

R. LEITNER, W. ŻAKOWSKI

MATEMATYKA

dla kandydatów
na wyższe
uczelnie techniczne

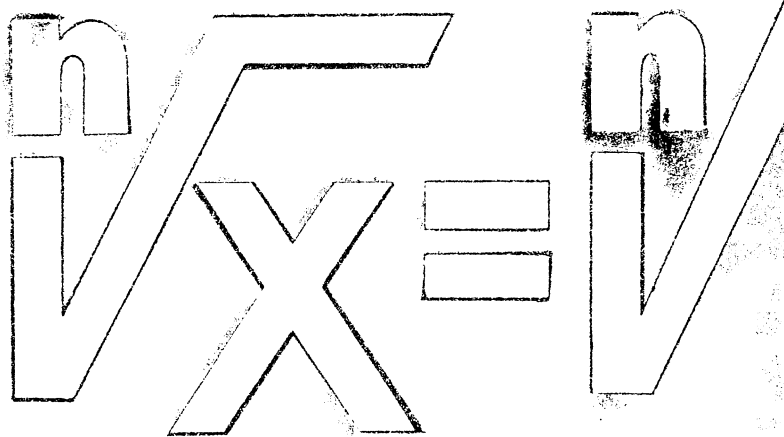


LOGIKA. ZBIORY. LICZBY RZECZYWISTE.
FUNKCJE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI.
UKŁADY RÓWNAŃ. CIĄGI.
LOGARYTMY. GRANICE. POCHODNE. CAŁKI.

R. LEITNER, W. ŻAKOWSKI

MATEMATYKA

dla kandydatów
na wyższe
uczelnie techniczne



LOGIKA. ZBIORY. LICZBY RZECZYWISTE.
FUNKCJE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI.
UKŁADY RÓWNAŃ. CIĄGI.
LOGARYTMY. GRANICE. POCHODNE. CAŁKI.

ROMAN LEITNER, WOJCIECH ŻAKOWSKI

MATEMATYKA

**DLA KANDYDATÓW
NA WYŻSZE UCZELNIE TECHNICZNE**

CZĘŚĆ I

WYDANIE PIĘTNASTE



**WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE
WARSZAWA 1989**

Opiniodawca doc. dr Mieczysław Czyżykowski
Redaktor naukowy doc. dr hab. Tadeusz Stanisławski
Redaktor techniczny Jacek Dubiel
Redaktor WNT mgr Małgorzata Rajwacka-Jachymek

53(022)

Książka zawiera zwięzły wykład algebry i elementów analizy matematycznej poparty licznymi przykładami oraz zadaniami do samodzielnego rozwiązania.

Książka jest przeznaczona dla osób pragnących powtórzyć matematykę w zakresie szkoły średniej bądź też uzupełnić i utrwalić posiadane wiadomości z tego zakresu, głównie zaś dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne.

Książka jest zalecana do uczniowskich i nauczycielskich bibliotek techników i liceów.

1965 — wydanie pierwsze

1970 — wydanie szóste zmienione

© Copyright by Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
Warszawa 1965–1989
All rights reserved
Printed in Poland

ISBN 83-204-1027-4 całość
ISBN 83-204-1028-2 cz. I

SPIS TREŚCI

Od Autorów	5
Rozdział I. Logika matematyczna	7
1. Wartość logiczna zdania	7
2. Zaprzeczenie zdania	8
3. Koniunkcja zdań	10
4. Alternatywa zdań	11
5. Implikacja (wynikanie)	14
6. Warunek konieczny. Warunek wystarczający	17
7. Równoważność zdań	18
8. Forma zdaniowa	20
9. Kwantyfikatory	21
10. Dedukcyjna struktura matematyki	24
Rozdział II. Zbiory	28
11. Pojęcie zbioru	28
12. Działania na zbiorach	30
13. Rachunek zbiorów i rachunek zdań	32
14. Odwzorowanie zbioru (funkcja)	35
15** Uporządkowanie zbioru	37
Rozdział III. Liczby rzeczywiste	39
16. Relacje. Działania	39
17. Liczby całkowite	47
18. Liczby wymierne	49
19. Liczby niewymierne	57
20. Zbiór liczb rzeczywistych	65
21**. Grupa. Pierścień. Ciało	68
Rozdział IV. Funkcje, równania i nierówności	71
22. Funkcje jednej zmiennej	71
23. Właściwości funkcji	78
24. Równania i nierówności	85
25. Funkcja, równanie i nierówność liniowa	89
26. Równanie lub nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi	100
27. Układ równań pierwszego stopnia	102
28. Nierówności z wielu zmiennymi	113
Rozdział V. Funkcja kwadratowa	118
29. Funkcja drugiego stopnia	118
30. Ekstremum trójmianu kwadratowego	125
31. Równanie kwadratowe	128
32. Zastosowanie równań kwadratowych	136
33. Nierówności kwadratowe	142

34. Układ dwóch równań pierwszego lub drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi . . .	148
Rozdział VI. Wielomiany i funkcje wymierne . . .	157
35. Wielomian jednej zmiennej . . .	157
36. Równania algebraiczne . . .	166
37. Nierówności algebraiczne . . .	173
38. Wielomian wielu zmiennych . . .	178
39. Układy równań algebraicznych . . .	181
40. Funkcje wymierne . . .	188
Rozdział VII. Ciągi liczbowe . . .	192
41. Pojęcie ciągu . . .	192
42. Indukcja matematyczna . . .	195
43. Permutacje . . .	198
44. Kombinacje . . .	200
45. Wzór dwumianowy Newtona . . .	204
46. Ciąg arytmetyczny . . .	205
47. Ciąg geometryczny . . .	211
48. Granica ciągu nieskończonego . . .	216
49. Szereg geometryczny . . .	221
Rozdział VIII. Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna . . .	229
50. Potęga o wykładniku rzeczywistym . . .	229
51. Funkcja potęgowa . . .	233
52. Funkcja wykładnicza . . .	235
53. Logarytmy . . .	239
54. Funkcja logarytmiczna . . .	243
55. Logarytmy dziesiętne . . .	248
56. Suwak logarytmiczny . . .	254
Rozdział IX. Pochodna funkcji . . .	258
57. Granica funkcji . . .	258
58. Ciągłość funkcji . . .	267
59. Pochodna funkcji . . .	270
60. Obliczanie pochodnej . . .	275
61. Pochodna funkcji złożonej . . .	278
62. Pochodna drugiego rzędu . . .	281
Rozdział X. Zastosowanie metody współrzędnych i rachunku pochodnych . . .	285
63. Wzrastanie lub zmniejszanie się wartości funkcji . . .	285
64. Ekstremum funkcji w punkcie . . .	288
65. Badanie funkcji . . .	293
66. Znajdowanie największej lub najmniejszej wartości funkcji w przedziale . . .	295
67. Interpolacja liniowa . . .	301
68. Przybliżone rozwiązywanie równań . . .	302
69. Całka nieoznaczona . . .	305
70. Całka oznaczona . . .	310
Tablica: mantysy logarytmów . . .	316
Skorowidz . . .	318

OD AUTORÓW

Książka ta powstała na skutek dużego zapotrzebowania na podręcznik, który by w zwięzłej formie streszczał matematykę wykładaną w szkole średniej, oddając usługi osobom pragnącym bądź poznać matematykę elementarną, bądź powtórzyć i utrwalić wiadomości uprzednio nabyte. Dotyczy to w szczególności kandydatów na wyższe uczelnie techniczne.

Pierwsze wydanie tej książki ukazało się w 1965 r. Wydanie obecne jest dostosowane do nowego programu matematyki w szkołach średnich. Książka obejmuje cały materiał, który może być wymagany od kandydatów na wyższe uczelnie techniczne.

Autorzy wyrażają serdeczne podziękowanie panu dr Wiesławowi Szlenkowi i panu dr Maciejowi Bryńskiemu za pomoc w wyborze aksjomatyki i układu twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa i stereometrii, a panu mgr Januszowi Zacharskiemu za współpracę przy redagowaniu rozdziału „Rachunek prawdopodobieństwa”.

Autorzy dziękują także panu dr Tadeuszowi Stanisłowi za cenne uwagi, które zostały wykorzystane przy opracowaniu wydania XII.

Postępując się tą książką, Czytelnik powinien wykazywać aktywność, tzn. mieć pod ręką brulion i w nim pisać, rysować, rachować, jednym słowem wykonywać wszystkie czynności związane z danym tekstem. Tekst należy czytać krytycznie, tj. zadawać sobie pytanie: dlaczego tak jest, skąd to wynika itp. Nadto, należy samodzielnie rozwiązać znaczną liczbę zadań. Zadania wyróżnione gwiazdką odpowiadają poziomowi wymagań przy egzaminach wstępnych; zadania oznaczone dwiema gwiazdkami wykraczają nieco ponad ten poziom.

Ze względów technicznych książka jest wydawana w dwóch częściach, z których pierwsza zawiera algebrę i elementy analizy matematycznej, zaś druga planimetrię, stereometrię, trygonometrię, geometrię analityczną i rachunek prawdopodobieństwa.

ROMAN LEITNER
WOJCIECH ŻAKOWSKI

Warszawa, czerwiec 1976 r.

Rozdział I

LOGIKA MATEMATYCZNA

1. Wartość logiczna zdania

Przedmiotem logiki są związki między zdaniami.

Zdaniem nazywamy w logice wypowiedź orzekającą, której można przypisać (w ramach danej nauki) jedną z dwóch ocen: ocenę *prawdy* albo ocenę *falszu*. Prawdziwość i fałszywość nazywamy *wartościami logicznymi* zdania. Prawdę oznaczamy cyfrą 1, a fałsz cyfrą 0.

Na przykład zdanie

7 jest liczbą pierwszą

jest w arytmetyce zdaniem prawdziwym, więc przypisujemy mu wartość 1, natomiast zdanie

7 jest liczbą parzystą

jest w arytmetyce zdaniem fałszywym, więc przypisujemy mu wartość 0.

Nie każde zdanie gramatyczne może być zdaniem w logice. Na przykład zdanie

Czy 7 jest liczbą parzystą?

nie jest zdaniem orzekającym i nie można mu przypisać żadnej wartości logicznej.
Zdanie

7 jest liczbą szczęśliwą

jest wprowadzicie zdaniem orzekającym, ale w ramach arytmetyki – bezsensownym (ani prawdziwym, ani fałszywym).

Logika nie ustala wartości logicznych pojedynczych zdań. Czyni to odpowiednia nauka, przy czym to samo zdanie może być prawdziwe w jednej nauce, a fałszywe lub bezsensowne w innej nauce; na przykład zdanie

istnieje iloraz 8 przez 3

jest fałszywe w arytmetyce liczb całkowitych, prawdziwe w arytmetyce liczb wymiernych, a bezsensowne w botanice.

Logika ustala wartość logiczną zdań złożonych na podstawie ustalonych uprzednio wartości logicznych zdań składowych. Na przykład z prawdziwości zdań

7 jest liczbą pierwszą
 7 jest liczbą nieparzystą
 wynika dzięki logice prawdziwość zdania
 7 jest liczbą pierwszą i nieparzystą.

Pytania

1. Co to jest zdanie w logice?
2. Podać przykład zdania gramatycznego, które nie jest zdaniem w logice.
3. Ocenic (w ramach matematyki) wartość logiczną zdania
 - a) 121 jest liczbą pierwszą
 - b) 361 jest kwadratem liczby naturalnej
 - c) każdy trójkąt równoramienny jest prostokątny
 - d) istnieje równoramienny trójkąt prostokątny
 - e) romb jest figurą brzydką
 - f) podzielić 6 przez 3!
 - g) kwadrat każdej liczby ujemnej jest dodatni
 - h) istnieje liczba ujemna, której kwadrat jest dodatni
 - i) czy kwadrat jest prostokątem?

