dwuelementowe kombinacje zbioru liczb całkowitych od 1 do 20. Zdarzeń elementarnych jest więc  $\binom{20}{2}$ . Zdarzeniu  $A$  – wylosowano dwie dobre żarówki, sprzyjają te zdarzenia elementarne, które są dwuelementowymi kombinacjami zbioru liczb całkowitych od 1 do 16. Takich zdarzeń elementarnych jest  $\binom{16}{2}$ , więc

$$P(A) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{12}{19}$$

**Przykład 149.4.** W pudełku jest 10 detali, w tym 6 sztuk I gatunku i 4 sztuki II gatunku. Wybrano losowo bez zwracania 5 detali. Obliczyć prawdopodobieństwo, że 3 z nich są I gatunku i 2 są II gatunku.

**Rozwiązanie.** Ponieważ losowanie jest bez zwracania i kolejność wylosowanych detali jest nieistotna, więc jako zdarzenia elementarne przyjmujemy 5-elementowe kombinacje zbioru 10 detali. Zdarzeń elementarnych jest więc  $\binom{10}{5}$ . Obliczymy teraz liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia  $A$  – wybrano 3 detale I gatunku i 2 detale II gatunku. Ponieważ jest 6 detali I gatunku, więc 3 z nich można wybrać na  $\binom{6}{3}$  sposobów. Jeśli już wybrano 3 detale I gatunku, to należy teraz wybrać 2 detale II gatunku spośród 4 detali. Można to uczynić na  $\binom{4}{2}$  sposobów. Tak więc do każdego wyboru 3 detali I gatunku można na  $\binom{4}{2}$  sposobów wybrać 2 detale II gatunku, dlatego mamy  $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}$  zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia  $A$ , więc

$$P(A) = \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} : \binom{10}{5} = \frac{10}{21}$$

**Przykład 149.5.** Obliczyć prawdopodobieństwo, że wypełniając w toto-lotka jeden zakład wytypujemy trafnie: a) 6 liczb, b) dokładnie 4 liczby.

**Rozwiązanie.** W toto-lotku losuje się 6 liczb bez zwracania spośród 49 liczb. Kolejność, w której liczby zostały wylosowane jest nieistotna, mamy więc  $\binom{49}{6}$  zdarzeń elementarnych.

a) Zdarzenie  $A$  – wytypowano trafnie w jednym zakładzie 6 liczb, zachodzi tylko w jednym przypadku, więc

$$P(A) = 1 : \binom{49}{6} = \frac{1}{13\,983\,816} = 0,000\,00007$$

b) Aby wytypować trafnie dokładnie 4 liczby należy spośród wylosowanych w toto-lotka 6 liczb wybrać 4 liczby i z pozostałych 43 liczb wybrać 2 liczby. Cztery liczby spośród sześciu liczb wylosowanych można wybrać na  $\binom{6}{4}$  sposobów i do każdego z nich można na  $\binom{43}{2}$  sposobów dobrać dwie liczby spośród 43 liczb niewylosowanych. Więc zdarzeniu  $B$  polegającemu na tym, że wytypowano w jednym zakładzie trafnie dokładnie 4 liczby, sprzyja  $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$  zdarzeń elementarnych, zatem

$$P(B) = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} : \binom{49}{6} = \frac{13\,545}{13\,983\,816} = 0,000\,968\,62$$

- Liczby 1, 2, 3, ...,  $n$  zostały ustawione przypadkowo. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że
  - liczby 1 i 2
  - liczby 1, 2 i 3
 pojawiły się w sąsiedztwie i w wymienionej kolejności.
- Winda rusza z 7 pasażerami i zatrzymuje się na 10 piętrach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnym piętrze nie wysiądzie więcej niż jedna osoba?
- W pudełku są 4 gwoździe dobre i 5 gwoździ wadliwych. Wybieramy losowo bez zwracania 2 gwoździe. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybraliśmy: a) dwa gwoździe dobre, b) jeden gwoździe dobry i jeden wadliwy, c) dwa gwoździe wadliwe.
- W grupie studenckiej liczącej 9 chłopców i 8 dziewcząt rozlosowano 7 biletów do teatru. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dokładnie 4 bilety wylosowały dziewczęta.
- Z talii 36 kart wylosowano bez zwracania 3 karty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród nich jest co najmniej 1 as.
- Spośród 20 mężczyzn i 5 kobiet wybrano 3 osobową delegację. Zakładamy, że każda osoba ma te same szanse wybrania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w skład delegacji wejdzie co najmniej 1 kobieta.
- Partia towaru licząca 100 sztuk zostaje przyjęta, jeśli wśród losowo wybranych 50 sztuk znajdzie się nie więcej niż jedna sztuka wadliwa. Obliczyć prawdopodobieństwo przyjęcia partii, jeśli ma ona 5 sztuk wadliwych.
- Obliczyć prawdopodobieństwo  $p_k$ , że gracz w brydża wśród 13 kart otrzyma dokładnie  $k$  asów ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ).
- Obliczyć prawdopodobieństwo, że wypełniając w toto-lotka 1 kupon, wytypujemy trafnie: a) 5 liczb i liczbę dodatkową, b) dokładnie 5 liczb (bez liczby dodatkowej), c) dokładnie 3 liczby, d) co najmniej 3 liczby.
- Wśród 100 sztuk towaru 60 sztuk jest I gatunku, 30 – II gatunku i jest 10 braków. Wybrano 5 sztuk bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrano co najmniej 3 sztuki I gatunku i ani jednej sztuki wadliwej.

## 150. Prawdopodobieństwo warunkowe

**Przykład 150.1.** Spośród 300 sportowców – 250 uprawia piłkę nożną, 100 hokej na lodzie, zaś 75 oba te sporty. Rozważmy następujące zdarzenia:

$A$  – wybrany losowo sportowiec jest piłkarzem,

$B$  – wybrany losowo sportowiec jest hokeistą,

wówczas

$$P(A) = \frac{250}{300} = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$$

Zakładamy, że wybrany sportowiec jest hokeistą. Jakie jest przy tym założeniu prawdopodobieństwo, że jest on piłkarzem? To samo można wypowiedzieć następująco: przy założeniu, że zaszło zdarzenie  $B$ , jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ ? Prawdopodobieństwo to nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym i oznaczamy je symbolem  $P(A/B)$ , symbol ten czytamy: *prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  pod warunkiem, że zaszło zdarzenie  $B$* . Ponieważ spośród 100 hokeistów – 75 uprawia piłkę nożną, więc

$$P(A/B) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Zauważmy, że

$$P(A/B) = \frac{75}{100} = \frac{\frac{300}{4}}{300} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

czyli, że w powyższym przykładzie zachodzi związek

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Związek ten przyjmiemy jako definicję prawdopodobieństwa warunkowego.

**Definicja 150.1.** Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych  $E$ . Zdarzenia losowe  $A, B$  są podzbiórmi zbioru  $E$ , przy czym  $P(B) > 0$ .

*Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia  $A$  pod warunkiem, że zaszło zdarzenie  $B$ , nazywamy stosunek prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń  $A$  i  $B$  do prawdopodobieństwa zdarzenia  $B$ . Definicję tę zapisujemy wzorem*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (150.1)$$

Można udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki I, II, III definicji 145.1, a więc posiada wszystkie ogólne własności prawdopodobieństwa.

**Przykład 150.2.** Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia  $A$  – wyrzucenie na kości parzystej liczby oczek, pod warunkiem, że zaszło zdarzenie  $B$  – wyrzucenie na kości co najwyżej 5 oczek.

**Rozwiązanie.** Oczywiście  $A = \{e_2, e_4, e_6\}$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ , zaś  $A \cap B = \{e_2, e_4\}$ . Na podstawie (150.1)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

**Prawdopodobieństwo iloczynu.** Zamieniając role  $A$  i  $B$  we wzorze (150.1) i zakładając, że  $P(A) > 0$  mamy  $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ . Stąd

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) \quad (150.2)$$

Powyższy wzór nazywamy wzorem na prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń i czytamy go: *prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa jednego z tych zdarzeń i prawdopodobieństwa warunkowego drugiego zdarzenia pod warunkiem, że zaszło pierwsze zdarzenie*.

### Wzór na prawdopodobieństwo zupełne (całkowite)

**Przykład 150.3.** W magazynie znajdują się żarówki wyprodukowane przez fabryki  $F_1$  i  $F_2$ . Wiadomo, że 60% całego zapasu żarówek pochodzi z  $F_1$ , zaś 40% z  $F_2$  oraz, że w produkcji  $F_1$  żarówki wadliwe stanowią 2% a w produkcji  $F_2$  – 3%. Wybrano losowo jedną żarówkę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jest ona wadliwa.

**Rozwiązanie.** Rozważmy następujące zdarzenia:

$A_1$  – wybrano żarówkę wyprodukowaną przez  $F_1$ ,

$A_2$  – wybrano żarówkę wyprodukowaną przez  $F_2$ ,

$B$  – wybrano żarówkę wadliwą.

Z treści zadania wynika, że suma zdarzeń  $A_1$  i  $A_2$  jest zdarzeniem pewnym

$$E = A_1 \cup A_2$$

Pomnożymy obie strony tej równości przez zdarzenie  $B$

$$E \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B$$

więc

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$$

Ponieważ zdarzenia  $A_1$  i  $A_2$  wykluczają się, więc także wykluczają się zdarzenia  $A_1 \cap B$  i  $A_2 \cap B$ , dlatego

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$

Stosując wzór (150.2) otrzymujemy

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) \quad (150.3)$$

Wstawiając dane liczbowe  $P(A_1) = 0,6$ ,  $P(A_2) = 0,4$ ,  $P(B/A_1) = 0,02$ ,  $P(B/A_2) = 0,03$  otrzymujemy  $P(B) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,03 = 0,024$ .

Uogólniając rozumowanie prowadzące do wzoru (150.3) otrzymujemy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 150.1.** Niech zdarzenia  $A_1, \dots, A_n$  o dodatnich prawdopodobieństwach wykluczają się parami i niech suma tych zdarzeń będzie zdarzeniem pewnym. Wtedy dla dowolnego zdarzenia  $B$  zachodzi wzór

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + \dots + P(A_n)P(B/A_n) \quad (150.4)$$

zwany wzorem na prawdopodobieństwo zupełne czyli całkowite.

Dla  $n = 2$  wzór ten przybiera postać (150.3).

1. Podaj definicję prawdopodobieństwa warunkowego.
2. Napisz i wypowiedz wzór na prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń.
3. Napisz wzór na prawdopodobieństwo zupełne i wymień założenia, przy których wzór ten jest prawdziwy.
4. Rzucono dwukrotnie kością symetryczną. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymano sumę oczek równą 3, jeśli w pierwszym rzucie otrzymano jedno oczko.
5. Rzucono trzykrotnie monetą symetryczną. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów, jeśli w pierwszym rzucie otrzymano orła.
6. Rodzina ma dokładnie dwoje dzieci. Przyjmijmy oznaczenia:  $c$  – chłopiec,  $d$  – dziewczynka; starsze dziecko wymieniamy na pierwszym miejscu i tak np.  $(c, d)$  oznacza, że starsze dziecko jest chłopcem a młodsze dziewczynką. Określmy następująco zbiór zdarzeń elementarnych

$$E = \{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$$

Zakładamy, że zdarzenia losowe jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne. Jeśli wiadomo, że rodzina ma chłopca, to jakie jest prawdopodobieństwo, że młodsze dziecko jest chłopcem?

7. Wykazać, że

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$$

jeśli  $P(A \cap B) > 0$ .