2. Zaprzeczenie zdania

Zdania oznaczamy w logice małymi literami alfabetu.

Definicja. Zdanie

nieprawda, że p (2.1)

nazywamy *zaprzeczeniem (negacją)* zdania p i zapisujemy

$\sim p$

(znak $\sim$ czytamy: *nieprawda, że ...*, lub krótko: *nie*).

Na przykład jeżeli p oznacza zdanie

3 jest liczbą parzystą

to $\sim p$ oznacza zdanie

nieprawda, że 3 jest liczbą parzystą

W tym przykładzie zdanie p jest fałszywe, czyli ma wartość logiczną 0 (można pisać $p = 0$), zaś zdanie $\sim p$ jest prawdziwe ($p = 1$).

Dwa zdania: p oraz $\sim p$ nazywamy *sprzecznymi*.

Negację charakteryzuje (tzn. określa jej sens w logice) tabl. 2-1: jeżeli zdanie p jest prawdziwe to $\sim p$ jest fałszywe, a jeżeli p jest fałszywe to $\sim p$ jest prawdziwe.

Stąd wynikają następujące prawa logiki:

Prawo sprzeczności: z dwóch zdań: p oraz $\sim p$ co najmniej jedno jest fałszywe.

Prawo sprzeczności orzeka, że dwa zdania spreczne nie mogą być jednocześnie prawdziwe, tzn.

nieprawda, że p i nie p

Prawo wyłączonego środka: z dwóch zdań: p oraz $\sim p$ co najmniej jedno jest prawdziwe.

To prawo orzeka, że dwa zdania sprzeczne nie mogą być jednocześnie fałszywe. tzn.

p lub nie p

Tabl. 2-1
NEGACJA

p	$\sim p$
0	1
1	0

Zauważmy, że dwa przypadki

p jest zdaniem prawdziwym

oraz

$\sim p$ jest zdaniem prawdziwym

wyczerpują wszystkie możliwości. Stąd też wywodzi się łacińska nazwa prawa wyłączonego środka: *tertium non datur* (trzeciej możliwości nie ma).

Wniosek: z dwóch zdań: p oraz $\sim p$ jedno jest prawdziwe, natomiast pozostałe jest fałszywe.

Uwaga. W mowie potocznej nazywa się *sprzeczными* takie dwa zdania, które nie mogą być jednocześnie prawdziwe, np:

kąt prosty jest mniejszy od 90° (2.2)

oraz

kąt prosty jest większy od 90° (2.3)

Zdania sprzeczne w znaczeniu przyjętym w logice: p oraz $\sim p$ są sprzeczne w potocznym tego słowa znaczeniu (na podstawie prawa sprzeczności), ale nie na odwrót. Na przykład zdanie (2.3) nie jest zaprzeczeniem zdania (2.2), więc te dwa zdania nie są sprzeczne w znaczeniu przyjętym w logice. Spośród dwóch zdań sprzecznych w potocznym tego słowa znaczeniu co najmniej jedno jest fałszywe, może się jednak zdarzyć, że oba są fałszywe, ponieważ treść takich dwóch zdań może nie wyczerpywać wszystkich możliwości. Tak jest na przykład ze zdaniami (2.2) i (2.3). Są one oba fałszywe, gdyż kąt prosty nie jest ani mniejszy od 90° ani większy od 90° , lecz jest równy 90° .

Prawo podwójnego zaprzeczenia: zdania

p oraz $\sim(\sim p)$

mają tę samą wartość logiczną.

Na przykład zdanie:

istnieje najmniejsza liczba dodatnia

ma tę samą wartość logiczną (a mianowicie 0) co zdanie

nieprawda, że nieprawda, że istnieje najmniejsza liczba dodatnia.

To ostatnie zdanie można zastąpić takim

nieprawda, że nie istnieje najmniejsza liczba dodatnia.

Należy jednak mieć się na baczności, żeby doskonaląc budowę zdania nie zmienić jego wartości logicznej.

Pytania

1. Co to jest zaprzeczenie zdania? Scharakteryzować zaprzeczenie za pomocą tabelki. Co to są dwa zdania sprzeczne?
2. Podać prawo sprzeczności, prawo wyłączonego środka, oraz wynikający z nich wniosek.
3. Stwierdzono, że jedna z dwóch nierówności: $a < 2$, oraz $a > 2$, jest dla liczby a fałszywa. Czy można na tej podstawie twierdzić, że druga z tych nierówności jest prawdziwa?
4. Podać prawo podwójnego zaprzeczenia.

3. Koniunkcja zdań

Definicja. Zdanie

$$p \text{ i } q \quad (3.1)$$

nazywamy *koniunkcją* (iloczynem logicznym) zdań p , q i zapisujemy

$$p \wedge q$$

(znak $\wedge$ czytamy: i).

Koniunkcję charakteryzuje tabl. 3-1: koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa, gdy te oba zdania są prawdziwe, zaś fałszywa — w pozostałych przypadkach.

Tabl. 3-1

KONIUNKCJA

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Na przykład zdanie

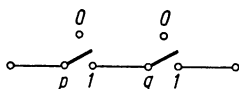
$$\left(\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right) \wedge (\sin 90^\circ = 1)$$

jest prawdziwe, natomiast zdanie

$$\left(\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right) \wedge (\cos 90^\circ = 1)$$

jest fałszywe, gdyż $\cos 90^\circ = 0$.

Interpretacja fizyczna. Niech p, q oznaczają wyłączniki, z których każdy może być włączony (stan 1) albo wyłączony (stan 0). W stanie „1” wyłącznik przewodzi prąd, natomiast w stanie „0” wyłącznik nie przewodzi prądu (rys. 3-1). Stan układu



Rys. 3-1

utworzonego przez połączenie szeregowe wyłączników p, q zależy od stanu wyłącznika p i od stanu wyłącznika q tak, jak wartość logiczna koniunkcji $p \wedge q$ zależy od wartości logicznych zdań p, q . W związku z tym mówimy krótko, że

koniunkcję realizuje połączenie szeregowe.

Pytania

1. Co to jest koniunkcja dwóch zdań? Scharakteryzować koniunkcję za pomocą tabelki.
2. Podać przykład czterech koniunkcji, które odpowiadają czterem przypadkom w tabl. 3-1.
3. Wyjaśnić interpretację fizyczną koniunkcji.

4. Alternatywa zdań

Definicja. Zdanie

$$p \text{ lub } q \tag{4.1}$$

nazywamy *alternatywą (sumą logiczną)* zdań p, q i zapisujemy

$$p \vee q$$

(znak $\vee$ czytamy *lub*).

Alternatywę charakteryzuje tabl. 4-1: alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa, gdy co najmniej jedno z tych dwóch zdań jest prawdziwe, zaś fałszywa – gdy oba zdania są fałszywe.

Na przykład zdanie

$$\left(\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right) \vee (\cos 90^\circ = 1)$$

jest prawdziwe, gdyż $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, natomiast zdanie

$$\left(\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

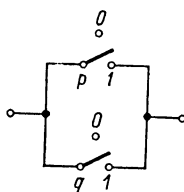
jest fałszywe.

Tabl. 4-1

ALTERNATYWA

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Interpretacja fizyczna alternatywy jest przedstawiona na rys. 4-1. Stan układu utworzonego przez połączenie równoległe wyłączników p i q zależy od stanu wyłącznika p i od stanu wyłącznika q tak, jak wartość logiczna alternatywy $p \vee q$ zależy od wartości logicznych zdań p oraz q . W związku z tym mówimy krótko, że alternatywę realizuje połączenie równoległe.



Rys. 4-1

Uwaga. Alternatywę zdań zbudowaną za pomocą spójnika lub (symbol $\vee$) należy odróżniać od tzw. alternatywy *wykluczającej*, zbudowanej za pomocą spójnika albo (symbol $\underline{\vee}$). Zdanie p albo q jest prawdziwe, gdy jedno ze zdań p , q jest prawdziwe, a drugie fałszywe, zaś fałszywe — gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną.

Na przykład

8 jest liczbą parzystą albo nieparzystą

jest zdaniem prawdziwym, natomiast zdanie

8 jest podzielne przez 2 albo przez 4

jest fałszywe.

Zaprzeczenie koniunkcji. Zdanie

nieprawda, że p i q

ma tę samą wartość logiczną co zdanie

nieprawda, że p lub nieprawda, że q

(patrz tabl. 4-2). Na przykład zdanie

$$\text{nieprawda, że } \cos 0^\circ = 0 \quad \text{i} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Tabl. 4-2

$\sim(p \wedge q)$	$p \wedge q$	p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0

ma tę samą wartość logiczną co zdanie

$$\text{nieprawda, że } \cos 0^\circ = 0 \text{ lub nieprawda, że } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

czyli

$$\cos 0^\circ \neq 0 \quad \text{lub} \quad \cos 60^\circ \neq \frac{1}{2}$$

Oba te zdania są prawdziwe.

Dwa zdania mające tę samą wartość logiczną nazywamy *równoważnymi*.

Zaprzeczenie koniunkcji dwóch zdań

$$\sim(p \wedge q) \tag{4.2}$$

jest więc równoważne alternatywie zaprzeczeń tych zdań

$$(\sim p) \vee (\sim q) \tag{4.3}$$

Jest to pierwsze *prawo de Morgana*.

Uwaga. Równoważność zdań (4.2) i (4.3) ustaliliśmy rozpatrując wszystkie możliwe układy wartości logicznych zdań p , q , (por. tabl. 4-2), a mianowicie:

$$p = 0, q = 0 \quad p = 0, q = 1 \quad p = 1, q = 0 \quad p = 1, q = 1$$

Ta metoda dowodzenia równoważności zdań nazywa się *metodą zero-jedynkową*.

Zaprzeczenie alternatywy. Zdanie

nieprawda, że p lub q

ma tę samą wartość logiczną co zdanie

nieprawda, że p i nieprawda, że q

Sprawdzenie tego metodą zero-jedynkową pozostawiamy Czytelnikowi.

Na przykład zdanie

$$\text{nieprawda, że } \cos 0^\circ = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 0^\circ = \frac{1}{2}$$

ma tę samą wartość logiczną co zdanie

$$\text{nieprawda, że } \cos 0^\circ = 0 \text{ i nieprawda, że } \cos 0^\circ = \frac{1}{2}$$

czyli

$$\cos 0^\circ \neq 0 \quad \text{i} \quad \cos 0^\circ \neq \frac{1}{2}$$

Oba te zdania są prawdziwe.

Zaprzeczenie alternatywy dwóch zdań

$$\sim(p \vee q) \quad (4.4)$$

jest więc równoważne koniunkcji zaprzeczeń tych zdań

$$(\sim p) \wedge (\sim q) \quad (4.5)$$

Jest to drugie *prawo de Morgana*.

Pytania i zadania

1. Co to jest alternatywa dwóch zdań? Scharakteryzować alternatywę za pomocą tabelki.
2. Podać przykład czterech alternatyw, które odpowiadają czterem przypadkom w tabl. 4-1.
3. Wyjaśnić interpretację fizyczną alternatywy.
4. Zanotować a) prawo sprzeczności, b) prawo wyłączonego środka, za pomocą symbolów: $\sim$, $\vee$ oraz $\wedge$.
5. Korzystając z interpretacji fizycznej koniunkcji oraz alternatywy, podać interpretację fizyczną prawa sprzeczności oraz prawa wyłączonego środka.
6. Co to są prawa de Morgana? Podać interpretację fizyczną.
7. Zapis $a \leq b$ oznacza, że $(a < b) \vee (a = b)$. Wyjaśnić dlaczego zdania $1 \leq 1$ oraz $1 \leq 2$ są prawdziwe, zaś zdanie $1 \leq 0$ jest fałszywe.
8. Na czym polega metoda zero-jedynkowa? Sprawdzić za pomocą tej metody, że zdanie (4.4) ma tę samą wartość logiczną co zdanie (4.5), bez względu na wartości logiczne zdań p , q .

5. Implikacja (wynikanie)

Definicja. Zdanie

$$\text{jeżeli } p, \text{ to } q \quad (5.1)$$

nazywamy *implikacją (wynikaniem)* o poprzedniku p oraz następniku q i zapisujemy

$$p \Rightarrow q \quad (5.2)$$

(znak $\Rightarrow$ czytamy: *implikuje* lub *z ... wynika ...*).

Implikację charakteryzuje tabl. 5-1. Implikacja jest prawdziwa w każdym przypadku z wyjątkiem jednego: gdy poprzednik jest prawdziwy i następnik jest fałszywy.

Tabl. 5-1
IMPLIKACJA

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

W mowie potocznej nie używamy słowa *wynika* w tak szerokim znaczeniu, jak to określa tabl. 5-1. Na przykład nie ma potrzeby mówić o wynikaniu w przypadku, gdy poprzednik i następnik są fałszywe. W matematyce natomiast słowo *wynika* używane jest w takim właśnie szerokim znaczeniu. Wyjaśnimy to na przykładzie. Rozważmy zdanie

$$\text{jeżeli } \underbrace{n \text{ jest podzielne przez } 4}_p, \text{ to } \underbrace{n \text{ jest podzielne przez } 2}_q \quad (5.3)$$

Zdanie (5.3) ma postać implikacji $p \Rightarrow q$; jest ona w ramach arytmetyki prawdziwa, gdyż każda liczba naturalna n , która dzieli się przez 4, dzieli się także przez 2. W związku z tym mówimy, że zdanie q wynika ze zdania p . Nie robimy przy tym żadnych zastrzeżeń co do liczby naturalnej n , co jest równoznaczne z uznaniem wynikania (5.3) za prawdziwe dla każdego naturalnego n . Zauważmy, że dla $n = 6$ zdanie p jest fałszywe i zdanie q jest prawdziwe, dla $n = 7$ oba te zdania są fałszywe, zaś dla $n = 8$ oba zdania są prawdziwe. Wykluczony jest tu tylko jeden przypadek: gdy poprzednik p jest prawdziwy i następnik q jest fałszywy (por. tabl. 5-1). *Wynikanie* ma więc w matematyce to samo znaczenie, co *implikacja*.

Streszczając określenie implikacji (wynikania) powiemy, że

z prawdy wynika tylko prawda

oraz

z fałszu może wynikać zarówno prawda jak i fałsz

Uwaga. Ponieważ każde twierdzenie matematyczne można wypowiedzieć w postaci implikacji według schematu

jeżeli ZAŁOŻENIE, to TEZA

więc należy pamiętać, że spełnienie założeń (prawdziwość poprzednika) zapewnia prawdziwość tezy, jeżeli natomiast założenia nie są spełnione (fałszywość poprzednika), to może się zdarzyć, że teza jest prawdziwa i może się zdarzyć, że teza jest fałszywa.

Zaprzeczenie implikacji. Zdanie

nieprawda, że jeżeli p to q
na tę samą wartość logiczną co zdanie
 p i nie q

(por. tabl. 5-2).

Tabl. 5-2

$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow q$	p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0

Na przykład zdanie

nieprawda, że jeżeli $1 \cdot (1-1) = 2 \cdot (1-1)$ to $1 = 2$

(prawdziwe) ma tę samą wartość logiczną co zdanie

$$1 \cdot (1-1) = 2 \cdot (1-1) \text{ i } 1 \neq 2$$

Zaprzeczenie implikacji

$$\sim(p \Rightarrow q) \quad (5.4)$$

jest więc równoważne koniunkcji

$$p \wedge (\sim q) \quad (5.5)$$

Jednym z najczęściej stosowanych praw logiki, jest

Reguła odrywania. Jeżeli prawdziwe są

wynikanie $p \Rightarrow q$ oraz zdanie p

to prawdziwe jest zdanie q .

Przykład. Z arytmetyki wiadomo, że implikacja: jeżeli suma cyfr liczby naturalnej dzieli się przez 3, to ta liczba dzieli się przez 3, jest prawdziwa. Zdanie: suma cyfr liczby 723 dzieli się przez 3, jest także prawdziwe. Na podstawie reguły odrywania możemy więc stwierdzić, że liczba 723 dzieli się przez 3.

Nazwę *reguła odrywania* uzasadnia się tak: jeżeli prawdziwe są: implikacja $p \Rightarrow q$ oraz poprzednik p , to można z tego kontekstu oderwać (wyodrębnić) następnik q , nadając mu samoistny byt i przyjąć go jako zdanie prawdziwe (por. tabl. 5-1).

Prawo przechodniości implikacji. Jeżeli prawdziwe są dwie implikacje

$$p \Rightarrow q, \text{ oraz } q \Rightarrow r$$

to prawdziwa jest implikacja

$$p \Rightarrow r$$

Przykład. Ponieważ prawdziwe są dwie implikacje

$$5\alpha = 225^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ, \text{ oraz } \alpha = 45^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1,$$

więc prawdziwa jest implikacja

$$5\alpha = 225^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1$$

Zarówno reguła odrywania jak i prawo przechodniości implikacji należą do tych praw logiki, które uważamy za najzupełniej oczywiste i zrozumiałe. Dlatego w dowodach matematycznych powołujemy się wyraźnie na te prawa tylko w wyjątkowych okolicznościach. Należy jednak pamiętać, że prawa te stanowią wraz z innymi prawami logiki fundament wszelkich dowodów matematycznych.

Pytania i zadania

1. Co to jest implikacja (wynikanie)? Scharakteryzować implikację za pomocą tabelki.
2. Podać przykład czterech implikacji, które odpowiadają czterem przypadkom w tabl. 5-1.
3. Omówić zaprzeczenie a) koniunkcji, b) alternatywy, c) implikacji.
4. Ocenić (w ramach matematyki) wartość logiczną zdania

a) jeżeli $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, to $\sin 15^\circ = \frac{1}{4}$

b) jeżeli $\sin 60^\circ = 1$, to $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

c) jeżeli $1 > 2$, to $2 > 1$

/ d) jeżeli $1 > 2$, to $2 < 1$

5. Podać a) regułę odrywania, b) prawo przechodniości implikacji.
6. Udowodnić, że zdanie $p \Rightarrow q$ ma tę samą wartość logiczną co zdanie $(\sim p) \vee q$.

6. Warunek konieczny. Warunek wystarczający

Jeżeli

ze zdania p wynika zdanie q

to mówimy, że

p jest warunkiem wystarczającym dla q

natomiast

q jest warunkiem koniecznym dla p

Zamiast warunek wystarczający mówimy też warunek *dostateczny*.

Przykłady

Podzielność liczby n przez 4 jest warunkiem wystarczającym podzielności liczby n przez 2.

Podzielność liczby n przez 4 nie jest warunkiem koniecznym podzielności liczby n przez 2, o czym świadczy przykład liczby 6, która jest podzielna przez 2, lecz jest niepodzielna przez 4.

Podzielność liczby n przez 2 jest warunkiem koniecznym podzielności liczby n przez 4.

Podzielność liczby n przez 2 nie jest warunkiem wystarczającym podzielności liczby n przez 4, o czym świadczy przykład liczby 6.

Warunek konieczny oraz warunek wystarczający są to pojęcia różne. Jak zobaczyliśmy, na przykładach, warunek wystarczający dla p może nie być warunkiem koniecznym dla p

oraz

warunek konieczny dla p może nie być warunkiem wystarczającym dla p .

Może się zdarzyć, że warunek konieczny dla p jest jednocześnie warunkiem wystarczającym dla p . Mówimy wówczas, że jest to *warunek konieczny i wystarczający*.

Na przykład podzielność przez 2 i przez 5, jest warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności przez 10. Odpowiednia równość długości trzech boków jednego trójkąta trzem długościom boków drugiego trójkąta, stanowi warunek konieczny i wystarczający przystawiania tych trójkątów.

Założenia w prawdziwym twierdzeniu stanowią warunek wystarczający na to, żeby teza tego twierdzenia była prawdziwa. Założenia te mogą jednak nie stanowić warunku koniecznego. Na przykład jeżeli trójkąt jest równoboczny (założenie), to promień okręgu wpisanego jest równy $1/3$ wysokości trójkąta (teza); założenie nie jest w tym przypadku warunkiem koniecznym dla tezy, o czym świadczy przykład trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 4 (podstawa) i 3 (wysokość), który nie jest równoboczny i dla którego promień okręgu wpisanego równy jest 1, czyli $1/3$ wysokości.

Pytania

1. Co to jest a) warunek konieczny, b) warunek wystarczający, c) warunek konieczny i wystarczający?
2. Podać przykład twierdzenia, którego założenia a) stanowią warunek konieczny i wystarczający dla tezy, b) nie stanowią warunku koniecznego dla tezy.

7. Równoważność zdań

Definicja. *Równoważność zdań p i q* jest to zdanie orzekające, że zdania p i q mają tę samą wartość logiczną.

Równoważność zdań p, q oznacza prawdziwość dwóch implikacji

$$p \Rightarrow q, \text{ oraz odwrotnej do niej } q \Rightarrow p$$

(por. tabl. 5-1). Pierwszą z tych implikacji można odczytać krótko: *p tylko wtedy, gdy q* (*p* jest warunkiem wystarczającym dla *q*), zaś drugą: *p wtedy, gdy q* (*p* jest warunkiem koniecznym dla *q*). W związku z tym równoważność zdań *p* i *q* wypowiadamy tak:

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q \quad (7.1)$$

Zdanie (7.1) zapisujemy

$$p \Leftrightarrow q \quad (7.2)$$

(znak $\Leftrightarrow$ czytamy: *wtedy i tylko wtedy, gdy*). Równoważność (7.2) charakteryzuje tabl. 7-1.

Tabl. 7-1
RÓWNOWAŻNOŚĆ

<i>p</i>	<i>q</i>	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Jeżeli równoważność (7.2) jest prawdziwa, to zdania *p* oraz *q* nazywamy *zdaniami równoważnymi*.

Dwa zdania równoważne są to zatem takie dwa zdania, które mają tę samą wartość logiczną: oba są prawdziwe albo oba są fałszywe (por. str. 13).

Na przykład

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x - y < 0 \Leftrightarrow x < y$$

Za pomocą symbolu równoważności wygodnie jest zapisać wiele praw logiki.
Na przykład

Prawa de Morgana:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)] \quad (7.3)$$

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \quad (7.4)$$

Prawo podwójnego zaprzeczenia:

$$p \Leftrightarrow \sim(\sim p) \quad (7.5)$$

Prawo zaprzeczenia implikacji:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)] \quad (7.6)$$

Pytania i zadania

1. Co to jest równoważność dwóch zdań? Scharakteryzować równoważność za pomocą tabelki.
2. Co to znaczy, że dwa zdania są równoważne? Podać przykłady zdań równoważnych a następnie takich, które nie są równoważne.

3. Sprawdzić metodą zero-jedynkową prawdziwość równoważności a) (7.5),
b) (7.6), c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$, d) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.
4. Czy dwa zdania

a) $x^2 > 1$, oraz $x > 1$

b) $x^2 < 1$, oraz $x < 1$

są równoważne dla każdego rzeczywistego x ?

5. Czy dwa zdania

a) $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, oraz $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$

b) $2 \leq 3$, oraz $3 \geq 2$

c) $\sin \alpha = 1$, oraz $\cos \alpha = 0$

d) $\sin^2 \alpha = 1$, oraz $\cos \alpha = 0$

są równoważne?

8. Forma zdaniowa

Definicja. *Forma zdaniowa (funkcja zdaniowa)* z jedną zmienną, określona w dziedzinie D , jest to takie wyrażenie zawierające tę zmienną, które staje się zdaniem, gdy na miejsce zmiennej podstawimy dowolny element zbioru D .