8. Strzelec ma do wyboru dwa karabiny. Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale wynosi dla pierwszego karabinu 0,7, dla drugiego 0,9. Strzelec wybiera karabin losowo. Obliczyć prawdopodobieństwo, że trafi on do celu w jednym strzale.
9. Zapotrzebowanie przemysłu na czółenka tkackie pokrywane jest w 45% przez zakłady  $Z_1$ , w 35% przez zakłady  $Z_2$ , w 20% przez zakłady  $Z_3$ . Wiadomo, że w produkcji  $Z_1$  braki stanowią 0,8%, w  $Z_2$  – 1,2%, w  $Z_3$  – 1,5%. a) Kupiono jedno czółenka. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jest ono brakiem. b) Kupione czółenka okazało się brakiem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zostało ono wyprodukowane przez  $Z_2$ .
10. Do sygnalizowania złej pracy maszyny zastosowano czujnik. Prawdopodobieństwo, że jest on pierwszego gatunku wynosi 0,6, że jest drugiego gatunku 0,3, że jest trzeciego gatunku 0,1. Wiadomo, że czujnik pierwszego gatunku sygnalizuje złą pracę maszyny z prawdopodobieństwem 1, drugiego z prawdopodobieństwem 0,8, zaś trzeciego z prawdopodobieństwem 0,6. a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że czujnik zasygnalizuje złą pracę maszyny. b) Czujnik zasygnalizował złą pracę maszyny, obliczyć prawdopodobieństwo, że jest on trzeciego gatunku.

## 151. Zdarzenia niezależne

**Niezależność dwóch zdarzeń.** Jeśli prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia  $B$  przy warunku, że zaszło zdarzenie  $A$  jest takie samo jak prawdopodobieństwo zdarzenia  $B$  (bez założenia o zajściu  $A$ )

$$P(B/A) = P(B)^{1)}$$

to oznacza, że zajście zdarzenia  $A$  nie wpływa na prawdopodobieństwo zdarzenia  $B$ . Uwzględniając tę równość we wzorze (150.2) na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń  $A, B$ , otrzymujemy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (151.1)$$

Także, przyjmując  $P(A/B) = P(A)^{2)}$  dochodzimy do równości (151.1). Na tej równości opieramy definicję niezależności dwóch zdarzeń.

**Definicja 151.1.** Zdarzenia  $A$  i  $B$  nazywamy *zdarzeniami niezależnymi*, jeśli prawdopodobieństwo iloczynu tych zdarzeń jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw.

W przeciwnym przypadku zdarzenia  $A, B$  nazywamy *zdarzeniami zależnymi*.

**Przykład 151.1.** Dwukrotny rzut monetą. Niech  $A$  oznacza zdarzenie – wyrzucono orła w pierwszym rzucie,  $B$  – wyrzucono orła w drugim rzucie. Wtedy

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \text{więc } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne.

**Przykład 151.2.** Rzut kością. Niech  $A$  oznacza zdarzenie – wyrzucono parzystą liczbę oczek,  $B$  – wyrzucono co najwyżej 5 oczek. Wtedy

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{5}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{3}, \quad \text{więc } P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$$

Zdarzenia  $A$  i  $B$  są zależne.

### Niezależność trzech zdarzeń

**Definicja 151.2.** Zdarzenia  $A, B, C$  nazywamy *zdarzeniami niezależnymi*, jeśli zachodzą równości

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Niezależność większej liczby zdarzeń definiuje się analogicznie.

### Pytania i zadania

1. Podać definicję niezależności dwóch zdarzeń.
2. Zdarzenia losowe  $A$  i  $B$  są niezależne. Co można powiedzieć o  $P(A/B)$ , co o  $P(B/A)$ ?

<sup>1)</sup> Przy założeniu  $P(A) > 0$ .

<sup>2)</sup> Przy założeniu  $P(B) > 0$ .

3. Podać definicję niezależności trzech zdarzeń.

4. Czy zależne są:

a) przy dwukrotnym rzucie kością symetryczną zdarzenia:

$A$  — suma wyrzuconych oczek jest równa 3,

$B$  — w pierwszym rzucie wypadnie jedno oczko;

b) przy trzykrotnym rzucie monetą symetryczną zdarzenia:

$A$  — wyrzucenie dokładnie dwóch orłów,

$B$  — wyrzucenie w pierwszym rzucie orła;

c) w rodzinie mającej dokładnie dwoje dzieci zdarzenia:

$A$  — rodzina ma dzieci obu płci,

$B$  — rodziną ma co najwyżej jedną dziewczynkę;

d) w rodzinie mającej dokładnie troje dzieci zdarzenia:

$A$  — rodzina ma dzieci obu płci,

$B$  — rodzina ma co najmniej jedną dziewczynkę.

Przy rozwiązywaniu punktów c) i d) należy określić zbiór zdarzeń elementarnych, analogicznie jak w zadaniu 6 na str. 438, i przyjąć, że zdarzenia losowe jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne.

5. Wykazać, że jeśli zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne, to zdarzenia  $A$  i  $B'$  są także niezależne.

6. Wykazać, że są zdarzeniami niezależnymi: a) zdarzenie pewne i dowolne zdarzenie, b) zdarzenie niemożliwe i dowolne zdarzenie.

7. Zdarzenia  $A$  i  $B$  wykluczają się oraz  $P(A) > 0$  i  $P(B) > 0$ . Wykazać, że zdarzenia  $A$  i  $B$  są zdarzeniami zależnymi.

8. Zdarzenia  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są zdarzeniami niezależnymi. Wykazać, że zdarzenia  $A \cup B$  i  $C$  są także zdarzeniami niezależnymi.

9. Spośród liczb 2, 3, 5, 30 wybieramy losowo jedną liczbę. Rozważmy zdarzenia:

$A$  — wylosowano liczbę parzystą,

$B$  — wylosowano liczbę podzielną przez 3,

$C$  — wylosowano liczbę podzielną przez 5.

Sprawdzić, że prawdopodobieństwo iloczynu każdych dwóch zdarzeń jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw, czyli że zdarzenia  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są niezależne parami. Sprawdzić, że wszystkie te trzy zdarzenia nie są niezależne.

## 152. Próby niezależne

Dany jest ciąg kilku doświadczeń losowych. O doświadczeniach tych mówimy, że są *próbami niezależnymi*, jeśli wynik każdego z tych doświadczeń nie zależy od wyników pozostałych.

Dwie próby niezależne. Niech dla pierwszej próby zbiorem zdarzeń elementarnych będzie zbiór

$$E_1 = \{e'_1, \dots, e'_n\}$$

zaś dla drugiej próby — zbiór

$$E_2 = \{e''_1, \dots, e''_m\}$$

Te dwie próby możemy traktować jako jedno doświadczenie, polegające na wykonaniu najpierw pierwszej, potem drugiej próby. Dla tak określonego nowego doświadczenia przyjmujemy, że zbiór zdarzeń elementarnych  $E$  jest zbiorem wszystkich uporządkowanych par

$$(e'_i, e''_j) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m$$

Takich par mamy  $nm$ . Zdarzenie elementarne  $(e'_i, e''_j)$  oznacza, że w pierwszej próbie wypadł wynik  $e'_i$  a w drugiej próbie wynik  $e''_j$ .

**Przykład 152.1.** Rzut monetą i kością. Pierwsza próba polega na rzucie monetą, druga zaś na rzucie kością. Potraktujemy te dwie próby jako jedno doświadczenie polegające na rzucie najpierw monetą potem kością.

Dla rzutu monetą zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór

$$E_1 = \{o, r\}$$

Dla rzutu kością zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

Dla obu prób traktowanych jako jedno doświadczenie zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór  $E$  następujących elementów:

$$\begin{array}{cccccc} (o, e_1), & (o, e_2), & (o, e_3), & (o, e_4), & (o, e_5), & (o, e_6), \\ (r, e_1), & (r, e_2), & (r, e_3), & (r, e_4), & (r, e_5), & (r, e_6). \end{array}$$

Zdarzenie „wyrzucono orła” może być uważane za podzbiór zbioru  $E_1$  lub za podzbiór zbioru  $E$  w zależności czy traktujemy je jako wynik pierwszej próby, czy jako wynik łącznego wykonania obu prób. Uważając to zdarzenie za podzbiór  $E_1$  i oznaczając je  $A_1$ , mamy

$$A_1 = \{o\}$$

natomiast uważając to zdarzenie za podzbiór  $E$  i oznaczając je  $A$  mamy

$$A = \{(o, e_1), (o, e_2), (o, e_3), (o, e_4), (o, e_5), (o, e_6)\}$$

Zdarzenie „wyrzucono parzystą liczbę oczek”, traktowane jako wynik drugiej próby, oznaczmy  $B_1$  i możemy zapisać

$$B_1 = \{e_2, e_4, e_6\}$$

natomiast to zdarzenie, traktowane jako wynik łącznego wykonania obu prób, oznaczmy  $B$  i możemy zapisać

$$B = \{(o, e_2), (r, e_2), (o, e_4), (r, e_4), (o, e_6), (r, e_6)\}$$

Ogólnie każde zdarzenie losowe opisujące wynik pierwszej próby może być przedstawione zarówno jako podzbiór zbioru  $E_1$  — oznaczamy je wtedy  $A_1$ , lub jako podzbiór zbioru  $E$  — oznaczamy je wtedy  $A$ .

Podobnie każde zdarzenie losowe opisujące wynik drugiej próby może być przedstawione zarówno jako podzbiór zbioru  $E_2$  — oznaczamy je wtedy  $B_1$  lub jako podzbiór zbioru  $E$  — oznaczamy je wtedy  $B$ .

Rozpatrzmy następujące zagadnienie: znamy prawdopodobieństwo  $P_1$  określone na podzbiorach  $E_1$  i prawdopodobieństwo  $P_2$  określone na podzbiorach  $E_2$ ; chcemy przy pomocy tych prawdopodobieństw określić prawdopodobieństwo  $P$  na podzbiorach  $E$ , tak by zdarzenia  $A$  i  $B$  były niezależne w sensie definicji 151.1 tzn., aby zachodził wzór

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (152.1)$$

a ponadto, aby

$$P(A) = P_1(A_1) \text{ i } P(B) = P_2(B_1) \quad (152.2)$$

Udowodniono, że warunkiem koniecznym i dostatecznym zachodzenia równości (152.1) i (152.2) jest zdefiniowanie prawdopodobieństwa  $P$  przy pomocy równości

$$P(\{(e'_i, e''_j)\}) = P_1(\{e'_i\}) P_2(\{e''_j\}) \quad (152.3)$$

**Przykład 152.2.** Obliczyć prawdopodobieństwo, że rzucając monetą i kością wyrzucimy orła i parzystą liczbę oczek.

**Rozwiązanie.** Przyjmijmy oznaczenia z przykładu 152.1. Mamy obliczyć  $P(A \cap B)$ . Prawdopodobieństwo  $P$  określimy zgodnie ze wzorem (152.3). Wtedy na podstawie (152.1) i (152.2) mamy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P_1(A_1)P_2(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

**Trzy próby niezależne.** Niech dla pierwszej próby zbiorem zdarzeń elementarnych będzie zbiór

$$E_1 = \{e'_1, \dots, e'_n\}$$

dla drugiej próby – zbiór

$$E_2 = \{e''_1, \dots, e''_m\}$$

dla trzeciej próby zbiór

$$E_3 = \{e'''_1, \dots, e'''_k\}$$

Dla tych trzech prób, traktowanych jako jedno doświadczenie, przyjmujemy, że zbiór zdarzeń elementarnych jest zbiorem wszystkich trzywyrazowych ciągów

$$(e'_i, e''_j, e'''_l)$$

gdzie  $i \leq n$ ,  $j \leq m$ ,  $l \leq k$ . Ciągów takich jest  $nmk$ .

Każde zdarzenie losowe opisujące wynik pierwszej próby może być przedstawione jako podzbiór  $E_1$  – oznaczamy je wtedy  $A_1$  lub jako podzbiór  $E$  oznaczamy je wtedy  $A$ . Podobnie zdarzenie opisujące wynik drugiej próby oznaczamy przez  $B_1$  lub przez  $B$  ( $B_1 \subset E_2$ ,  $B \subset E$ ) oraz zdarzenie opisujące wynik trzeciej próby – oznaczamy przez  $C_1$  lub przez  $C$  ( $C_1 \subset E_3$ ,  $C \subset E$ ).