Na przykład wyrażenie

$$x \text{ jest liczbą pierwszą} \quad (8.1)$$

jest formą zdaniową z jedną zmienną x . Dziedziną tej formy może być np. zbiór liczb naturalnych. Podstawiając do formy zdaniowej (8.1) liczbę 7 na miejsce zmiennej x , dostajemy zdanie prawdziwe, natomiast podstawiając liczbę 8 na miejsce x , dostajemy zdanie fałszywe.

Każde równanie jest formą zdaniową. Na przykład równanie

$$x^2 - 1 = 0 \quad (8.2)$$

jest formą zdaniową zmiennej x .

Każda nierówność jest formą zdaniową. Na przykład nierówność

$$z^2 - 4z < 0 \quad (8.3)$$

jest formą zdaniową zmiennej z .

Mówimy, że pewien *element spełnia formę zdaniową*, jeżeli podstawiając go do tej formy na miejsce zmiennej dostajemy zdanie prawdziwe.

Na przykład liczba 11 spełnia formę zdaniową (8.1), natomiast liczba 12 nie spełnia tej formy.

Formę zdaniową nazywamy *tożsamościową*, jeżeli spełnia ją każdy element, natomiast *sprzeczną* – jeżeli nie spełnia jej żaden element (z dziedziny tej formy).

Na przykład równanie $(x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$ oraz nierówność $(x+1)^2 > 2x$ są w dziedzinie liczb rzeczywistych tożsamościowe, zaś równanie $x^2 + 1 = 0$, oraz nierówność $x^2 + 1 < 0$ są sprzeczne.

Dwie formy zdaniowe mające wspólną dziedzinę nazywamy *równoważnymi*, gdy każdy element, który spełnia pierwszą z nich spełnia także drugą i na odwrót. Na przykład nierówności

$$-x^2 + 4x < 0, \quad \text{oraz} \quad x^2 - 4x > 0$$

są równoważne, gdyż spełnia je każda taka i tylko taka liczba, która jest ujemna lub większa od 4.

Jeżeli forma zdaniowa $p(x)$ jest równoważna formie zdaniowej $q(x)$, to piszemy

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

Na przykład

$$-x^2 + 4x < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0$$

Za pomocą spójników zdaniotwórczych ($\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) można budować formy zdaniowe złożone, np.

$$\sim (x^2 - 1 = 0), \quad x < 1 \vee x > 3$$

Rozpatruje się także formy zdaniowe z dwoma lub większą liczbą zmiennych. Na przykład

$$x + y = 3, \quad x + y < 2, \quad x^2 + y - z^3 > 2t, \quad \text{itp.}$$

Pytania i zadania

1. Co to jest forma zdaniowa z jedną zmienną? Podać przykłady i określić w każdym z nich dziedzinę.
2. Co to znaczy: element *spełnia* formę zdaniową?
3. Znaleźć taką wartość x , dla której forma zdaniowa a) $x^2 > 5 \wedge x < -2$, b) $x > 2x \vee x > 10$, c) $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$, d) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^3 = 27$ jest prawdziwa, a następnie taką, dla której ta forma jest fałszywa.
4. Co to znaczy, że forma zdaniowa jest a) tożsamościowa, b) sprzeczna? Podać przykłady.
5. Kiedy dwie formy zdaniowe są równoważne? Podać przykłady.

9. Kwantyfikatory

Spśród licznych zwrotów jakimi posługujemy się w matematyce przy formułowaniu zdań orzekających, na szczególną uwagę zasługują dwa;

$$\text{dla każdego } x \dots \quad (9.1)$$

oraz

$$\text{istnieje takie } x, \text{ że } \dots \quad (9.2)$$

Te dwa zwroty nazywamy *kwantyfikatorami*; zwrot (9.1) jest to tzw. *kwantyfikator ogólny* (albo duży), który oznaczamy symbolem

$$\bigwedge_x$$

natomiast zwrot (9.2) jest to tzw. *kwantyfikator szczegółowy* (albo mały), który oznaczamy symbolem

$$\bigvee_x$$

Jeżeli formę zdaniową z jedną zmienną poprzedzimy kwantyfikatorem odnoszącym się do tej zmiennej, to otrzymamy *zdanie* (prawdziwe albo fałszywe).

Na przykład zdanie

$$\bigwedge_x x^2 - 1 = 0$$

jest fałszywe, natomiast zdanie

$$\bigvee_x x^2 - 1 = 0$$

jest prawdziwe (w obu przypadkach zakładamy milcząco, że funkcja zdaniowa $x^2 - 1 = 0$ rozpatrywana w dziedzinie, do której należą -1 lub 1).

Kwantyfikatory ułatwiają ściśle, jednoznaczne wypowiadanie zdań. Na przykład zdanie

w trójkącie prostokątnym kwadrat długości jednego boku
równa się sumie kwadratów długości dwóch boków pozostałych
jest takim sformułowaniem twierdzenia Pitagorasa, które może budzić
różne wątpliwości, np.: czy w każdym trójkącie prostokątnym? Czy kwadrat
długości każdego boku równa się...? Można jednak uniknąć tych wątpliwości, korzystając z kwantyfikatorów:

w każdym trójkącie prostokątnym istnieje taki
bok, którego kwadrat długości równa się sumie kwadratów
długości dwóch boków pozostałych.

Wiemy, że bok o którego istnieniu mówi to zdanie jest przeciwprostokątną,
natomiast dwa pozostałe boki — to przyprostokątne. Dlatego twierdzenie
Pitagorasa wypowiadamy zazwyczaj tak:

w każdym trójkącie prostokątnym kwadrat długości
przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów
długości przyprostokątnych.

W wielu przypadkach pomijamy w wypowiedzi lub w zapisie kwantyfikator
ogólny mając na względzie prostotę sformułowania.

Na przykład zamiast

$$\bigwedge_a \bigwedge_b (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(czytamy tu: dla każdego a i dla każdego b ...) piszemy krótko

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Zaprzeczenie zdania z kwantyfikatorem. Niech $p(x)$ oznacza formę zdaniową
zmiennej x . Zdania:

$$\sim \bigwedge_x p(x) \quad (9.3)$$

oraz

$$\bigvee_x \sim p(x) \quad (9.4)$$

mają tę samą wartość logiczną. Prawdziwa jest zatem równoważność

$$\sim \bigwedge_x p(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim p(x) \quad (9.5)$$

która przedstawia sposób zaprzeczania kwantyfikatora ogólnego.

Zaprzeczeniem zdania $\bigwedge_x p(x)$ jest zdanie $\bigvee_x \sim p(x)$.

Na przykład chcąc udowodnić, że zdanie

$$\bigwedge_x x^2 - 1 = 0$$

jest fałszywe, wystarczy udowodnić prawdziwość zdania

$$\sim \bigwedge_x x^2 - 1 = 0$$

a więc zdania

$$\bigvee_x \sim (x^2 - 1 = 0) \quad \text{czyli} \quad \bigvee_x x^2 - 1 \neq 0$$

Prawdziwość tego ostatniego zdania łatwo stwierdzić przyjmując np. $x = 0$.

Zauważmy następnie, że zdania:

$$\sim \bigvee_x p(x)$$

oraz

$$\bigwedge_x \sim p(x)$$

mają tę samą wartość logiczną. Prawdziwa jest zatem równoważność

$$\sim \bigvee_x p(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim p(x) \quad (9.6)$$

która przedstawia sposób zaprzeczania kwantyfikatora szczegółowego.

Zaprzeczeniem zdania $\bigvee_x p(x)$ jest zdanie $\bigwedge_x \sim p(x)$.

Pytania i zadania

1. Co to jest a) kwantyfikator ogólny, b) kwantyfikator szczegółowy? Podać przykłady zdań z kwantyfikatorami.
2. Omówić zaprzeczenie zdania z kwantyfikatorem a) ogólnym, b) szczegółowym.
3. Które z następujących zdań są prawdziwe, a które są fałszywe

$$\text{a) } \bigwedge_x \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \text{b) } \bigwedge_x \sin 2x = 2 \sin x,$$

$$\text{c) } \bigvee_x \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \text{d) } \bigvee_x \sin 2x = 2 \sin x,$$

$$\text{e) } \sim \bigwedge_x \sqrt{x^2} = x, \quad \text{f) } \sim \bigvee_x \sqrt{x^2} = x,$$

$$\text{g) } \sim \bigwedge_x \sqrt[3]{x^3} = x, \quad \text{h) } \sim \bigvee_x \sqrt[3]{x^3} = x.$$

10. Dedukcyjna struktura matematyki

Celem matematyki jest badanie właściwości tych *pojęć abstrakcyjnych*, które powstały w związku z obserwacją *ilości i kształtu* w szerokim rozumieniu tych terminów. Są to tzw. *pojęcia matematyczne*; należą do nich np. punkt, prosta, równoległość, liczba naturalna, równość liczb i wiele innych.

Pojęcia pierwotne. Spośród pojęć matematycznych wyróżniamy takie, które uznajemy za tzw. *pojęcia pierwotne* i nie określamy ich. Wybór pojęć pierwotnych może być różnorodny i bywa uwarunkowany względami rozmaitej natury, nierzadko przeświadczeniem, że znaczenie ich jest powszechnie znane. W geometrii pojęciem pierwotnym jest np. *punkt*, w arytmetyce — *liczba naturalna*.

Definicje (określenia). Każde pojęcie matematyczne, które nie zostało zaliczone do pojęć pierwotnych musi być *określone*, czyli *zdefiniowane*. Definicja jest zdaniem, które ustala *nazwę* nowo wprowadzanego pojęcia, oraz wyjaśnia jego znaczenie za pomocą pojęć pierwotnych lub pojęć określonych poprzednio (w systematycznym wykładzie danej nauki). Na przykład zdanie

trójkątem nazywamy wielobok o trzech bokach (10.1)

jest definicją trójkąta. Zdanie to orzeka, że

1° każdy wielobok o trzech bokach nazywamy trójkątem (*ekstenzjonalność* definicji, od słowa łac. *extendere* — rozpościerać)

2° tylko wielobok o trzech bokach nazywamy trójkątem (*wylączność* definicji).

Definicję (10.1) można sformułować inaczej, np.

trójkąt jest to wielobok o trzech bokach (10.2)

lub

trójkąt jest to taki wielobok, który ma trzy boki (10.3)

Zdania (10.1), (10.2) i (10.3) uważamy za równoznaczne.

Aksjomaty. Twierdzenia. Matematykę formułuje się w *twierdzeniach*. Spośród twierdzeń wyróżniamy takie, które przyjmujemy bez dowodu. Są to tzw. *aksjomaty* (od grec. słowa *axioma* — przyjmuję za wiarygodne), zwane też niekiedy *pewnikami*. Podobnie jak wybór pojęć pierwotnych, wybór aksjomatów może być różnorodny. Treść żadnego aksjomatu nie może być sprzeczna z treścią innego aksjomatu. Na ogół staramy się o to, żeby treść aksjomatów była prosta i oczywista. Stąd wywodzi się nazwa *pewnik*.

Każde twierdzenie matematyczne, które nie zostało zaliczone do aksjomatów, musi być *udowodnione*. Dowód matematyczny opiera się na prawach logiki. Zgodność z treścią tych praw jest jedynym i ostatecznym kryterium poprawności dowodu matematycznego.

Nauka, w której przyjmuje się bez *określenia* pojęcia zwane *pierwotnymi* oraz bez *dowodu* *twierdzenia* zwane *aksjomatami*, a następnie każde pojęcie określa się i każde twierdzenie dowodzi się zgodnie z prawami logiki, nazywa się nauką *aksjomatycznie — dedukcyjną* (*deductio* — zwany po łacinie wyprowadzenie).

Matematyka jest nauką aksjomatycznie – dedukcyjną.

Dowody matematyczne mają różnorodną budowę.

Dowód wprost polega na tym, że uważając wszystkie *założenia* (poprzednik implikacji) za spełnione (prawdziwe) rozumiemy dotąd, aż dojdziemy do wniosku, że *teza* (następnik implikacji) jest prawdziwa.

W dowodzie wprost korzystamy między innymi z reguły odrywania oraz z prawa przechodniości implikacji.

Dowód nie wprost polega na tym, że uważając wszystkie *założenia* za spełnione (prawdziwe) dołączamy do nich *hipotezę*, będącą zaprzeczeniem tezy. Następnie rozumiemy dotąd, aż dojdziemy do wniosku, że taka koniunkcja *założeń i hipotezy* jest bądź fałszywa sama w sobie, bądź wynika z niej zdanie fałszywe (np. zaprzeczenie aksjomatu lub twierdzenia, które zostało już udowodnione). W obu przypadkach wnosimy, że koniunkcja *założeń i hipotezy* jest *fałszywa*, a ponieważ *założenia uznaliśmy za prawdziwe*, zatem hipoteza jest *fałszywa*. *Zaprzeczenie tezy* jest więc zdaniem *fałszywym*, a zatem *teza jest prawdziwa*.

Dowód nie wprost przeprowadzamy często w ten sposób, że z koniunkcji $p \wedge (\sim q)$ założenia p i zaprzeczenia tezy $\sim q$ wyprowadzamy zaprzeczenie założenia, czyli stwierdzamy prawdziwość zdania $(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$. Następnie korzystamy z równoważności

$$[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

(por. zad. 3d. str 20), na podstawie której wnosimy o prawdziwości implikacji $p \Rightarrow q$. Ponieważ poprzednikiem tej implikacji jest założenie p , które uznaliśmy za prawdziwe, więc następnik q jest także prawdziwy.

Kontrapozycja twierdzenia. Rozważymy twierdzenie w postaci implikacji

$$Z \Rightarrow T \quad (10.4)$$

które nazwiemy prostym, gdyż stanowi ono dla nas punkt wyjścia.

Twierdzenie

$$T \Rightarrow Z \quad (10.5)$$

nazywamy odwrotnym do twierdzenia (10.4), twierdzenie

$$\sim Z \Rightarrow \sim T \quad (10.6)$$

nazywamy przeciwnym do (10.4), natomiast twierdzenie

$$\sim T \Rightarrow \sim Z \quad (10.7)$$

nazywamy twierdzeniem przeciwstawnym do (10.4), albo kontrapozycją tego twierdzenia. Metodą zero-jedynkową nietrudno sprawdzić, że twierdzenia

proste i przeciwstawne

mają zawsze tę samą wartość logiczną, podobnie jak twierdzenia

odwrotne i przeciwnie

Dowód twierdzenia (10.4) można więc zastąpić dowodem kontrapozycji (10.7) tego twierdzenia, z czego często korzystamy w praktyce.

Zwracamy uwagę, że twierdzenie *proste* może mieć inną wartość logiczną niż twierdzenie *odwrotne* do niego.

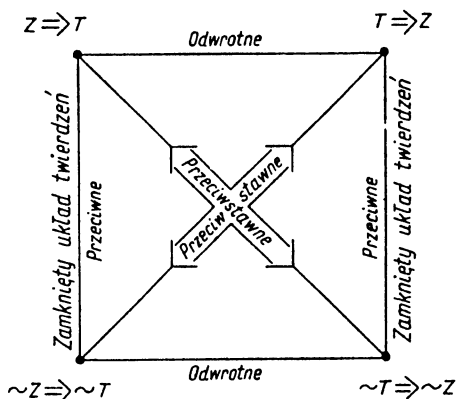
Kwadrat logiczny. Fakt, że implikacje: prosta (10.4) i przeciwna (10.7), oraz odpowiednio odwrotna (10.5) i przeciwna (10.6) mają tę samą wartość logiczną, czyli że są równoważne:

$$(Z \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\sim T \Rightarrow \sim Z) \quad (10.8)$$

oraz

$$(T \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (\sim Z \Rightarrow \sim T) \quad (10.9)$$

można przedstawić na rysunku zwanym *kwadratem logicznym* (rys. 10-1). Implikacje zaznaczone przy końcach tej samej przekątnej kwadratu są równoważne. Stąd wynika, że prawdziwość dwóch implikacji zaznaczonych na rys. 10-1 przy końcach



Rys. 10-1

jednego boku kwadratu (któregokolwiek) zapewnia prawdziwość wszystkich czterech implikacji (10.4)–(10.7). Zauważmy, że poprzedniki implikacji zaznaczonych na rys.10-1 przy końcach tego samego, umieszczonego pionowo boku (Z oraz $\sim Z$ i odpowiednio T oraz $\sim T$) wyczerpują wszystkie możliwości, zaś następni każdej z tych par implikacji wykluczają się wzajemnie. Układ implikacji mający tę właściwość nazywamy *zamkniętym układem implikacji*. Każda z dwóch par twierdzeń

$$Z \Rightarrow T \text{ i } \sim Z \Rightarrow \sim T \quad (10.10)$$

oraz

$$T \Rightarrow Z \text{ i } \sim T \Rightarrow \sim Z \quad (10.11)$$

stanowi więc *zamknięty układ twierdzeń*. Z prawdziwości wszystkich twierdzeń stanowiących układ zamknięty (twierdzeń tych może być więcej niż 2) wynika prawdziwość wszystkich twierdzeń do nich odwrotnych. W przypadku układu (10.10) oraz układu (10.11), fakt ten wynika z równoważności (10.8) i (10.9) – por. rys. 10-1

Pytania i zadania

1. Wyjaśnić znaczenie terminu a) pojęcie pierwotne, b) aksjomat, c) dedukcja.
2. Scharakteryzować pokrótce dowód a) wprost, b) nie wprost
3. Omówić związki między twierdzeniami: prostym, odwrotnym, przeciwnym i przeciwstawnym (kontrapozycja).
4. Udowodnić metodą zero-jedynkową prawdziwość równoważności
a) $(Z \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\sim T \Rightarrow \sim Z)$, b) $(T \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (\sim Z \Rightarrow \sim T)$.
5. Udowodnić metodą zero-jedynkową fałszywość równoważności
a) $(Z \Rightarrow T) \Leftrightarrow (T \Rightarrow Z)$, b) $(\sim Z \Rightarrow \sim T) \Leftrightarrow (\sim T \Rightarrow \sim Z)$.
6. Co to jest a) kwadrat logiczny, b) zamknięty układ twierzeń?

Odpowiedzi do rozdz. I

1.

3. a) 0, b) 1, c) 0, d) 1, e), f) nie ma, g) 1, h) 1, i) nie ma.

2

3. nie, gdyż liczba a może być równa 2.

4.

4. a) $\sim [p \wedge (\sim p)]$, b) $p \vee (\sim p)$.

7.

4. a), b) nie. 5. a) tak, b) tak, c) nie, d) tak.

9.

3. a), c), d) e) prawdziwe, b), f), g), h) fałszywe.

Rozdział II

ZBIORY

11. Pojęcie zbioru

Pojęcie *zbioru* zaliczamy do pojęć pierwotnych matematyki i nie określamy go. Zamiast *zbiór* mówimy też *mnogość*, a w pewnych przypadkach *rodzina* lub *przestrzeń*.

Jeżeli przedmiot *a* należy do zbioru *A*, to piszemy

$$a \in A \quad (11.1)$$

(znak $\in$ czytamy: *należy do* ...). Jeżeli $a \in A$, to mówimy, że przedmiot *a* jest *elementem* zbioru *A*.

Jeżeli przedmiot *a* nie jest elementem zbioru *A*, to piszemy $a \notin A$, (znak $\notin$ czytamy: *nie należy do* ...).

Przez *zbiór elementów mających własność W* rozumiemy zbiór wszystkich i tylko takich elementów, które mają tę własność.

Zbiór elementów *x* mających własność *W(x)* oznaczamy symbolem

$$\{x: W(x)\}$$

Przykład. Mówiąc *zbiór liczb całkowitych*, rozumiemy przez to zbiór wszystkich liczb całkowitych i tylko liczb całkowitych.

Oznaczamy przez *N* zbiór liczb *naturalnych*. Mamy wówczas

$$1 \in N, \quad 5 \in N, \quad 0 \notin N, \quad \sqrt{2} \notin N$$

Definicja. Zbiór, którego wszystkimi elementami są $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy *zbiorem skończonym* i oznaczamy $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Na przykład zbiór *Z* liczb pierwszych mniejszych od 12 ma 5 elementów, więc jest skończony:

$$Z = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

Rozszerzając pojęcie *zbioru* znane z życia codziennego, będziemy rozważać także: *zbiór jednoelementowy* (*jednostkowy*) $\{a\}$, którego jedynym elementem jest *a* np. zbiór $\{2\}$ pierwiastków równania $2x - 4 = 0$,

zbiór pusty, tj. zbiór, do którego żaden element nie należy, np. zbiór pierwiastków równania $x + 1 = x$. Zbiór pusty będziemy oznaczać symbolem $\emptyset$.

Definicja. Zbiór, który nie jest skończony ani pusty, nazywamy zbiorem *nieskończonym*.

Na przykład zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.

Definicja. Mówimy, że zbiór A jest *równy* zbiorowi B i piszemy

$$A = B \quad (11.2)$$

gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i każdy element zbioru B jest elementem zbioru A .

Dwa zbiory równe mają te same elementy.

Równość zbiorów jest w ścisłym związku z równoważnością form zdaniowych, a mianowicie równość zbiorów

$$\{x: p(x)\} = \{x: q(x)\}$$

ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy formy zdaniowe $p(x)$ oraz $q(x)$ są równoważne czyli gdy

$$\bigwedge_x p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

Definicja. Jeżeli każdy element zbioru A należy do zbioru B , to mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B i piszemy

$$A \subset B \text{ lub } B \supset A \quad (11.3)$$

(znak $\subset$ czytamy: *zawiera się w* ...)

Jeżeli $A \subset B$, to A nazywamy *podzbiorem* zbioru B , zaś B – *nadzbiorem* zbioru A .

Z definicji zawierania się zbioru w zbiorze wynika, że

$$\emptyset \subset A, \text{ oraz } A \subset A$$

Prawdziwe są następujące zdania

$$[(A \subset B) \wedge (B \subset C)] \Rightarrow (A \subset C) \quad (11.4)$$

(zawieranie się zbioru w zbiorze jest przechodnie), oraz

$$[(A \subset B) \wedge (B \subset A)] \Leftrightarrow (A = B) \quad (11.5)$$

Oznaczamy przez C zbiór liczb *całkowitych*, oraz przez R – zbiór liczb *rzeczywistych*. Mamy wówczas $N \subset C$ i $C \subset R$. Zbiór N jest podzbiorem zbioru C . Zbiór R jest nadzbiorem zbioru C .

Jeżeli zbiór A nie zawiera się w zbiorze B , to piszemy $A \not\subset B$. Na przykład $C \not\subset N$, o czym świadczy liczba 0, gdyż $0 \in C$ i $0 \notin N$.

Zawieranie się zbioru w zbiorze jest w ścisłym związku z wynikaniem (implikacją), ponieważ

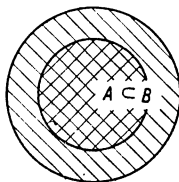
$$\{x: p(x)\} \subset \{x: q(x)\}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_x p(x) \Rightarrow q(x)$$

Na rys. 11-1 przedstawiona jest interpretacja geometryczna relacji zawierania się.

Uwaga. Relacją nazywamy każdy stosunek (związek) między przedmiotami; równość zbiorów, podzielność liczb, równoległość prostych, są to wszystko przykłady relacji.