Niech  $P_1$  będzie prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach  $E_1$ ,  $P_2$  – na podzbiorach  $E_2$  i  $P_3$  – na podzbiorach  $E_3$ . Jeśli na podzbiorach  $E$  określimy prawdopodobieństwo  $P$  przy pomocy równości

$$P(\{(e'_i, e''_j, e'''_l)\}) = P_1(\{e'_i\}) P_2(\{e''_j\}) P_3(\{e'''_l\}) \quad (152.4)$$

to zachodzą następujące wzory

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \quad (152.5)$$

$$P(A) = P_1(A_1), \quad P(B) = P_2(B_1), \quad P(C) = P_3(C_1) \quad (152.6)$$

Rozważania powyższe można w podobny sposób uogólnić na dowolną liczbę prób niezależnych.

**Przykład 152.3.** Trzykrotny rzut kością symetryczną. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie wypadnie parzysta liczba oczek i w drugim rzucie wypadnie jedno oczko oraz w trzecim rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek.

**Rozwiązanie.** Dla każdej próby jest ten sam zbiór zdarzeń elementarnych  $E_1 = E_2 = E_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  i to samo prawdopodobieństwo  $P_1 = P_2 = P_3$ , określone zgodnie z klasyczną definicją.

Dla tych prób, traktowanych jako jedno doświadczenie, zbiór zdarzeń elementarnych  $E$  jest zbiorem wszystkich trzywyrazowych ciągów utworzonych z elementów zbioru  $E_1$ . Prawdopodobieństwo  $P$  na podzbiorach  $E$  określamy zgodnie z (152.4).

Zdarzenie „w pierwszym rzucie wypadnie parzysta liczba oczek” oznaczamy  $A$ , gdy  $A \subset E$ , lub  $A_1$ , gdy  $A_1 \subset E_1$ .

Zdarzenie „w drugim rzucie wypadnie jedno oczko” oznaczamy  $B$ , gdy  $B \subset E$ , lub  $B_1$ , gdy  $B_1 \subset E_2$ .

Zdarzenie „w trzecim rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek” oznaczamy  $C$ , gdy  $C \subset E$ , lub  $C_1$ , gdy  $C_1 \subset E_3$ .

Mamy obliczyć  $P(A \cap B \cap C)$ . Zgodnie ze wzorami (152.5) i (152.6)

$$P(A \cap B \cap C) = P_1(A_1)P_2(B_1)P_3(C_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{24}$$

### Zadania

1. Dwie maszyny pracują niezależnie. Prawdopodobieństwo zepsucia się w ciągu czasu  $T$  pierwszej maszyny jest równe 0,2 zaś dla drugiej maszyny wynosi 0,3. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu czasu  $T$  zepsują się obie maszyny.
2. Dwóch strzelców strzeliło do jednego celu. Pierwszy trafił do celu z prawdopodobieństwem 0,9, zaś drugi z prawdopodobieństwem 0,8. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cel został trafiony co najmniej raz.
3. Na odcinku drogi o pewnej długości samochód przejeżdża przez trzy skrzyżowania z sygnalizacją świetlną niesynchronizowaną. Zdarzenia polegające na nie zatrzymaniu się na poszczególnych skrzyżowaniach są od siebie niezależne, a ich prawdopodobieństwa są równe odpowiednio  $p_1 = 0,6$ ,  $p_2 = 0,5$ ,  $p_3 = 0,6$ . Znaleźć prawdopodobieństwo przejechania przez trzy skrzyżowania bez zatrzymania się.
4. Robotnik obsługuje 3 maszyny. Prawdopodobieństwo, że w pewnym czasie maszyny nie wymagają obsługi wynosi: 0,9 dla pierwszej, 0,8 dla drugiej i 0,85 dla trzeciej. Maszyny te pracują niezależnie od siebie. Obliczyć prawdopo-

bieństwo, że w pewnym czasie a) żadna z maszyn nie wymaga obsługi; b) wszystkie maszyny wymagają obsługi.

5. Prawdopodobieństwo, że w pewnych warunkach samolot zostanie zestrzelony przez pojedynczy wystrzał karabinowy wynosi 0,004. Obliczyć prawdopodobieństwo zestrzelenia samolotu przez jednoczesne wystrzelenie z 250 karabinów.

### 153. Rozkład dwumianowy

**Próby Bernoulliego.** Niezależne próby nazywamy *próbami Bernoulliego*, jeśli spełnione są obydwa następujące warunki:

- 1 — każda próba może zakończyć się jednym z dwóch wyników: zdarzeniem  $A$ , zwanym *sukcesem*, albo zdarzeniem  $A'$  do niego przeciwnym, zwanym *porażką*.
- 2 — prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest takie samo.

#### Przykład 153.1

|   | Próby Bernoulliego                    | Sukces         | Porażka             |
|---|---------------------------------------|----------------|---------------------|
| 1 | rzut monety                           | orzeł          | reszka              |
| 2 | rzuty kością                          | 1 lub 2 oczka  | co najmniej 3 oczka |
| 3 | strzelanie do celu                    | trafienie      | nie trafienie       |
| 4 | obserwacja płci noworodków            | płeć żeńska    | płeć męska          |
| 5 | losowanie ze zwracaniem sztuki towaru | sztuka wadliwa | sztuka dobra        |

Jeśli z partii towaru losujemy kilka jego sztuk bez zwracania, to doświadczenia te nie są próbami Bernoulliego, gdyż prawdopodobieństwo wylosowania sztuki wadliwej nie jest w każdym doświadczeniu takie samo, zależy bowiem od uprzednio uzyskanych wyników.

Nazwanie danego zdarzenia sukcesem jest umowne, np. przy rzutach kością przyjęliśmy, że sukcesem jest wyrzucenie 1 lub 2 oczek, a można było przyjąć inaczej np. że sukcesem jest wyrzucenie parzystej liczby oczek.

Dla każdej pojedynczej próby Bernoulliego zbiór zdarzeń elementarnych jest ten sam, oznaczmy go  $E_1$ . Zbiór  $E_1$  składa się z dwóch elementów  $e_1, e_2$ . Jeśli zdarzenie  $A = \{e_1\}$  nazwiemy sukcesem, to zdarzenie  $A' = \{e_2\}$  będzie porażką.

Dla  $n$  prób Bernoulliego zbiór  $E$  zdarzeń elementarnych jest zbiorem wszystkich  $n$ -wyrazowych ciągów utworzonych z  $e_1$  i  $e_2$  np.

$(e_1, e_1, \dots, e_1)$  — same sukcesy

$(e_2, e_1, \dots, e_1)$  — w pierwszej próbie porażka, potem sukcesy, ogólnie

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

gdzie każdy z symboli  $g_1, \dots, g_n$  oznacza  $e_1$  lub  $e_2$ .

Dla każdej pojedynczej próby Bernoulliego prawdopodobieństwo  $P_1$  jest zdefiniowane przy pomocy równości

$$P_1(\{e_1\}) = p, \quad P_1(\{e_2\}) = 1 - p = q \quad (0 < p < 1)$$

Prawdopodobieństwo dla  $n$  prób Bernoulliego definiujemy przy pomocy równości

$$P(\{(g_1, \dots, g_n)\}) = P_1(\{g_1\}) \dots P_1(\{g_n\})$$

np.

$$P(\{(e_1, e_1, \dots, e_1)\}) = P_1(\{e_1\}) P_1(\{e_1\}) \dots P_1(\{e_1\}) = p^n$$

$$P(\{(e_2, e_1, \dots, e_1)\}) = P_1(\{e_2\}) P_1(\{e_1\}) \dots P_1(\{e_1\}) = qp^{n-1}$$

**Liczba sukcesów.** Oznaczmy symbolem  $S_n$  liczbę sukcesów w  $n$  próbach Bernoulliego. Zdarzenie losowe polegające na otrzymaniu w  $n$  próbach Bernoulliego dokładnie  $k$  sukcesów ( $k = 0, \dots, n$ ) zapisujemy

$$S_n = k$$

a prawdopodobieństwo tego zdarzenia zapisujemy

$$P(S_n = k)$$

#### Przykład 153.2. Trzy próby Bernoulliego.

| Liczba sukcesów<br>$k$ | Zdarzenia elementarne<br>sprzyjające zdarzeniu<br>$S_3 = k$ | $P(S_3 = k)$ |
|------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------|
| 0                      | $(e_2, e_2, e_2)$                                           | $q^3$        |
| 1                      | $(e_1, e_2, e_2), (e_2, e_1, e_2),$<br>$(e_2, e_2, e_1)$    | $3q^2p$      |
| 2                      | $(e_1, e_1, e_2), (e_1, e_2, e_1),$<br>$(e_2, e_1, e_1)$    | $3p^2q$      |
| 3                      | $(e_1, e_1, e_1)$                                           | $p^3$        |

Zauważmy, że suma wyrazów w ostatniej kolumnie jest równa  $(p+q)^3$ , a poszczególne wyrazy w tej kolumnie są składnikami wzoru dwumianowego Newtona (wzór 45.1).

Dla  $n$  prób Bernoulliego mamy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 153.1.** Prawdopodobieństwo, że w  $n$  próbach Bernoulliego sukces wypadnie dokładnie  $k$  razy wyraża się wzorem

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (153.1)$$

gdzie  $p$  jest prawdopodobieństwem sukcesu, zaś  $q = 1 - p$  prawdopodobieństwem porażki w jednej próbie Bernoulliego, przy czym  $0 < p < 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Zauważmy, że  $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  jest ogólnym wyrazem wzoru Newtona na  $(q+p)^n$ . Dlatego mówimy, że liczba sukcesów w  $n$  próbach Bernoulliego ma *rozkład dwumianowy*.

**Przykład 153.3.** Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale wynosi  $\frac{3}{4}$ . Do celu oddano niezależnie 6 strzałów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony: a) jeden raz, b) zero razy, c) co najmniej raz, d) co najwyżej raz.

Rozwiązanie. Niech sukcesem będzie trafienie do celu w pojedynczym strzale, wtedy  $S_6$  oznacza liczbę celnych strzałów spośród 6 strzałów. Mamy  $p = \frac{3}{4}$ ,  $q = \frac{1}{4}$ , więc:

$$a) P(S_6 = 1) = \binom{6}{1} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{9}{2048} = 0,0044$$

$$b) P(S_6 = 0) = \binom{6}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{1}{4096} = 0,0002$$

$$c) P(S_6 \geq 1) = 1 - P(S_6 < 1) = 1 - P(S_6 = 0) = 1 - 0,0002 = 0,9998$$

$$d) P(S_6 \leq 1) = P(S_6 = 0) + P(S_6 = 1) = 0,0002 + 0,0044 = 0,0046$$

### Pytania i zadania

1. Podać określenie prób Bernoulliego.
2. Jakim wzorem wyraża się prawdopodobieństwo, że w  $n$  próbach Bernoulliego sukces wypadnie dokładnie  $k$  razy?
3. W hali pracuje 5 maszyn. Prawdopodobieństwo zepsucia się każdej z tych maszyn jest równe  $\frac{1}{3}$ . Maszyny psują się niezależnie od siebie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: a) zepsują się 2 maszyny, b) zepsuje się 1 maszyna, c) zepsuje się 0 maszyn, d) zepsuje się co najmniej 1 maszyna, e) zepsuje się więcej niż 1 maszyna, f) zepsuje się co najwyżej 1 maszyna.
4. W przędzy zmieszano włókno białe i kolorowe w stosunku 2:3. Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia wśród 5 losowo wybranych włókien: a) dokładnie 2 kolorowych włókien, b) co najmniej 2 kolorowych włókien, c) co najwyżej 2 kolorowych włókien.
5. Z partii towaru o wadliwości 0,2 pobrano losowo 8 sztuk tego towaru. Wyznaczyć liczbę  $k$ , tak by prawdopodobieństwo, że wśród wybranych sztuk znajduje się więcej niż  $k$  sztuk wadliwych wynosiło 0,05 lub mniej. Wśród 8 sztuk tego towaru znaleziono 4 sztuki wadliwe. Jaki wniosek można wyciągnąć o wadliwości partii towaru?
6. Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale wynosi  $\frac{3}{5}$ . Ile strzałów należy oddać, aby z prawdopodobieństwem 0,95 lub większym, cel był trafiony co najmniej raz?
7. Prawdopodobieństwo, że pewien zawodnik przekroczy w jednym rzucie dyskiem 60 m wynosi 0,3. Obliczyć: a) prawdopodobieństwo, że zawodnik ten w żadnym z 6 rzutów nie przekroczy 60 m, b) ile razy powinien rzucić dyskiem ten zawodnik, by z prawdopodobieństwem 0,95 lub większym w co najmniej jednym rzucie przekroczył 60 m?