Rys. 11-1

Pytania

1. Podać znaczenie terminów a) *element* zbioru, b) *zawieranie się* zbioru w zbiorze, c) *równość* zbiorów, d) *zbiór skończony*, e) *zbiór pusty*, f) *zbiór nieskończony*, g) *zbiór jednoelementowy*, h) *podzbiór* zbioru.
2. Wyjaśnić związek między *równością* zbiorów i *równoważnością* form zdaniowych.
3. Wyjaśnić związek między *zawieraniem się* zbioru w zbiorze i *wynikaniem*.
4. Jakie zbiory liczb oznaczamy N , C i R ?

12. Działania na zbiorach

Niech będą dane dwa zbiory: A i B .

Definicja. Zbiór przedmiotów, z których każdy należy do A i do B nazywamy *iloczynem* (częścią wspólną) zbiorów A , B i oznaczamy

$$A \cap B$$

Definicja. Zbiór przedmiotów, z których każdy należy do A lub do B nazywamy *sumą* zbiorów A , B i oznaczamy

$$A \cup B$$

Definicja. Zbiór przedmiotów, z których każdy należy do A i nie należy do B nazywamy *różnicą* zbiorów A , B i oznaczamy

$$A - B$$

Przykłady

$$A \cap A = A, A \cup A = A, N \cap C = N, N \cup C = C, N - C = \emptyset$$

$$\{1, 3, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{3, 6\}$$

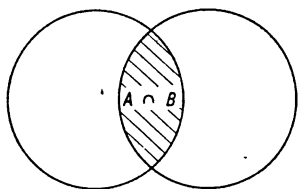
$$\{1, 3, 6, 7\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\{1, 3, 6, 7\} - \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 7\}$$

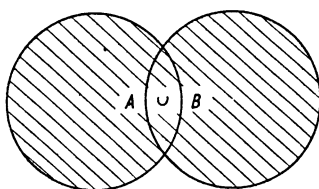
Interpretacja geometryczna iloczynu, sumy i różnicy zbiorów przedstawiona jest na rys. 12-1, 12-2 i 12-3.

Definicja. Zbiory A, B nazywamy *rozłącznymi*, jeżeli nie mają wspólnego elementu, tzn. jeżeli $A \cap B = \emptyset$.

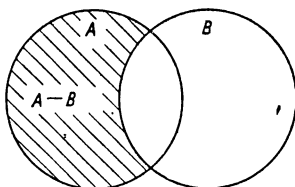
Na przykład zbiór liczb dodatnich jest rozłączny ze zbiorem liczb ujemnych.



Rys. 12-1



Rys. 12-2



Rys. 12-3

W rozważaniach naszych ograniczamy się przeważnie do zbiorów, które są podzbiorem pewnego ustalonego zbioru, zwanego w takim przypadku *przestrzenią*.

Niech zbiór A będzie podzbiorem przestrzeni U .

Definicja. *Dopełnienie* A' zbioru A (do przestrzeni U) jest to zbiór

$$U - A \quad (12.1)$$

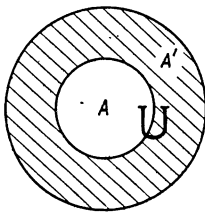
Na przykład dopełnieniem zbioru liczb ujemnych do zbioru R jest zbiór liczb nieujemnych.

Niech W oznacza zbiór liczb *wymiernych*, zaś IW – zbiór liczb *niewymiernych*. Traktując R za przestrzeń, mamy wówczas równość

$$W' = IW$$

ponieważ $W = R - IW$.

Na rys. 12-4 przedstawiona jest interpretacja geometryczna dopełnienia zbioru A do przestrzeni U .



Rys. 12-4

Iloczyn, suma, różnica i dopełnienie zbioru są w ścisłym związku z formami zdaniowymi, a mianowicie

$$\begin{aligned} \{x: p(x) \wedge q(x)\} &= \{x: p(x)\} \cap \{x: q(x)\} \\ &\text{konjunkcja} \qquad \text{iloczyn zbiorów} \\ &\text{form zdaniowych} \\ \{x: p(x) \vee q(x)\} &= \{x: p(x)\} \cup \{x: q(x)\} \\ &\text{alternatywa} \qquad \text{suma zbiorów} \\ &\text{form zdaniowych} \\ \{x: \sim [p(x) \Rightarrow q(x)]\} &= \{x: p(x)\} - \{x: q(x)\} \\ &\text{zaprzeczenie} \qquad \text{różnica zbiorów} \\ &\text{implikacji} \\ &\text{form zdaniowych} \\ \{x: \sim p(x)\} &= \{x: p(x)\}' \\ &\text{negacja} \qquad \text{dopełnienie zbioru} \\ &\text{formy zdaniowej} \end{aligned}$$

Pytania i zadania

1. Podać określenie a) iloczynu zbiorów, b) sumy zbiorów, c) rozłączności zbiorów, d) różnicy zbiorów, e) dopełnienia zbiorów.
2. Wyjaśnić związek między
 - a) iloczynem zbiorów i koniunkcją form zdaniowych,
 - b) sumą zbiorów i alternatywą form zdaniowych,
 - c) dopełnieniem zbioru i negacją formy zdaniowej.
3. Czym jest suma liczb 1, 2, 3, a czym jest suma zbiorów $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$?
4. Dane są dwa zbiory $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 6, 7\}$. Znaleźć a) $A \cup B$, b) $A - B$, c) $A \cap B$.

13. Rachunek zbiorów i rachunek zdań

Każde działanie w rachunku zbiorów ma swój odpowiednik w rachunku zdań i na odwrót. Odpowiedniości te ustalamy porównując określenia odpowiednich działań. Na przykład

sumie zbiorów odpowiada alternatywa zdań
 gdyż przedmiot a należy do sumy $A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy a należy do A lub (alternatywa!), gdy a należy do B . Tę odpowiedniość nietrudno też dostrzec na podstawie tabl. 4-1 (str. 12) określającej alternatywę. Jeżeli mianowicie traktować p i q jako symbole zbiorów, przy czym

- 0 w pierwszej kolumnie traktować jako $a \notin p$,
- 0 w drugiej kolumnie traktować jako $a \notin q$,
- 1 w pierwszej kolumnie traktować jako $a \in p$,

oraz 1 w drugiej kolumnie traktować jako $a \in q$,
 to 0 w trzeciej kolumnie oznacza, że $a \notin p \cup q$,
 natomiast 1 w trzeciej kolumnie oznacza, że $a \in p \cup q$.

Przy takiej interpretacji, tabl. 4-1 można traktować za określenie sumy zbiorów. A oto dalsze pary odpowiadających sobie działań.

iloczynowi zbiorów odpowiada koniunkcja zdań
zawieraniu się zbioru w zbiorze odpowiada implikacja zdań
dopełnieniu zbioru odpowiada negacja zdania

Dla stwierdzenia każdej z tych odpowiedniości należy postąpić tak, jak pokazaliśmy to na przykładzie sumy zbiorów i alternatywy zdań.

Fakt, że działania na zbiorach mają swoje odpowiedniki wśród działań na zdaniach, prowadzi w konsekwencji do tego, że prawom logiki, zwanym prawami rachunku zdań, odpowiadają pewne związki między zbiorami, zwane prawami rachunku zbiorów.

W tabl. 13-1 zebrano niektóre prawa rachunku zdań oraz odpowiadające im prawa rachunku zbiorów. Każde z podanych tam praw rachunku zdań można sprawdzić metodą zero-jedynkową, natomiast każde prawo rachunku zbiorów można sprawdzić na podstawie definicji odpowiednich działań i równości zbiorów.

Tabl. 13-1

RACHUNEK ZBIORÓW		RACHUNEK ZDAŃ	
nazwa prawa	treść prawa	nazwa prawa	treść prawa
przemienność dodawania	$A \cup B = B \cup A$	przemienność alternatywy	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
przemienność mnożenia	$A \cap B = B \cap A$	przemienność koniunkcji	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
łączność dodawania	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	łączność alternatywy	$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
łączność mnożenia	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	łączność koniunkcji	$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
rozdzielność mnożenia względem dodawania	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	rozdzielność koniunkcji względem alternatywy	$[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$
rozdzielność dodawania względem mnożenia	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	rozdzielność alternatywy względem koniunkcji	$[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$
prawa de Morgana	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$	prawa de Morgana	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$ $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$

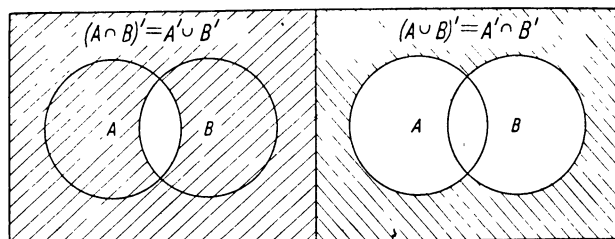
Prawa rachunku zbiorów można interpretować geometrycznie. Na rys. 13-1 podano interpretację geometryczną praw de Morgana dla zbiorów.

Zauważmy, że dzięki prawu łączności dodawania określony jest jednoznacznie symbol

$$A \cup B \cup C$$

symbol

$$A \cup B \cup C \cup D \text{ itd.}$$



Prawa de Morgana

Rys. 13-1

Analogiczne są konsekwencje prawa łączności mnożenia, dzięki któremu określone są jednoznacznie symbole

$$A \cap B \cap C, \bar{A} \cap B \cap C \cap D \text{ itd.}$$

Niektóre z praw rachunku zbiorów wydają się nam oczywiste ze względu na formalne podobieństwo do znanych praw arytmetyki. Odnosi się to do czterech kolejnych praw w tabl. 13-1. Natomiast szóste prawo rachunku zbiorów nie ma odpowiednika w arytmetyce, gdyż równość $a \cdot b + c = (a + c) \cdot (b + c)$ nie jest prawdziwa dla dowolnych liczb a , b i c .

Pytania i zadania

1. Wyjaśnić na czym polega odpowiedniość między działaniami na zbiorach i działaniami na zdaniach. Wymienić pary odpowiadających sobie działań.
2. Wyjaśnić odpowiedniość między prawami rachunku zbiorów i prawami rachunku zdań. Podać przykłady takich odpowiadających sobie praw.
3. Sprawdzić na rysunku każde z praw rachunku zbiorów umieszczonych w tabl. 13-1. Sprawdzić każde z tych praw na podstawie definicji działań na zbiorach i równości zbiorów.
4. Sprawdzić metodą zero-jedynkową prawdziwość każdego z praw rachunku zdań umieszczonych w tabl. 13-1.
5. Korzystając z interpretacji fizycznych alternatywy oraz koniunkcji, wyjaśnić interpretację fizyczną praw logiki podanych w tabl. 13-1. Wykonać odpowiednie rysunki.

6. Sprawdzić metodą zero-jedynkową prawdziwość następujących praw logiki
 - a) $(\sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, b) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$,
 - c) $(\sim p) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$.
7. Sprawdzić na podstawie definicji prawdziwość następujących praw rachunku zbiorów
 - a) $A \cap A = A$, b) $A \cup A = A$, c) $(A - B) \cap B = \emptyset$,
 - d) $A \cup (A \cap B) = A$, e) $A - B = A \cap B'$,
 - f) $A \cap (B \cup A) = A$.
 Podać interpretację geometryczną.

14. Odwzorowanie zbioru (funkcja)

Niech X i Y będą dwoma niepustymi zbiorami.

Definicja. Odwzorowanie zbioru X w zbiór Y jest to przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru X dokładnie jednego elementu ze zbioru Y .

Z definicji tej wynika, że odwzorowanie jest przyporządkowaniem *jednoznaczny* (... dokładnie jednego elementu ...). Jeżeli przy tym każdy element zbioru Y jest przyporządkowany co najmniej jednemu elementowi zbioru X , to mówimy, że zbiór X jest odwzorowany na zbiór Y .