## 154. Zmienna losowa

Niech  $E = \{e_1, \dots, e_N\}$  będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, zaś  $P$  prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach  $E$ .

**Definicja 154.1.** Jeżeli każdemu ze zdarzeń elementarnych  $e_1, \dots, e_N$  przyporządkowano pewną liczbę rzeczywistą, to mówimy, że została określona *zmienna losowa*.

Zmienna losowa jest więc funkcją określoną na zbiorze  $E$  i przyjmującą wartości rzeczywiste. Zmienną losową oznaczamy zwykle literą  $X$ , a poszczególne jej wartości

$$x_1, \dots, x_n$$

Ponieważ różnym zdarzeniom elementarnym można przyporządkować tę samą liczbę, przeto zbiór wartości zmiennej losowej może mieć mniej elementów niż zbiór  $E$  zdarzeń elementarnych, czyli  $n \leq N$ .

Zdarzenie losowe składające się z tych wszystkich zdarzeń elementarnych, którym przyporządkowano liczbę  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , zapisujemy

$$X = x_i$$

a prawdopodobieństwo tego zdarzenia zapisujemy

$$P(X = x_i)$$

Prawdopodobieństwo to jest funkcją na zbiorze  $\{x_1, \dots, x_n\}$  wartości zmiennej losowej. Funkcję tę nazywamy *rozkładem prawdopodobieństwa* zmiennej losowej. Wartości rozkładu prawdopodobieństwa możemy obliczyć, znając prawdopodobieństwo  $P$  określone na podzbiorach  $E$ . Wartości te oznaczamy

$$P(X = x_1) = p_1, \dots, P(X = x_n) = p_n$$

przy czym musi być  $p_i \geq 0$  oraz  $p_1 + \dots + p_n = 1$ .

**Przykład 154.1.** Rzut monetą.  $E = \{o, r\}$ . Zdarzeniu elementarnemu  $o$  przyporządkowujemy liczbę 1, zaś zdarzeniu elementarnemu  $r$  liczbę 0. Określamy w ten sposób zmienną losową  $X$ , przyjmującą dwie wartości  $x_1 = 1$  i  $x_2 = 0$ , przy czym  $P(X = 1) = P(\{o\}) = \frac{1}{2}$ ,  $P(X = 0) = P(\{r\}) = \frac{1}{2}$ .

**Przykład 154.2.** Rzut kością.  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ . Zdarzeniu elementarnemu  $e_i$  przyporządkujemy liczbę  $i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). Tak określona zmienna losowa  $X$  przyjmuje 6 wartości  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$ , przy czym

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Powyższe równości określają rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$ . Na tym samym zbiorze  $E$  określimy nową zmienną losową, którą oznaczmy  $Y$ . Zdarzeniom elementarnym  $e_1, e_2, e_3$  przyporządkujemy liczbę 1, zaś zdarzeniom

elementarnym  $e_4, e_5, e_6$  liczbę 0. Zmienna losowa  $Y$  przyjmuje dwie wartości  $y_1 = 1, y_2 = 0$ , przy czym

$$P(Y = 1) = P(\{e_1, e_2, e_3\}) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 0) = P(\{e_4, e_5, e_6\}) = \frac{1}{2}$$

**Rozkład zero-jedynkowy.** Jeśli zmienna losowa  $X$  przyjmuje dwie wartości  $x_1 = 1$  i  $x_2 = 0$ , przy czym

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p, \quad 0 < p < 1$$

to mówimy, że  $X$  ma rozkład zero-jedynkowy.

**Rozkład jednostajny.** Jeśli zmienna losowa  $X$  przyjmuje  $n$  wartości, przy czym każdą z tych wartości przyjmuje z jednakowym prawdopodobieństwem, to mówimy, że  $X$  ma rozkład jednostajny. Rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej jest określony wzorem

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad (i = 1, \dots, n)$$

**Rozkład dwumianowy.** Mówimy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład dwumianowy, jeśli jej rozkład prawdopodobieństwa jest określony wzorem

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, \dots, n, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p)$$

Liczba sukcesów  $S_n$  w  $n$  próbach Bernoulli'ego jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym (porównaj tw. 153.1).

### Pytania

1. Podać definicję zmiennej losowej.
2. Podać definicję rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej.
3. Co to znaczy, że zmienna losowa ma rozkład: a) zero-jedynkowy, b) jednostajny, c) dwumianowy?

## 155. Wartość oczekiwana

**Przykład 155.1.** W pudełku znajduje się 100 detali, w tym 50 jest I gatunku, 30 – II gatunku i 20 – III gatunku. Cena jednego detalu I gatunku wynosi 10 zł, II gatunku 8 zł i III gatunku 5 zł. Jeśli przez  $m$  oznaczymy średnią cenę jednego detalu z tego pudełka, to

$$m = \frac{10 \cdot 50 + 8 \cdot 30 + 5 \cdot 20}{100} = 10 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 \quad (155.1)$$

Gdybyśmy kupili jeden detal z pudełka (bez sprawdzania jego gatunku), to powinniśmy za niego zapłacić  $m$  złotych.

Cena losowo wybranego detalu jest zmienną losową, przyjmującą wartości

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 5$$

odpowiednio z prawdopodobieństwami

$$p_1 = 0,5, \quad p_2 = 0,3, \quad p_3 = 0,2$$

Zauważmy, że równość (155.1) możemy zapisać

$$m = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

**Definicja 155.1.** Niech zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości  $x_1, \dots, x_n$  odpowiednio z prawdopodobieństwami  $p_1, \dots, p_n$ . Wartością oczekiwaną zmiennej losowej  $X$  nazywamy liczbę

$$EX = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n \quad (155.2)$$

**Przykład 155.2.** Niech zmienna losowa  $X$  oznacza liczbę wyrzuconych oczek na kości (patrz przykład 154.2). Wartość oczekiwana zmiennej losowej  $X$

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

**Przykład 155.3.** Niech zmienna losowa  $X$  ma rozkład zero-jedynkowy. Wartość oczekiwana tej zmiennej losowej

$$EX = 1p + 0(1 - p) = p$$

## 156. Wariancja

**Definicja 156.1.** Niech zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości  $x_1, \dots, x_n$  odpowiednio z prawdopodobieństwami  $p_1, \dots, p_n$ . Wariancją zmiennej losowej  $X$  nazywamy liczbę

$$D^2 X = (x_1 - m)^2 p_1 + \dots + (x_n - m)^2 p_n \quad (156.1)$$

gdzie  $m$  jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej  $X$ .

**Interpretacja wariancji.** Jeśli wartości zmiennej losowej mało różnią się od wartości oczekiwanej  $m$  lub, jeśli wartości znacznie różniące się od  $m$  przyjmowane są przez zmienną losową z małymi prawdopodobieństwami, to wariancja tej zmiennej losowej jest mała. Dlatego mówimy, że wariancja jest miarą rozproszenia wartości zmiennej losowej względem jej wartości oczekiwanej.

**Obliczanie wariancji.** Przekształćmy wzór (156.1)

$$\begin{aligned} D^2 X &= (x_1 - m)^2 p_1 + \dots + (x_n - m)^2 p_n = \\ &= (x_1^2 - 2mx_1 + m^2) p_1 + \dots + (x_n^2 - 2mx_n + m^2) p_n = \\ &= (x_1^2 p_1 + \dots + x_n^2 p_n) - 2m(x_1 p_1 + \dots + x_n p_n) + m^2(p_1 + \dots + p_n) = \\ &= (x_1^2 p_1 + \dots + x_n^2 p_n) - m^2 \end{aligned}$$

Wyrażenie  $x_1^2 p_1 + \dots + x_n^2 p_n$  nazywamy momentem rzędu 2 zmiennej losowej i oznaczamy  $m_2$

$$m_2 = x_1^2 p_1 + \dots + x_n^2 p_n \quad (156.2)$$

Otrzymujemy wzór często stosowany do obliczania wariancji

$$D^2 X = m_2 - m^2 \quad (156.3)$$

**Przykład 156.1.** Zmienna losowa  $X$  oznacza liczbę oczek wyrzuconych na kości. Obliczyć jej wariancję.

W przykładzie 155.2 obliczyliśmy, że wartość oczekiwana tej zmiennej losowej  $m = 3,5$ . Obliczmy teraz moment rzędu 2 zmiennej losowej  $X$ , korzystając z (156.2)

$$m_2 = 1^2 \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + 3^2 \frac{1}{6} + 4^2 \frac{1}{6} + 5^2 \frac{1}{6} + 6^2 \frac{1}{6} = 15 \frac{1}{6}$$

Na podstawie wzoru (156.3) mamy

$$D^2 X = 15 \frac{1}{6} - 3,5^2 = \frac{35}{12}$$

**Przykład 156.2.** Obliczyć wariancję zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie zero-jedynkowym.

W przykładzie 155.3 obliczyliśmy, że wartość oczekiwana tej zmiennej losowej  $m = p$ . Obliczmy teraz moment rzędu 2

$$m_2 = 1^2 p + 0^2(1-p) = p$$

Na podstawie wzoru (156.3) mamy

$$D^2 X = p - p^2 = p(1-p)$$

#### Pytania i zadania

1. Podać określenie wariancji.
2. Jaką interpretację ma wariancja?
3. Co to jest moment rzędu 2?
4. Jakim wzorem wyraża się wariancja przy pomocy momentu rzędu 2 i wartości oczekiwanej?
5. Zmienna losowa  $X$  oznacza sumę wyrzuconych oczek na dwóch kościach symetrycznych. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej. Obliczyć  $P(3 \leq X \leq 5)$ ,  $P(X \leq 4)$ ,  $P(X \geq 6)$ .
6. Zorganizowano następującą grę. Rzucamy dwiema kośćmi. Jeżeli suma oczek jest równa 2 — otrzymujemy 10 zł, jeżeli 3 — 5 zł, a w każdym pozostałym przypadku płacimy 1 zł. Niech  $X$  oznacza wygraną. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$ .  
Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $X$ .
7. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład prawdopodobieństwa

|       |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_k$ | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   |
| $p_k$ | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 0,1 |

Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej  $X$ .

8. Zmienna losowa  $Y$  ma rozkład prawdopodobieństwa

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $x_k$ | 0   | 1   | 2   |
| $p_k$ | 1/8 | 1/2 | 3/8 |

zaś zmienna losowa  $Y$  ma rozkład prawdopodobieństwa

|       |               |               |
|-------|---------------|---------------|
| $y_k$ | 1             | 3             |
| $p_k$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ .

9. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości 1, 2, 3, ...,  $n$  z jednakowymi prawdopodobieństwami. Znaleźć: a) rozkład prawdopodobieństwa, b) wartość oczekiwaną, c) wariancję zmiennej losowej  $X$ .
10. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje  $n$  wartości 2,  $2^2$ ,  $2^3$ , ...,  $2^n$  z jednakowymi prawdopodobieństwami. Znaleźć: a) rozkład prawdopodobieństwa, b) wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $X$ .

## 157. O prawie wielkich liczb Bernoulliego

Niech zmienna losowa  $X_n$  oznacza liczbę sukcesów w  $n$  próbach Bernoulliego, gdy prawdopodobieństwo sukcesu w jednym doświadczeniu jest równe  $p$ , wtedy zmienna losowa  $\frac{X_n}{n}$  jest częstością sukcesu.

**Twierdzenie 157.1. (Prawo wielkich liczb Bernoulliego).** *Jeśli liczba prób Bernoulliego rośnie do nieskończoności, to prawdopodobieństwo, że częstość sukcesu odchyli się od  $p$  więcej niż o  $\varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon$  jest dowolnie ustaloną liczbą dodatnią, jest zbieżne do zera*

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad (157.1)$$

**Dowód** tego twierdzenia pomijamy.

Wzór (157.1) jest równoważny następującemu wzorowi

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

**Interpretacja.** Jeśli liczba prób Bernoulliego jest wielka, to z prawdopodobieństwem bliskim jedności częstość sukcesu  $\frac{X_n}{n}$  mało różni się od prawdopodobieństwa  $p$  sukcesu w jednej próbie. Mówimy wówczas, że z praktyczną pewnością  $\frac{X_n}{n}$  i  $p$  będą różnić się mało.

Prawo wielkich liczb Bernoulliego wykazuje, że możliwa jest interpretacja prawdopodobieństwa za pomocą częstości (zob. p. 145).

#### Pytania

1. Wypowiedz i zapisz wzorem prawo wielkich liczb Bernoulliego.
2. Podaj interpretację tego prawa.
3. Uzasadnij nazwanie twierdzenia 157.1 prawem wielkich liczb.

## 144.

5. a)  $E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , gdzie  $e_i$  oznacza, że wykryto dokładnie  $i$  samolotów ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ); b)  $A = \{e_1\}$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $C = \{e_2, e_3, e_4\}$ ,  $D = \{e_2\}$ ; c)  $B, A, B, C, E, B, \emptyset$ . 6. a)  $E = \{(z, z, z), (z, z, n), (z, n, z), (n, z, z), (z, n, n), (n, z, n), (n, n, z), (n, n, n)\}$  gdzie  $z$  oznacza zdany egzamin,  $n$  – niezdany egzamin: na pierwszym miejscu podany jest wynik egzaminu z matematyki, na drugim – wynik egzaminu z fizyki i na trzecim – wynik egzaminu z języka obcego. np.  $(z, n, z)$  oznacza, że kandydat zdał egzamin z matematyki i nie zdał egzaminu z fizyki oraz zdał egzamin z języka obcego; b)  $A_1 = \{(z, z, z)\}$ ,  $A_2 = \{(n, z, z)\}$ ,  $A_3 = \{(n, n, z)\}$ ,  $A_4 = \{(z, z, n), (z, n, z), (n, z, z)\}$ ,  $A_5 = \{(z, z, z), (z, n, z), (n, z, z), (n, n, z)\}$ ,  $A_6 = \{(z, z, z), (z, z, n), (z, n, z), (n, z, z)\}$ ,  $A_7 = \{(z, z, n), (z, n, z), (n, z, z), (z, n, n), (n, z, n), (n, n, z), (n, n, n)\}$ . 7.  $A'$  – wylosowano co najmniej jedną sztukę wadliwą;  $B'$  – wylosowano trzy sztuki wadliwe;  $C'$  – wylosowano więcej niż jedną sztukę dobrą;  $A \cup B = B$ ,  $B \cup C$  – zdarzenie pewne;  $A \cap B = A$ ,  $B \cap C$  – wylosowano dokładnie jedną sztukę dobrą;  $B' \cap C' = \emptyset$ . 8. a)  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ; b)  $A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3$ ; c)  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ; d)  $(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) \cup (A'_1 \cap A'_2 \cap A_3) \cup (A'_1 \cap A_2 \cap A'_3) \cup (A_1 \cap A'_2 \cap A'_3)$ ; e)  $A'_1 \cap A'_2 \cap A_3$ . 9. a)  $A \cap B' \cap C'$ ; b)  $A \cap B \cap C'$ ; c)  $A \cap B \cap C$ ; d)  $A \cup B \cup C$ ; e)  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ; f)  $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$ ; g)  $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$ ; h)  $A' \cap B' \cap C'$ ; i)  $(A \cap B \cap C)'$ . 10. a) 0; b) 0; c) 4; d) 2; e) 1; f) 1; g) 0. 11. a)  $A \cup (B \cap C)$ ; b)  $A$ ; c)  $A \cap B$ . 12. a)  $C$ ; b)  $A$ .

## 147.

1.  $E = \{(o, o, o), (o, o, r), (o, r, o), (r, o, o), (o, r, r), (r, o, r), (r, r, o), (r, r, r)\}$ ; a)  $\frac{3}{8}$ ; b)  $\frac{1}{2}$ ; c)  $\frac{7}{8}$ . 2.  $E$  jest zbiorem elementów:  $(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_1, e_6), (e_2, e_1), (e_2, e_2), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_2, e_6), (e_3, e_1), (e_3, e_2), (e_3, e_3), (e_3, e_4), (e_3, e_5), (e_3, e_6), (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_3), (e_4, e_4), (e_4, e_5), (e_4, e_6), (e_5, e_1), (e_5, e_2), (e_5, e_3), (e_5, e_4), (e_5, e_5), (e_5, e_6), (e_6, e_1), (e_6, e_2), (e_6, e_3), (e_6, e_4), (e_6, e_5), (e_6, e_6)$ , gdzie  $(e_i, e_j)$  oznacza wyrzucenie w pierwszym rzucie  $i$  oczek i w drugim rzucie  $j$  oczek;  $\frac{1}{6}, \frac{23}{36}, \frac{1}{3}$ . 3.  $E$  jest zbiorem elementów:  $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)$ ; a)  $\frac{3}{5}$ ; b)  $\frac{3}{5}$ ; c)  $\frac{3}{10}$ . 4. a) 0,2; b) 0,4. 5.  $P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ . W powyższym dowodzie skorzystaliśmy trzykrotnie ze wzoru (146.5).

## 149

1. a)  $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ ; b)  $\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ . 2. Ponumerujmy osoby w windzie

liczbami od 1 do 7 i każdej osobie przyporządkujemy numer piętra, na którym ona wysiada. Jako zdarzenie elementarne przyjmijmy 7-wyrazowe wariacje z powtórzeniami zbioru 10 elementów 1, 2, ..., 10. Pierwszy wyraz wariacji oznacza numer piętra, na którym wysiada pierwsza osoba, drugi wyraz oznacza numer piętra, na którym wysiada druga osoba itd. Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zajściu interesującego nas zdarzenia  $A$  są 7-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru 10

elementów, więc  $P(A) = \frac{V_{10}^7}{W_{10}^7} = 0,06$ . 3. a)  $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}$ ; b)  $\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{9}$ ;

c)  $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{18}$ . 4.  $\frac{\binom{8}{4}\binom{9}{3}}{\binom{17}{7}} = \frac{735}{2431}$ . 5.  $A$  – wśród wylosowanych kart jest

co najmniej 1 as;  $A'$  – wśród wylosowanych kart nie ma asa;  $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{32}{3}}{\binom{36}{3}} = \frac{109}{357}$ . 6.  $A$  – w skład delegacji wejdzie co najmniej 1 kobieta;

$A'$  – w skład delegacji nie wejdzie żadna kobieta;

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{20}{3}}{\binom{25}{3}} = 0,5$ . 7.  $\frac{\binom{95}{50} + \binom{5}{1}\binom{95}{49}}{\binom{100}{50}} = 0,181$ .

8.  $p_k = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{13-k}}{\binom{52}{13}}$ ,  $p_0 = 0,3038$ ,  $p_1 = 0,4388$ ,  $p_2 = 0,2135$ ,  $p_3 = 0,0412$ ,  $p_4 =$

$= 0,0026$ . 9. a)  $\frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{13\,983\,816} = 0,000\,000\,43$ ; b)  $\frac{\binom{6}{5}\binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{252}{13\,983\,816} =$

$= 0,000\,018\,02$ ; c)  $\frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246\,820}{13\,983\,816} = 0,0176504$ ;

d) uwzględniając otrzymane wyniki oraz wyniki z przykładu 149.5 i stosując wzór (146.1) dochodzimy do wniosku, że prawdopodobieństwo trafnego wytypowania

co najmniej 3 liczb jest równe:  $\frac{1+6+252+13545+246\,820}{13\,983\,816} = 0,01863754$ .

10.  $\frac{\binom{60}{3}\binom{30}{2} + \binom{60}{4}\binom{30}{1} + \binom{60}{5}}{\binom{100}{5}}$

4.  $\frac{1}{6}$ , 5.  $\frac{1}{2}$ , 6.  $\frac{2}{3}$ . 7.  $P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B) \times P(C|A \cap B) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$ . 8. 0,8. 9.  $A_i$  – kupienie czółenka wyprodukowanego przez  $Z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $B$  – kupienie braku; a)  $P(B) = 0,0108$ ; b)  $P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{7}{18}$ . 10. a) 0,9; b)  $\frac{1}{15}$ .

4. a), b), c) – są zależne, d) są niezależne.  
5. Założenie  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$   
 $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B')) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A)P(B) + P(A \cap B')$   
stąd  $P(A \cap B') = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$ .  
6. a)  $A \cap E = A$ ;  $P(A \cap E) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A)P(E)$ ;  
b)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;  $P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = 0 \cdot P(A) = P(\emptyset)P(A)$ .  
7. Założenia:  $A \cap B = \emptyset$ ,  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$   
 $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B)$ .  
8.  $P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) = [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) = P(A \cup B)P(C)$ .

1. 0,06, 2. 0,98, 3. 0,18, 4. a) 0,612; b) 0,003 5.  $1 - 0,996^{250} \approx \frac{5}{8}$ .

3. a)  $\frac{80}{243}$ ; b)  $\frac{80}{243}$ ; c)  $\frac{32}{243}$ ; d)  $\frac{211}{243}$ ; e)  $\frac{131}{243}$ ; f)  $\frac{112}{243}$ . 4. a)  $\frac{144}{625}$ ; b)  $\frac{2853}{3125}$ ;  
c)  $\frac{992}{3125}$ . 5.  $S_8$  – liczba sztuk wadliwych spośród 8 sztuk wybranych  $P(S_8 > k) \leq 0,05$ ,  
stąd  $P(S_8 \leq k) \geq 0,95$ ; po obliczeniach  $k \geq 3$ .  
6.  $S_n$  – liczba celnych strzałów spośród  $n$  strzałów:  $P(S_n \geq 1) \geq 0,95$

$$P(S_n \geq 1) = 1 - P(S_n < 1) = 1 - P(S_n = 0) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 0,95$$

Stąd  $(0,4)^n \leq 0,05$  i po obliczeniach  $n \geq 4$ .

7. a) 0,12; b)  $n \geq 9$ .

5. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$ :

|       |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x_k$ | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
| $p_k$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{1}{4}; \quad P(X \leq 4) = \frac{1}{6}; \quad P(X \geq 6) = \frac{13}{18}.$$

6. 

|       |                 |                |                |
|-------|-----------------|----------------|----------------|
| $x_k$ | -1              | 5              | 10             |
| $p_k$ | $\frac{33}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

;  $EX = -\frac{13}{16}$ .

7.  $EX = 1,8$ ;  $D^2X = 1,76$ . 8.  $EX = EY = 1,25$ ;  $D^2X = D^2Y = \frac{7}{16}$ . Zmienne losowe  $X$  i  $Y$  o różnych rozkładach mają równe wartości oczekiwane i równe wariancje, więc parametry te nie wyznaczają rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

9. a)  $P(X = k) = \frac{1}{n}$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ ; b)  $EX = (1 + 2 + \dots + n) \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$ ;  
c)  $m_2 = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n}$ ;  $D^2X = \frac{n^2 - 1}{12}$ .  
10. a)  $P(X = 2^k) = \frac{1}{n}$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ ; b)  $EX = \frac{2(2^n - 1)}{n}$ .