Na przykład w barze mlecznym każdej potrawie przyporządkowana jest *dokładnie jedna* cena. Zbiorem X jest w tym przykładzie zbiór potraw, zaś zbiorem Y — zbiór cen tych potraw. Każda cena jest tu przyporządkowana co najmniej jednej potrawie. Cennik odwzorowuje zbiór potraw na zbiór cen.

Zamiast *odwzorowanie*, mówimy też *przekształcenie* lub *funkcja*.

Uwaga. Odwzorowanie zbioru X na zbiór Y nie zawsze jest możliwe. Na przykład zbioru $\{1, 2\}$ nie można odwzorować na zbiór $\{3, 4, 5\}$.

Odwzorowanie zbioru X w zbiór Y oznaczamy zwykle jedną literą, np. f, g, h , itd. Zdanie: f jest odwzorowaniem zbioru X w zbiór Y , zapisujemy

$$f: X \rightarrow Y \quad (14.1)$$

Zbiór X nazywamy *dziedzina* funkcji (odwzorowania).

Elementy dziedziny funkcji nazywamy *argumentami* tej funkcji. Element y zbioru Y , który jest przyporządkowany przez funkcję f argumentowi x zbioru X , nazywamy *wartością funkcji* f dla argumentu x , lub *obrazem* elementu x w odwzorowaniu f .

Zbiór wszystkich wartości funkcji f nazywamy *przeciwdziedzina* tej funkcji.

Na rys. 14-1 przedstawiona jest interpretacja geometryczna odwzorowania zbioru X na zbiór Y .

Zamiast y piszemy też $f(x)$, zaś zamiast (14.1) można pisać

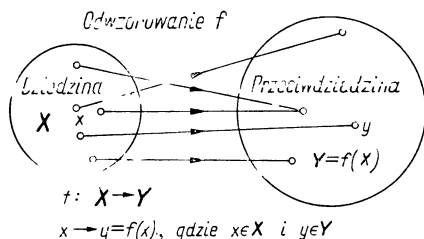
$$x \rightarrow y = f(x), \text{ gdzie } x \in X \text{ i } y \in Y$$

lub krótko

$$y = f(x), x \in X$$

Przeciwdziedzinę funkcji (14.2) oznaczamy niekiedy $f(\mathbf{X})$, (patrz rys. 14-1).

Odwzorowanie odwrotne. Rozważmy odwzorowanie (14.1). Przypuśćmy, że różnym elementom x dziedziny $\mathbf{X}$ przyporządkowane są różne elementy, y przeciwdziedziny $\mathbf{Y}$. Każdemu elementowi y zbioru $\mathbf{Y}$ można wówczas przyporządkować



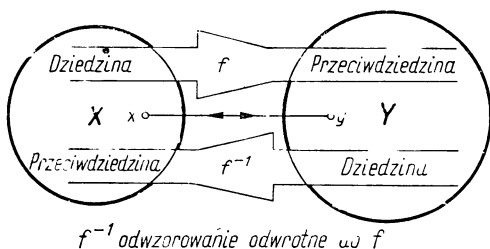
Rys. 14-1

dokładnie jeden element x zbioru $\mathbf{X}$ w ten sposób, żeby obrazem x w odwzorowaniu f było y . To nowe odwzorowanie nazywamy *odwzorowaniem odwrotnym* (*funkcją odwrotną*) do f i oznaczamy symbolem f^{-1} . Zapisujemy

$$f^{-1}: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X} \quad (14.3)$$

Odwzorowanie, dla którego istnieje odwzorowanie odwrotne nazywamy *odwracalnym* lub *wzajemnie jednoznaczny*. Nie każde odwzorowanie jest odwracalne. Powracając do przykładu z barem mlecznym łatwo jest zauważyć, że odwzorowanie zbioru potraw na zbiór cen może nie być odwracalne, ponieważ dwie potrawy mogą mieć tę samą cenę.

Dziedziną odwzorowania (14.3) jest przeciwdziedzina odwzorowania (14.1). Odwzorowanie odwrotne do f^{-1} jest odwzorowaniem f — por. rys. 14-2.



Rys. 14-2

Odwzorowanie tożsamościowe (*funkcja tożsamościowa*) jest to takie odwzorowanie zbioru $\mathbf{X}$ na ten sam zbiór $\mathbf{X}$, że

$$x \rightarrow y = x$$

Odwzorowanie tożsamościowe jest odwracalne, przy czym odwzorowanie odwrotne jest także tożsamościowe.

Nie każde odwzorowanie $X \rightarrow Y$ i odwracalne, jest tożsamościowe. Na przykład odwzorowanie zbioru liczb rzeczywistych R na zbiór R za pomocą funkcji $y = 2x$ jest odwracalne i nie jest tożsamościowe.

Pytania

1. Co to jest odwzorowanie (funkcja, przekształcenie)?
2. Podać przykłady odwzorowań z dziedziny algebry, geometrii oraz fizyki. Które z podanych odwzorowań są odwracalne?
3. Wyjaśnić znaczenie terminów a) dziedlina funkcji, b) przeciwdziedzina funkcji, c) funkcja odwrotna.
4. Podać przykład przyporządkowania, które nie jest jednoznaczne.
5. Wzór $y = 2x$ określa odwzorowanie zbioru wszystkich liczb naturalnych w zbiór wszystkich liczb parzystych. Zbadać, czy istnieje odwzorowanie odwrotne.

15**. Uporządkowanie zbioru

Niech będzie dany niepusty zbiór Z , oraz relacja r między elementami tego zbioru (por. uwaga na str. 30).

Na przykład Z może być zbiorem N liczb naturalnych, zaś relacją r między elementami tego zbioru, a więc między liczbami naturalnymi, może być relacja *mniejszości* ($<$).

Relację r nazywamy *porządkującą* zbiór Z , gdy ma następujące właściwości: jest

- 1° *spójna*, tzn. dla każdych dwóch różnych elementów x i y zbioru Z , jest $x r y$ lub $y r x$,
- 2° *antysymetryczna*, tzn. dla każdych dwóch różnych elementów x i y zbioru Z , jeżeli $x r y$ to nie $y r x$,
- 3° *przechodnia*, tzn. dla każdych trzech elementów x, y i z zbioru Z , jeżeli $x r y$ i $y r z$ to $x r z$.

Na przykład relacja *mniejszości* ($<$) jest porządkująca zbiór N , ponieważ

- 1° dla każdych dwóch różnych liczb naturalnych n i m , jest $n < m$ lub $m < n$,
- 2° dla każdych dwóch różnych liczb naturalnych n i m , jeżeli $n < m$ to nie $m < n$,
- 3° dla każdych trzech liczb naturalnych n, m i s , jeżeli $n < m$ i $m < s$ to $n < s$.

Jeżeli r jest relacją porządkującą zbiór Z , to mówimy, że można ten zbiór za pomocą relacji r uporządkować lub, że zbiór Z jest uporządkowany za pomocą relacji r .

Na przykład zbiór N jest uporządkowany za pomocą relacji *mniejszości* ($<$). Ten sam zbiór można uporządkować za pomocą relacji *większości* ($>$).

A oto inny przykład. Niech Z oznacza niepustą rodzinę kół współśrodkowych położonych na płaszczyźnie. Zbiór Z można uporządkować za pomocą relacji zawierania się ($\subset$). Sprawdzenie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi.

Pytania i zadania

1. Co to znaczy, że relacja jest a) spójna, b) antysymetryczna, c) przechodnia? Podać przykłady.
2. Co to jest relacja porządkująca? Co to jest zbiór uporządkowany?
3. Sprawdzić, że zbiór wszystkich liczb naturalnych można uporządkować za pomocą relacji a) $\leq$, b) $\geq$, natomiast nie można go uporządkować za pomocą relacji równości ($=$).

Odpowiedzi do rozdz. II

12.

3. 6; {1, 2, 3}. 4. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, $A - B = \{1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{2, 7\}$.

13.

5. Np. prawo przemienności alternatywy oznacza, że jeżeli dwa wyłączniki połączone równolegle zamienimy miejscami, to stan układu nie ulegnie zmianie.

14.

2. $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, stanowi odwzorowanie zbioru $\mathbf{R}$ na zbiór liczb nieujemnych; przesunięcie trójkąta w płaszczyźnie jest odwzorowaniem zbioru punktów tego trójkąta na zbiór obrazów tych punktów w rozpatrywanym przesunięciu; prawo Ohma $i = \frac{U}{r}$ stanowi odwzorowanie zbioru wartości napięć u na zbiór wartości natężeń prądu i . Drugie i trzecie z tych odwzorowań są odwracalne, natomiast pierwsze nie jest odwracalne, ponieważ wartości $x = -1$ i wartości $x = +1$ przyporządkowana jest taka sama wartość $y = +1$.
4. Przyporządkowanie każdej liczbie dodatniej x takiej liczby rzeczywistej y , żeby $y^2 = x$,
5. Odwzorowanie odwrotne: $x = \frac{1}{2} y$.

Rozdział III

LICZBY RZECZYWISTE

16. Relacje. Działania

W zbiorze liczb rzeczywistych określone są dwie relacje: *równość* ($=$), oraz *mniej niż* ($<$).

Prawo trychotomii. Dla każdych dwóch liczb rzeczywistych x, y zachodzi dokładnie jedno z trojga:

$$x = y \text{ albo } x < y \text{ albo } y < x$$

Zamiast $x < y$ piszemy też $y > x$.

Relacja *równości* liczb rzeczywistych jest

1° *zwrotna*: $x = x$

2° *symetryczna*: $x = y \Rightarrow y = x$

3° *przechodnia*: $[(x = y) \wedge (y = z)] \Rightarrow x = z$

Relację, która spełnia te trzy warunki, nazywamy relacją *równoważnościową*.

Relacja *mniej niż* jest

1° *spójna*: $x \neq y \Rightarrow [(x < y) \vee (y < x)]$

2° *antysymetryczna*: $x < y \Rightarrow \sim(y < x)$

3° *przechodnia*: $[(x < y) \wedge (y < z)] \Rightarrow x < z$

Relacja *mniej niż* *porządkuje* zbiór liczb rzeczywistych.

Działania arytmetyczne, są to następujące cztery działania:

$$\text{dodawanie: } \underbrace{x + y}_{\text{składniki}} = s \quad \text{suma}$$

$$\text{odejmowanie: } \underbrace{x - y}_{\substack{\text{odjemna} \quad \text{odjemnik}}} = r \quad \text{różnica}$$

$$\text{mnożenie: } \underbrace{x \cdot y}_{\substack{\text{mnożna} \quad \text{mnożnik}}} = p \quad \text{iloczyn}$$

czynniki

oraz

$$\text{dzielenie: } \underbrace{x : y}_{\substack{\text{dzielna} \quad \text{dzielnik}}} = q \quad (y \neq 0) \quad \text{iloraz}$$

Odejmowanie jest działaniem odwrotnym do dodawania:

$$x - y = r \Leftrightarrow r + y = x$$

Liczba 0 jest synonimem różnicy $x - x$.

Dla każdego x

$$x \cdot 0 = 0$$

Prawdziwe są następujące równoważności

$$\begin{aligned} a &= b \Leftrightarrow a - b = 0 \\ a < b &\Leftrightarrow a - b < 0 \\ a > b &\Leftrightarrow a - b > 0 \end{aligned} \quad (16.1)$$

Liczbę $x < 0$ nazywamy *ujemną*, zaś liczbę $x > 0$ — *dodatnią*. Różnicę $0 - x$ oznaczamy $-x$ i nazywamy liczbą *przeciwną* względem x . Mamy

$$x + (-x) = 0$$

Zamiast x piszemy też $+x$, przy czym prawdziwe są równości

$$+(+x) = +x, \quad -(+x) = -x, \quad +(-x) = -x, \quad -(-x) = +x$$

Są to tzw. *prawa znaków*.