### Zadania z różnych działów

Rozwiązać poniższe równania i nierówności oraz układy równań i nierówności:

- $2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 3 \sin^2 2x = 1$ .
- $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$ .
- $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$ .
- $\sqrt{3} \cos 2x + \cos x > \sqrt{3}$ ,  $0 < x < 2\pi$ .
- $\left| \sin \frac{2x}{3} \right| = 1$ ,  $x > 12\pi$ ,  $\operatorname{tg} x > 0$ .
- $x + xy + y = 19$ ,  $x^2y + xy^2 = 84$ .
- $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^n = 32^{8-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- $\log_{1/3} \frac{x+1}{x-1} > \log_3 \operatorname{ctg} \frac{17\pi}{4}$ .
- $\log(x^2 - 1) < \log(x+2) + \log(x+3)$ .
- $\log_{x^2}(2+x) < 1$ .

$$11. \frac{x^2-4x-21}{x^2-5x-6} > 0.$$

$$12. x^4-3x^3-x+3 < 0.$$

13. W półkuli o promieniu  $R$  zawarte są cztery kule o jednakowym promieniu  $r$ , przy czym kule te są:

- każde dwie wzajemnie styczne (zewnętrznie),
- styczne do półsfery ograniczającej półkulę (wewnętrznie),
- styczne do płaszczyzny koła wielkiego ograniczającego półkulę. Wyznaczyć  $r$ .

14. Na czworościanie foremnym opisano kulę. O ile procent zwiększy się objętość kuli, jeśli krawędź czworościanu zostanie zwiększona o 20%?

15. W ostrosłup prawidłowy kwadratowy o krawędzi podstawy równej 1 wpisano kulę o promieniu  $r$ . Wyrazić objętość  $V$  ostrosłupa w zależności od  $r$ .

16. Prostokąt wpisany w koło ma pole równe połowie pola koła. Obliczyć w tym prostokącie stosunek długości boków: krótszego do dłuższego.

17. W rombie stosunek przekątnych jest równy 3:4. Obliczyć stosunek pola rombu do pola koła wpisanego w ten romb.

18. Trzy koła o jednakowym promieniu  $a$  leżą na płaszczyźnie w ten sposób, że środek każdego z nich leży na okręgach obu pozostałych kół. Obliczyć pol iloczynu (czyli części wspólnej) tych trzech kół.

19. Kwadrat  $K'$  powstał z kwadratu  $K$  przez obrót o  $45^\circ$  dookoła jego środka. Obliczyć pole figury  $F = K \cup K'$ , wiedząc, że brzeg tej figury jest łamaną (zamkniętą) o długości  $a$ .

20. Długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu tworzą ciąg arytmetyczny, w którym wyraz najmniejszy stanowi  $3/4$  największego. Wyznaczyć długości boków tego czworokąta, jeśli wiadomo, że jego obwód równa się 84.

21. Znaleźć cztery liczby, z których trzy pierwsze tworzą ciąg geometryczny, a trzy ostatnie — ciąg arytmetyczny. Suma pierwszej i ostatniej równa się większemu pierwiastkowi równania

$$\log(x+6) - \frac{1}{2} \log(2x-3) = 2 - \log 25$$

a trzykrotność pierwszej równa się mniejszemu pierwiastkowi tego równania.

22. Rozwiązać równanie  $\cos 2x + \sin x = 1 + 2p + q^2$ , jeśli wiadomo, że  $x^2 - 1$  jest dzielnikiem wielomianu  $x^3 + px^2 + qx + 1$ .

23. Trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia potęgi

$$\left( \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^n$$

według wzoru Newtona tworzą ciąg arytmetyczny. Znaleźć wszystkie wyrazy tego rozwinięcia, w których  $x$  występuje w potęgze naturalnej.

24. Uprościć wyrażenie

$$\sqrt{(1 - \cos \alpha \cos \beta)^2 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

25. Bez pomocy tablic obliczyć  $\cos 101^\circ 15'$ .

26. Dla jakich wartości  $x$  ma sens wyrażenie:

$$a) \sqrt{6x-x^2} + \sqrt{x-1}, \quad b) \log(4x-x^2) - \log(x-2)$$

27. Dla jakich wartości parametru  $m$  istnieją pierwiastki równania:

$$a) \sin^4 x + \cos^4 x = m, \quad b) m \log_{10}^2 x + \log_{100} x = m - 1$$

28. Dla jakich wartości  $k$  trójmian

$$(2k-1)x^2 + (7k+2)x - 3k$$

ma dla każdego  $x$  wartość większą niż trójmian

$$(k+3)x^2 + 5(k+1)x - 4(k+1)$$

29. Dla jakich  $m$  równanie  $x^2 + (m-3)x - (m-3) = 0$  ma dwa różne pierwiastki  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $\log_{0,5} x_1^2 + \log_{0,5} x_2^2 > 0$ ?

30. Dany jest odcinek jednostkowy. Skonstruować cyrklem i linijką odcinek o długości: a)  $\sqrt[4]{5}$ , b)  $1/\sqrt[4]{5}$ , c)  $\sqrt[4]{5}$ .

31. Logarytmy trzech liczb tworzą ciąg arytmetyczny. Suma odwrotności tych liczb równa się 39, a suma kwadratów odwrotności równa się 819. Znaleźć te liczby.

32. Liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tworzą ciąg geometryczny o ilorazie  $q \neq 1$ . Obliczyć sumę

$$S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n$$

33. Obliczyć granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^3 + x^2 + x + 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x^3}, \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}.$$

34. Obliczyć pochodną funkcji:

$$a) y = \frac{x^2 \lg x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad b) y = \frac{1}{5} \lg^5 x - \frac{1}{3} \lg^3 x + \lg x - x.$$

35. Wyznaczyć na płaszczyźnie  $Oxy$  prostą przechodzącą przez dany punkt  $(x_0, y_0)$ , przy czym  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ , i ograniczającą z osiami układu trójkąt o najmniejszym polu.

36. Wyznaczyć maksimum pola prostokąta wpisanego w elipsę  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$  i mającego boki równoległe do osi elipsy.

37. Wyznaczyć odległość punktu  $(p, p)$  od paraboli  $x^2 = 2py$ .

38. Z badać funkcję:

$$a) y = x^4 - \frac{5}{4} x^2, \quad b) y = x^3 - 3x^2, \quad c) y = 2|x| - x^2.$$

39. Bez pomocy tablic udowodnić nierówność:

$$a) \cos 20^\circ \sin 50^\circ \cos 80^\circ < \frac{1}{7}, \quad b) \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

40. Naszkicować wykresy następujących funkcji:  $y = \sin x$ ,  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ,  
 $y = \sin 2x$ ,  $y = |\sin x|$ ,  $y = \sin^2 x$ ,  $y = 2 \sin x$ ,  $y = -2 \sin x$ ,  $y = |\sin 4x|$ ,  
 $y = \sin x + \cos x$ ,  $y = |\sin 4x + \cos 4x|$ .
41. Naszkicować wykres pochodnej funkcji  $y = -2 \cos(3x + \pi/3)$ .
42. Wykazać, że funkcja  $y = x - \sin x \cos x$  jest rosnąca w dowolnym przedziale.
43. Udowodnić prawdziwość nierówności:

$$a) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

$$b) (1+x)^n > 1+nx \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \in \mathbb{R}, x > -1.$$

44. W stożek o kącie rozwarcia  $\alpha$  wpisano ostrosłup kwadratowy. Obliczyć kąt  $\beta$  u wierzchołka ściany bocznej tego ostrosłupa.

### Odpowiedzi do zadań z różnych działów

1.  $45^\circ + n \cdot 90^\circ$ . 2.  $-45^\circ + n \cdot 180^\circ$ ,  $n \cdot 360^\circ$ ,  $-90^\circ + n \cdot 360^\circ$ . 3.  $n \cdot 90^\circ$ ,  $22^\circ 30' + n \cdot 45^\circ$ . 4.  $0 < x < \pi/6$  lub  $11\pi/6 < x < 2\pi$ . 5.  $57\pi/4$ . 6. (3, 4), (4, 3). 7.  $n = 5$ . 8.  $x < -1$ . 9.  $-7/5 < x < -1$  lub  $x > 1$ . 10.  $(-2; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(2, \infty)$ . 11.  $(-\infty; -3)$ ,  $(-1; 6)$ ,  $(7; \infty)$ . 12.  $1 < x < 3$ . 13.  $R/(1 + \sqrt{3})$ . 14. 72,8%. 15.  $V = \frac{2}{3} r/(1-4r^2)$  dla  $0 < r < \frac{1}{2}$ . 16.  $(4 - \sqrt{16 - \pi^2})/\pi$ . 17.  $25/(6\pi)$ . 18.  $a^2(\pi - \sqrt{3})/2$ . 19.  $a^2(2 + \sqrt{2})/64$ . 20. 18, 21, 24, 21. 21. 2, 4, 8, 12 lub 2, -3, 9/2, 12. 22.  $90^\circ + n \cdot 120^\circ$ . 23.  $n = 8$ ,  $x^4$ ,  $35x/8$ . 24.  $|\cos \alpha - \cos \beta|$ . 25.  $-\sqrt{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}/2}$ . 26. a)  $1 \leq x \leq 6$ ; b)  $2 < x < 4$ . 27. a)  $1/2 \leq m \leq 1$ ; b)  $m \leq 1/2 - \sqrt{3}/4$ . 28.  $k > 73/12$ . 29.  $3 < m < 4$ . 30. a)  $\sqrt[4]{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$  tw. 87.4; b)  $1/\sqrt{5} = \sqrt[4]{5}/5$  tw. 84.6; c)  $\sqrt[4]{5} = \sqrt{1/\sqrt{5}}$  tw. 88.6. 31. 1/3, 1/9, 1/27. 32. a)  $[nq^n(q-1) - q^n + 1]/(q-1)^2$ . 33. a) 5/2; b) 1/2; c)  $x$ . 34. a)  $[x(1+x^2)(2 \operatorname{tg} x + x + x \operatorname{tg}^2 x) - x^3 \operatorname{tg} x] \cdot (1+x^2)^{-3/2}$ ; b)  $\operatorname{tg}^4 x$ . 35.  $y_0 x + x_0 y = 2x_0 y_0$ . 36.  $2ab$ . 37.  $(p \sqrt[3]{2}, p \sqrt[3]{4}/2)$ . 38. a)  $y_{\max} = y(0) = 0$ ; b)  $y_{\max} = y(0) = 0$ ,  $y_{\min} = y(2) = -4$ ; c)  $y_{\max} = y(-1) = y(1) = 1$ ,  $y_{\min} = y(0) = 0$ . 44.  $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\alpha}{2}$ .

### SKOROWIDZ

Aksjomaty 10  
 — planimetrii 18-25, 29, 31, 32, 46  
 — stereometrii 263  
 alfabet grecki 258  
 alternatywa 20  
 apotema 335  
 arcus 254  
 asymptota 194, 393

Badanie krzywej drugiego stopnia 396  
 Bernoulliego prawo 451  
 — próby 444  
 bok kolejny 38  
 — łamanej 24  
 —, przeciwległy 55, 67, 94  
 bryła 268, 295  
 —, opisana, wpisana 302  
 brzeg 27, 30, 267

Carnota twierdzenie 223  
 Cavalieriego zasada 309  
 cechy podobieństwa 98, 99, 107, 108  
 — przystawania 59, 60, 61, 107, 108  
 ciało sztywne 78  
 cięciwa 28  
 cosecans 143, 148, 176  
 cosinus 143, 148, 176  
 — kierunkowy 410  
 cosinusoida 195  
 cotangens 143, 148, 176  
 cotangensoida 195  
 czasza 302  
 częstość zdarzenia 417, 422  
 część wspólna 13  
 czworokąt opisany, wpisany 112  
 czworokąty 67

czworościan 273  
 — foremny 298, 303

Dedukcja 10  
 definicja 9  
 — genetyczna, nominalna 21  
 — prawdopodobieństwa 423  
 — — klasyczna 428  
 definiowanie prawdopodobieństwa 426  
 deltoid 69  
 depresja (obniżenie) 241  
 długość krzywej 119  
 — łuku okręgu 120  
 — odcinka 23, 366  
 — okręgu 119  
 sumy wektorów 72  
 — wektora 360  
 dodawanie kątów 61  
 — — skierowanych 82  
 — wektorów 70  
 doświadczenie losowe 416  
 dwudziestościan 303  
 dwunastościan 303  
 dwusieczna kąta 57  
 działania na wektorach 70, 365, 410  
 działanie 89  
 dziedzina 15  
 dzielenie kąta 83

Element 13  
 — neutralny 87  
 — przeciwny 87  
 elewacja (wzniesienie) 154, 241  
 elipsa 285, 387, 389  
 Euklidesa pewnik 10, 18  
 Eulera okrąg 104

Figura 9  
 -- domknięta 31, 268  
 -- mierzalna 307  
 -- nieograniczona 31  
 -- niewypukła 32  
 -- obrotowa 299  
 -- ograniczona 31  
 -- osiowo symetryczna 47  
 -- otwarta 268  
 -- płaska 17  
 -- podstawowa (pierwotna) 11  
 -- spójna 32  
 -- środkowo symetryczna 65  
 -- wycięta 32  
 -- wypukła 32, 47  
 figury jednokładne 97  
 -- podobne 98, 295  
 -- przystające 48, 58, 87  
 funkcja okresowa 181  
 funkcje cyklometryczne (kołowe) 253  
 -- trygonometryczne 148, 161, 176, 180, 189, 261  
 -- kąta podwójnego 198  
 -- połowy kąta 199  
 -- różnicy kątów 198  
 -- sumy kątów 196

Geometria 10  
 -- analityczna 12, 360, 406  
 -- euklidesowa 10  
 -- nieeuklidesowa 10  
 -- Łobaczewskiego 11  
 Gergonne'a punkt 104  
 graniastosłup 297  
 -- pochyły, prawidłowy, prosty 297  
 grupa 87  
 -- izometrii 87  
 -- podobieństw 97

Heksaeder 303  
 Herona wzór 233  
 Hilberta system aksjomatów 11  
 hiperbola 387, 391  
 -- równoosiowa 394

Ikosaeder 303  
 iloczyn przekształceń 42

iloczyn skalarny 368, 412  
 -- zbiorów 13  
 -- zdarzeń 420  
 inkluzja 14  
 interpolacja 146  
 izometria 42, 44, 85, 288  
 Jednokładność 96, 294, 385  
 jednostka objętości 305  
 -- odległości 20  
 -- pola 104  
 Jordana definicja pola 114  
 Kartezjusza metoda 360  
 kąt czworosienny 271  
 -- dwóch osi 366  
 -- -- prostych 37, 380  
 -- -- wektorów 367  
 -- dwuścienny 269, 334  
 -- kierunkowy 366, 410  
 -- kolejny 61  
 -- liniowy 270, 281  
 -- między odcinkami 37  
 -- -- prostą i płaszczyzną 280, 334  
 -- -- prostymi skośnymi 334  
 -- -- wektorami 366, 367  
 -- -- -- w przestrzeni 409  
 -- obrotu 83  
 -- oparty na łuku 37  
 -- ostry 62  
 -- pełny 36  
 -- płaski 270, 273, 334  
 -- półpełny 36  
 -- prosty 51, 280  
 -- przeciwny 81  
 -- przyległy 37  
 -- rozwarty 62  
 -- skierowany 81, 168  
 -- -- swobodny 82  
 -- środkowy 36  
 -- trójścienny 270  
 -- wektora z osią 366  
 -- wewnętrzny 39  
 -- wielościenny 271  
 -- wierzchołkowy 37  
 -- wklęsły 35  
 -- wpisany 37

kąt wypukły 35  
 -- zerowy 36, 280  
 -- zewnętrzny 39  
 -- zwykły 35  
 kąty jednostronne 65  
 -- naprzemianległe 65  
 -- odpowiadające 65  
 -- przyległe i wierzchołkowe 37, 65  
 kierownice 400–402  
 kierunek 19  
 -- rzutu 25, 276  
 -- wektora 69  
 kofunkcje 150  
 kolinearność 19, 274, 369  
 koło 27  
 -- dopisane 58, 236  
 -- małe 301  
 -- opisane 53, 236  
 -- wielkie 301  
 -- wpisane 58, 234  
 -- trygonometryczne 162, 189  
 kombinacja 431  
 komplarność 274  
 koniunkcja 20  
 konstrukcja 124  
 -- dwusiecznej 56  
 -- kąta o danym tangensie lub sinusie 160  
 -- -- równego danemu kątowi 130  
 -- okręgu opisanego na trójkącie 127  
 -- -- wpisanego w trójkąt 58, 128  
 -- prostopadłej 49, 127  
 -- punktu symetrycznego 45  
 -- równoległej 127  
 -- stycznej do okręgu 128  
 -- -- -- dwóch okręgów 129  
 -- symetralnej odcinka 52  
 -- średniej geometrycznej 131  
 -- trójkąta o danych środkach boków 74  
 -- -- -- długościach boków 125  
 krawędź boczna 272, 297  
 -- kąta 270  
 -- podstawy 273, 297  
 -- przecięcia 264  
 kryterium 70  
 krzywa 118  
 -- drugiego stopnia 288  
 kula 267, 301  
 kwadrat 68

Liczba  $\pi$  116, 117  
 -- kombinacji 432  
 -- sukcesów 445  
 -- wariacji 430, 431  
 -- zdarzeń 418  
 logarytmy dziesiętne 259  
 -- funkcji trygonometrycznych 262  
 losowanie 432

Lamana 24  
 -- wpisana 119  
 łączność 43, 71, 370  
 Łobaczewskiego geometria 11  
 łuk okręgu 28, 248  
 -- skierowany 79  
 -- średni 122  
 -- wycinka 122

Metoda analityczna Kartezjusza 360  
 -- analizy starożytnych 211  
 -- kąta połówkowego 213  
 -- równań równoważnych 211  
 miara kąta 62, 66, 169, 170, 173  
 -- -- artyleryjska 250  
 -- dwuściennego 270, 280  
 -- łukowa 246  
 -- stopniowa 247  
 -- objętości 307  
 -- pola 115  
 mimośród elipsy 399  
 -- hiperboli 400  
 mnogość 13  
 mnożenie kąta przez liczbę 83  
 -- wektora przez liczbę 72  
 moduł wektora 69, 360, 364, 367, 409  
 moment rzędu drugiego 449

Nadzbior 14  
 należenie 13  
 naroże 273  
 następnik 92  
 następowanie 14  
 nasyp 299  
 naturalne wartości funkcji trygonometrycznych 154, 261  
 niezależność prób 440  
 -- zdarzeń 439

- okrąg dziewięciu punktów (Eulera) 104
- opisany 53, 236, 390
- wpisany 57, 234, 390
- okres 181
- okresowość 180
- określoność 176
- okręgi styczne 33
- współśrodkowe 29
- oktaeder 303
- ortocentrum 75, 100
- ostrosłup 272, 297, 310
- opisany 301
- prawidłowy 298
- ścięty 298, 314
- — prawidłowy 299
- wpisany 300
- oś elipsy 390
- hiperboli 393
- liczbowa 362
- symetrii 46, 290
- kąta 56
- paraboli 395
- układu 363, 406
- walca 299
- ośmiościan 303
- otoczenie 30, 267
- 
- Para liczb 381
- współrzędnych 362
- parabola 387, 395
- pas 27
- kulisty (sferyczny) 302, 330
- period 181
- permutacja 431
- perspektywa 283
- pewnik 10
- Euklidesa 10, 18
- pełność praktyczna 451
- pępek prostych 18
- pierścień 29
- piramida 298
- Pitagorasa twierdzenie 101
- planimetria 11, 17
- Platona bryły 304
- plaszczyna 16, 263
- przechodząca przez dwie proste prze-
- cinające się 264

poprzedzanie 14  
porażka 444  
porównywanie kątów 62  
— odcinków 23  
poślizg 77  
potęgą punktu 112  
Pothenota zagadnienie 241  
powierzchnia boczna graniastosłupa 297  
— — — ostrosłupa 298  
— — — ściętego 298  
— — — stożka 300  
— — — walca 299  
— stożkowa 300  
— wielościenna 296  
powinowactwo 385  
półogniskowa elipsy 398  
— hiperboli 399  
półkole 29  
półokrąg 29  
półosie elipsy 390  
— hiperboli 393  
półprosta 22  
półpłaszczyzna 26, 381  
prawdopodobieństwo 423, 428, 442  
— iloczynu zdarzeń 436  
— sumy 424, 425, 427  
— warunkowe 436  
— zdarzenia przeciwnego 425  
— zupełnie 437  
prawidłowość statystyczna 417  
prawo Bernoulliego 451  
— trójkąta 16, 21  
— wielkich liczb 451  
promień czaszy 302  
— duży pierścienia 29  
— koła 27  
— — dopisanego 236  
— — opisanego 107, 156, 236  
— — wpisanego 107, 156, 234  
— kuli 267  
— mały pierścienia 29  
— odcinka kulistego 302  
— sfery 301  
— stożka 300  
— średni pierścienia 121  
— walca 299  
— wodzacy 398, 400, 401

- proporcja 92
- prosta 16, 17, 381
  - i płaszczyzna 265
  - prostopadła do płaszczyzny 278
  - rzutująca 25, 276
- proste prostopadłe 48, 277
  - równoległe 18
  - skośne 265
  - w przestrzeni 265
- prostokąt 68
- prostopadłościan 297
- prostopadłość 51, 277, 368, 376, 380, 413
- próby Bernoulliego 444
  - niezależne 440
- przecinanie się płaszczyzn 264
  - prostych 18
- przeciwdziedzina 15
- przedłużenie odcinka 23
  - półprostej 22
- przekątna bryły 335
  - graniastosłupa 297
  - kwadratu 102
  - prostokąta 102
  - prostopadłościanu 102
  - ściany 335
  - wielokąta 38
- przekrój bryły 298, 300, 344
  - stożka 300, 387
- przekształcenie 15, 42
  - ciągłe 118
  - generowane 291
  - izometryczne 44
  - odwracalne 43
  - odwrotne 43
  - płaszczyzny 44, 383
  - proporcji 92
  - tożsamościowe 15, 44
- przemienność 43, 71, 76, 78, 87, 370
- przemieszczenie 78
- przestrzeń 9, 16, 263
- przesunięcie układu 386
- przypadek jednoznaczny 227
  - zawiły 228
- przystawanie 48, 58, 87, 107, 288
- punkt 16, 17, 381
  - bieżący 370, 371
  - brzegowy 30, 267

- punkt Gergonne'a 104
  - niezmienniczy stały 15, 42, 293
  - przebiecia 265
  - styczności 56, 301
  - szczególny trójkąta 100, 104
  - wewnętrzny 30, 267
  - zaczepienia 69
  - zewnętrzny 30, 267
- Rachunek prawdopodobieństwa 417
- radian 246
- ramię kąta 35
  - trapezu 67
- relacja porządkująca 14
- relacje między zdarzeniami 420
- rodzaje brył 295
  - czworokątów 67
  - izometrii 86, 293, 294
  - trójkątów 63
- romb 68
- rozcinanie płaszczyzny 32
- rozdzielność 370
- rozkład izometrii 85, 293
  - prawdopodobieństwa 447
  - dwumianowy 445, 448
  - jednostajny 448
  - zero-jedynkowy 448
- rozwartość 81
- równania parametryczne odcinka 370
- równanie odcinka 370
  - prostej 373–380
- stopnia pierwszego 381
- trygonometryczne 204
- ewidentne 211
- równoległobok 68, 369
  - sił 238
- równoległościan 297
- równoległość płaszczyzn 264
  - prostej do płaszczyzny 265
  - prostych 18, 380
  - wektorów 368, 413
  - w przestrzeni 266
- równość kątów 62
  - skierowanych 81
  - odcinków 23
  - wektorów 70
- różnica geometryczna 200

- różnica tabelowa 153
  - zadaniowa 153
  - zdarzeń 420
- ruch 78, 79, 294
  - harmoniczny 252
- rzędna 363
- rzut prostokątny 54, 280, 286, 411
  - równoległy 25, 77, 89
  - na płaszczyznę 276
  - środkowy 283
  - ukośny 283, 286
- rzutnia 25, 276, 283
- Secans 143, 148, 176
- sfera 267, 301
- siatka walca 327
  - wielościanu 296, 319–325
  - stożka 328
- sieczna okręgu 28, 56
- sieć kwadratowa 114
  - sześcienna 306
- sinus 143, 148, 176, 249
- sinusoida 193, 251
- skala jednokładności 96, 294
  - podobieństwa 97, 295
- skręcenie 284
- skrętność 295
- skrócenie 284
- spodek wysokości 297
- standardowe oznaczenia 63, 148
  - położenie kąta 171
- stereometria 11, 263
- stopień 62
  - równania 396
- stosunek odcinków 90
  - —, pól, objętości 281, 312
- stożek 300, 387
- stożkowe 387
- strona płaszczyzny w przestrzeni 269
  - punktu na prostej 22
  - prostej na płaszczyźnie 26
- styczna do kuli 301
  - okręgu 56, 389
  - stożkowej 401
- sukces 444
- suma cosinusów 200

- suma kątów 66
  - kolejnych 61
  - skierowanych 82
  - miar kątów 67
  - sinusów 200
  - wektorów 71
  - zbiorów 13
  - zdarzeń 420
- symbole relacji 420
- symetralna boku 53
  - odcinka 51
- symetria figury 85, 289, 304
  - rzędu  $n$  304
  - osiowa na płaszczyźnie 46, 76, 84
  - w przestrzeni 290
  - z poślizgiem 77
  - płaszczyznowa 289
  - środkowa na płaszczyźnie 64
  - w przestrzeni 291
- system aksjomatów 11
- szerokość pasa 56
  - pierścienia 121
  - wycinka 122
- sześcian 297, 303
  - jednostkowy 305
- Ściana boczna ostrosłupa 273
  - kąta czworobocznego 271
  - dwuściennego 269
  - trójściennego 270
  - wielościnnego 272
- przeciwieństwa 273
  - sąsiednia 273, 296
  - wielościanu 273
- średnica okręgu, koła 28
  - sfery, kuli 267, 301
- środek ciężkości trójkąta 73
  - jednokładności 96
- obrotu 83
- odcinka 371, 411
- okręgu, koła 27
- sfery, kuli 267, 301
- symetrii 64, 291
- figury 65, 291
- środkowa boku w trójkącie 73
  - trapezu 67, 73

Talesa twierdzenie 93  
 tangens 143, 148, 176  
 tangensoida 194  
 tetraeder 303  
 tożsamość 44, 86  
 tożsamości trygonometryczne 157, 178, 195, 202  
 translacja 75, 78, 275, 383  
 — układu 386  
 trapez 67  
 trójkąt 53–66, 73–75, 94, 98–108  
 trygonometria 11, 12, 143  
 twierdzenia o izometriach 44, 53, 55, 64, 75, 84, 275, 288, 387, 409  
 — o okręgu i kole 33, 53, 56, 58, 108, 117, 120, 248  
 — o płaszczyznach i prostych w przestrzeni 263–266, 278–280  
 — o prawdopodobieństwie 424, 427, 430, 436, 445, 451  
 — o prostych na płaszczyźnie 18, 25, 49, 66, 73, 88  
 — o trójkącie 20, 53, 58, 60, 66, 72, 94, 98, 100, 232  
 — o wektorach 70–73, 75–77, 95, 361–376  
 twierdzenie 10  
 — sinusów, cosinusów, tangensów 223  
  
**Układ rzutowania** 25, 276, 362, 407  
 — współrzędnych 363, 406  
 — zamknięty twierdzeń 33  
 uporządkowanie 14, 47  
 — punktów na prostej 21  
  
**Walec** 299  
 wariacja bez powtórzeń 431  
 — z powtórzeniami 429  
 wariancja 449  
 warstwa kulista 302, 333  
 wartość funkcji 15  
 — oczekiwana 449  
 wcinanie się 239–241  
 wektor 69, 360  
 — przeciwny 70  
 — składowy 71, 363  
 — swobodny 78, 364  
 — w przestrzeni 273  
  
 wektor wodzący 172, 361, 408  
 — wypadkowy 71  
 — zerowy 69  
 wersor 360  
 wielokąt 38, 67  
 — foremny 84, 104  
 — opisany 58  
 — wpisany 53  
 — wypukły 39  
 wielościan 273, 296  
 wielościany foremne 303, 304  
 wierzchołek elipsy 398  
 — hiperboli 393  
 — kąta 35  
 — łamanej 24  
 — paraboli 395  
 — pęku 18  
 — wielokąta 38  
 własności prawdopodobieństwa 424, 425  
 wnętrze 27, 30, 267  
 — wielokąta 38  
 współczynnik kierunkowy 377  
 współliniowość 19, 21, 47  
 współrzędne punktu 361, 364, 406  
 — wektora 361, 365, 408, 411  
 wycinek koła 37, 121, 122, 249  
 — kuli 302  
 — pierścienia kołowego 121, 122  
 wyraz czwarty proporcjonalny 92  
 wysokość bryły 335  
 — graniastosłupa 297  
 — horyzontalna 241  
 — ostrosłupa 297  
 — — ściętego 298  
 — równoległoboku 68  
 — ściany bryły 335  
 — trapezu 67  
 — trójkąta 55  
 — — równobocznego 103  
 wzajemne położenie okręgów 33  
 — — sfer 269  
 wzory redukcyjne 151, 181–188  
 wzór Herona 233  
  
**Zagadnienie Pothenota** 241  
 zamiennik długości 92  
 — objętości 307

zamiennik pola 116  
 zasada Cavalieriego 309  
 zawieranie się 14  
 zbiór jednoelementowy 13  
 — nieskończony 14  
 — pusty 13, 14  
 — skończony 13  
 — uporządkowany 14  
 — zdarzeń elementarnych 417  
 zdarzenia niezależne 439  
 — wykluczające się 420  
 zdarzenie elementarne 417  
 — losowe 416, 418  
  
 zdarzenie możliwe 427  
 — niemożliwe 418, 424  
 — pewne 418  
 — pociąga zdarzenie 420, 425  
 — przeciwne 420, 425  
 — sprzyjające 428  
 zewnętrzne 27, 30, 267  
 złoty podział 107  
 złożenie przekształceń 42, 76, 84  
 zmienna losowa 447  
 zwrot kąta 81  
 — prostej 21, 26  
 — wektora 70

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE polecają uczniom  
szkół średnich następujące książki:

## MATEMATYKA

Bogusław Gdowski, Edmund Pluciński

### ZBIÓR ZADAŃ Z MATEMATYKI DLA KANDYDATÓW NA WYŻSZE UCZELNIE

*Książka zawiera zadania z matematyki, dostosowane do poziomu i zakresu materiału wykładanego w szkołach średnich.*

*W zbiorze tym Czytelnik znajdzie zarówno łatwe zadania rachunkowe, jak i zadania trudne, a wśród nich wiele na dowodzenie. Do większości zadań podano dokładne rozwiązania.*

*Na końcu książki znajdują się tematy z egzaminów wstępnych z matematyki na wyższe uczelnie, które pozwolą Czytelnikowi zorientować się w stawianych wymaganiach na tych egzaminach.*

Dziewięć wydań w latach 1971–1986

Wacław Leksiński, Bohdan Macukow, Wojciech Żakowski

### MATEMATYKA W ZADANIACH DLA KANDYDATÓW NA WYŻSZE UCZELNIE

Tom 1 i 2

*Książka zawiera zwięzłe informacje teoretyczne ze wszystkich działów matematyki objętych programem szkół średnich, przykładowo rozwiązane zadania oraz zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania wraz ze wskazówkami i odpowiedziami.*

Trzy wydania w latach 1981–1987

Bogdan Miś

### TAJEMNICZA LICZBA $e$ I INNE SEKRETY MATEMATYKI

*Jest to książka popularnonaukowa. Jej treść stanowią gawędy dotyczące podstawowych pojęć matematyki, takich jak: liczba, zbiór, działanie, relacja, funkcja — związanych z fundamentalnymi dziedzinami matematyki: teorią liczb, teorią mnogości, algebrą, analizą.*

*Napisana jest językiem żywym, a liczne rysunki ułatwiają jej lekturę. Jest przeznaczona dla uczniów lubiących matematykę. Zainteresuje też zapewne nauczycieli matematyki, ze względu na sposób przedstawienia niektórych zagadnień — lekki, niepodręcznikowy — uwzględniający kilkuletnie doświadczenia dydaktyczne autora z pracy ze studentami na Uniwersytecie Warszawskim.*

Rok wydania 1989

Barbara Piłat, Mariusz J. Wasilewski

### TABLICE CAŁEK. Całki nieoznaczone. Całki oznaczone

*Książka zawiera podstawowe wzory rachunku całkowego, tablice całek najczęściej występujących w technice, wybrane całki oznaczone, wybrane funkcje specjalne, tablice przekształceń Laplace'a oraz tablice probabilistyczne.*

Dwa wydania: 1983, 1985

Jędrzej Jędrzejewski, Witold Kruczek, Adam Kujawski

ZBIÓR ZADAŃ Z FIZYKI  
DLA KANDYDATÓW NA WYŻSZE UCZELNIE  
Tom 1 i 2

*Książka zawiera zadania ze wszystkich działów fizyki objętych programem szkół średnich. Do części z tych zadań podano szczegółowe rozwiązania, a do wszystkich zadań — odpowiedzi.*

*Grupy zadań z poszczególnych tematów są poprzedzone krótkimi wprowadzeniami, zawierającymi wskazówki teoretyczne i praktyczne.*

*W ostatnich dwóch rozdziałach zamieszczono zestaw zadań testowych oraz tematy z egzaminów wstępnych na wyższe uczelnie.*

Sześć wydań w latach 1973–1988

Jan Gaj

LABORATORIUM FIZYCZNE W DOMU

*Treści książki są opisy wykonania różnorodnych doświadczeń fizycznych oraz prostych przyrządów, które można zbudować łatwo dostępnymi środkami. Tekst jest podany w formie swobodnej rozmowy z Czytelnikiem. Duży nacisk położono na fizyczną interpretację omawianych eksperymentów.*

*Książka jest bogato ilustrowana, zawiera też kilka wkładek (krążki barwne, tarcza zegara słonecznego), przeznaczonych do przeprowadzenia doświadczeń przez Czytelników.*

Dwa wydania: 1982, 1985

Kurt Waselowsky

225 DOŚWIADCZEŃ CHEMICZNYCH

Przekład z jęz. niemieckiego

*W książce podano niezbędne wiadomości dotyczące urządzenia własnego laboratorium chemicznego, zaproponowano 225 interesujących doświadczeń chemicznych oraz omówiono ich przebieg i wyniki. Liczne rysunki uatrakcyjnią Czytelnikowi lekturę oraz pomogą wykonać doświadczenia.*

Rok wydania 1987

Hermann Raaf

CHEMIA CAŁKIEM PROSTA

Przekład z jęz. niemieckiego

*W książce opisano przystępnym językiem w sposób żywy i interesujący proste, ciekawe i zabawne doświadczenia chemiczne.*

Rok wydania 1986

Irena Liebert-Krach  
(wybór i opracowanie)

TABELE CHEMICZNE DLA UCZNIÓW

*Przedstawione w zwartej formie tabele danych fizykochemicznych ułatwią naukę i będą pomocne podczas wykonywania doświadczeń laboratoryjnych.*

Rok wydania 1988

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

ul. Mazowiecka 2/4, 00-048 Warszawa

tel. 26-72-71 do 79

Dział Upowszechniania i Sprzedaży

tel. 27-56-87

WNT Warszawa 1989. Wydanie XIV. Nakład 19.800 + 200 egz.

Ark. wyd. 32,8. Ark. druk. 29,5. Format A5. Papier offset. kl. V, 70 g.

Podpisano do druku w kwietniu 1989 r. Druk ukończono w kwietniu 1989 r.

Symbol MF/51033/WNT

Poznańskie Zakłady Graficzne im. M. Kasprzaka w Poznaniu.

Zam. 72077/88. K-8/142