Dzielenie jest działaniem odwrotnym do mnożenia:

$$x : y = q \Leftrightarrow q \cdot y = x$$

Uwaga. Zamiast $x : y$ piszemy też x/y lub $\frac{x}{y}$.

Liczbę $\frac{1}{x}$, ($x \neq 0$) nazywamy *odwrotnością* liczby x . Iloczyn liczby x i jej odwrotności jest równy 1

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Wynik każdego działania arytmetycznego jest określony *jednoznacznie*. W związku z tym

dzielenie przez zero jest niewykonalne

ponieważ:

jeżeli $x \neq 0$, to iloraz $x:0$ nie istnieje, gdyż żadna liczba q nie spełnia warunku $q \cdot 0 = x \neq 0$,

jeżeli $x = 0$, to iloraz $x:0$, czyli $0:0$ nie istnieje, gdyż każda liczba q spełnia warunek $q \cdot 0 = 0$, (brak jednoznaczności).

Liczbę 0 nazywamy *elementem obojętnym (modulem) dodawania*, ponieważ dla każdego x

$$x + 0 = x$$

Ponadto

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow [(x = 0) \vee (y = 0)] \quad (16.2)$$

$$x \cdot y < 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (y < 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y > 0)] \quad (16.3)$$

$$x \cdot y > 0 \Leftrightarrow [(x < 0) \wedge (y < 0)] \vee [(x > 0) \wedge (y > 0)] \quad (16.4)$$

Liczbę 1 nazywamy *elementem obojętnym (modulem) mnożenia*, ponieważ dla każdego x

$$x \cdot 1 = x$$

Działania arytmetyczne podlegają następującym prawom:

Prawo łączności dodawania

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad (16.5)$$

Prawo przemienności dodawania

$$x+y = y+x \quad (16.6)$$

Prawo łączności mnożenia

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (16.7)$$

Prawo przemienności mnożenia

$$x \cdot y = y \cdot x \quad (16.8)$$

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (16.9)$$

Z prawa (16.5) wynika, że wartość *sumy* nie zależy od porządku składników, zaś z prawa (16.7) – że wartość *iloczynu* nie zależy od porządku czynników.

Prawdziwe są następujące wzory:

$$(+x) \cdot (+y) = +x \cdot y, \quad (+x) \cdot (-y) = -x \cdot y, \quad (-x) \cdot (-y) = +x \cdot y$$

Kolejność działań arytmetycznych ustalona jest następującymi umowami:

1° Przy obliczaniu wartości wyrażeń nie zawierających nawiasów wykonujemy najpierw

mnożenia i dzielenia

w kolejności ich występowania, a następnie

dodawania i odejmowania

w kolejności ich występowania.

Na przykład

$$4 \cdot 6 : 3 - 2 + 20 : 5 \cdot 2 = 24 : 3 - 2 + 4 \cdot 2 = 8 - 2 + 8 = 6 + 8 = 14$$

Wykonanie działań w innej kolejności może dać inny wynik i właśnie dla uniknięcia tej wieloznaczności wyniku ustalono powyższą kolejność działań.

2° Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy wykonujemy najpierw działania w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych. Kształt nawiasu spełnia tu rolę pomocniczą.

Na przykład

$$\begin{aligned} & \{4 \cdot 7 - [(4 \cdot 3 + 8 : 4) - (2 \cdot 6 - 10)] \cdot 5\} + 3 \cdot (4 \cdot 7 - 26) = \\ & = \{4 \cdot 7 - [14 - 2] \cdot 5\} + 3 \cdot 2 = \{28 - 12 \cdot 5\} + 6 = -26 \end{aligned}$$

Potęgowanie. Niech n oznacza liczbę naturalną.

Definicja. Potęgę o podstawie a i wykładniku n oznaczamy symbolem a^n i określamy następująco

$$a^n = \begin{cases} a, & \text{dla } n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ czynników}}, & \text{dla } n > 1 \end{cases} \quad (16.10)$$

Na przykład

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1, \\ (-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$$

Działania na potęgach. Niech m i n oznaczają liczby naturalne. Z definicji potęgi wynikają następujące wzory:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (16.11)$$

przy mnożeniu potęg o wspólnej podstawie dodajemy wykładniki

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad \text{dla } a \neq 0 \quad \text{i} \quad m > n \quad (16.12)$$

przy dzieleniu potęg o wspólnej podstawie odejmujemy wykładniki

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (16.13)$$

przy potęgowaniu iloczynu mnożymy potęgi czynników

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{dla } b \neq 0 \quad (16.14)$$

przy potęgowaniu ilorazu dzielimy potęgę licznika przez potęgę mianownika

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (16.15)$$

przy potęgowaniu potęgi mnożymy wykładniki potęg.

Wzory (16.11) – (16.15) wyrażają treść podstawowych twierdzeń o działaniach na potęgach. Na przykład wzór (16.11) wyraża krótko treść następującego twierdzenia:

Dla każdej liczby a i dla każdych dwóch liczb naturalnych m, n , zachodzi równość

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Dowód tego twierdzenia opiera się na definicji potęgi, a mianowicie

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \text{ czynników} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ czynników} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ czynników}} = a^{m+n}$$

➤ Przykłady

$$3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7, \quad 3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3, \quad (3^5)^2 = 3^{10},$$

$$(8 \cdot 2)^3 = 8^3 \cdot 2^3, \quad \left(\frac{8}{2}\right)^3 = \frac{8^3}{2^3}.$$

Wzory skróconego mnożenia

kwadrat sumy:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
kwadrat różnicy:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
sześcian sumy:	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
sześcian różnicy:	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	(16.16)
różnica kwadratów:	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	
różnica sześciątów:	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	
suma sześciątów:	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	

Wyprowadzenie każdego z tych wzorów polega na wykonaniu odpowiedniego mnożenia. Dla przykładu wyprowadzimy wzór na kwadrat sumy

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) = \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Przykłady

$$\begin{aligned}(x+2y)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \\ 2551^2 - 2550^2 &= (2551+2550) \cdot (2551-2550) = 5101 \cdot 1 = 5101 \\ 4a^2 - 9b^2 &= (2a+3b)(2a-3b), \quad 1-x^2 = (1+x)(1-x) \\ x^3 + 8 &= (x+2)(x^2-2x+4), \quad x^4 - y^4 = (x^2+y^2)(x^2-y^2) \\ x^6 - 1 &= (x^3+1)(x^3-1) = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) = \\ &= (x^2-1)[(x^2+1)^2 - x^2]\end{aligned}$$

Przykład*. Obliczyć wartość wyrażenia

$$x = (a+b+c) \cdot \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{a+b-c}$$

$$\text{dla } a = \frac{10}{3}, \quad b = 3, \quad c = \frac{5}{3}.$$

Rozwiązanie. Ponieważ

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$$

więc

$$\begin{aligned}x &= (a+b+c) \cdot \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{a+b-c} = (a+b+c)(a-b+c) = \\ &= [(a+c)+b] \cdot [(a+c)-b] = (a+c)^2 - b^2\end{aligned}$$

Podstawiając podane wartości a , b i c , otrzymamy $x = 5^2 - 3^2 = 16$

Odp. 16.

Pierwiastkowanie. Niech $n \in \mathbf{N}$ i $a \geq 0$.

Definicja. Pierwiastek stopnia n z liczby a oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{a}$ i określamy następująco

$$\sqrt[n]{a} = p \Leftrightarrow [(p^n = a) \wedge (p \geq 0)] \quad (16.17)$$

Pierwiastek drugiego stopnia nazywamy też pierwiastkiem *kwadratowym*, natomiast pierwiastek trzeciego stopnia – pierwiastkiem *sześcinnym*. Zamiast $\sqrt[2]{a}$ piszemy $\sqrt{a}$.

Na przykład

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt[3]{64} = 4, \quad \sqrt[4]{3} = 3, \quad \sqrt[4]{0,0001} = 0,1, \text{ np.}$$

Pierwiastkowanie jest działaniem odwrotnym do potęgowania. Warunek $p \geq 0$ w definicji (16.17) zapewnia *jednoznaczność* pierwiastka. Dzięki temu warunkowi jest np. $\sqrt{4} = 2$, nie zaś $\sqrt{4} = \pm 2$. Tak określony pierwiastek nazywamy pierwiastkiem *arytmetycznym*.

Z definicji pierwiastka wynika, że dla $n \in \mathbf{N}$, $a \geq 0$ mamy

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Działania na pierwiastkach. Z określenia pierwiastka wynikają następujące wzory:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0 \quad (16.18)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0 \quad (16.19)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}, \quad \text{dla } a \geq 0 \quad (16.20)$$

oraz

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad \text{dla } a \geq 0 \quad (16.21)$$

Wzory (16.18)–(16.21) wyrażają treść podstawowych twierdzeń o działaniach na pierwiastkach. Na przykład wzór (16.18) wyraża krótko treść następującego twierdzenia:

Dla każdych dwóch nieujemnych liczb a, b

i dla każdej liczby naturalnej n , zachodzi równość

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (16.18)$$

Podamy dowód tego twierdzenia. Wykażemy, że prawa strona (16.18) jest pierwiastkiem n -tego stopnia z iloczynu ab . Mamy

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$$

a ponadto na podstawie definicji (16.17)

$$\sqrt[n]{a} \geq 0 \quad \text{ i } \quad \sqrt[n]{b} \geq 0, \quad \text{ więc } \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0 \text{ cnd.}$$

Przykłady

$$\begin{aligned} \sqrt{324} &= \sqrt{81 \cdot 4} = 9 \cdot 2 = 18 \\ \sqrt[4]{\frac{361}{196}} &= \frac{\sqrt[4]{361}}{\sqrt[4]{196}} = \frac{19}{14}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \end{aligned}$$

Przykład*. Obliczyć wartość wyrażenia

$$x = \frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$$

dla $n = 1971$.

Rozwiązanie. Oznaczając $a = n+2$, $b = \sqrt{n^2-4}$, mamy

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} = \\ &= \frac{2(n^2 + 4n + 4 + n^2 - 4)}{n^2 + 4n + 4 - (n^2 - 4)} = \frac{4n(n+2)}{4(n+2)} = n \end{aligned}$$

Odp. 1971.

Definicja. Wartość bezwzględna liczby x oznaczamy symbolem $|x|$ i określamy następująco

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases} \quad (16.22)$$

Na przykład

$$|6| = 6, \quad |0| = 0, \quad |-20| = 20$$

Z definicji (16.22) i (16.17) wynika wzór

$$|x^2| = |x|^2 \quad (16.23)$$

Wzór ten jest prawdziwy dla każdej wartości x . Natomiast wzór

$$\sqrt{x^2} = x$$

jest prawdziwy tylko dla $x \geq 0$.

Przykład

$$x + \sqrt{x^2} = \begin{cases} \text{dla } x \geq 0 & = x + |x| = x + x = 2x \\ \text{dla } x < 0 & = x + |x| = x + (-x) = x - x = 0 \end{cases}$$

Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby ujemnej. Jeżeli n jest liczbą naturalną nieparzystą, zaś a jest liczbą ujemną, to przyjmujemy określenie

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} \quad (16.23)$$

Na przykład

$$\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4, \quad \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$$

Pierwiastek parzystego stopnia z liczby ujemnej nie jest określony w dziedzinie liczb rzeczywistych.

Wykonalność działań. Historyczny rozwój pojęcia liczby szedł w kierunku roz-

szerzenia wykonalności działań. Informuje o tym tabl. 16-1, w której przyjęto następujące oznaczenia:

- N — zbiór liczb naturalnych
 C — zbiór liczb całkowitych
 W — zbiór liczb wymiernych
 R — zbiór liczb rzeczywistych
 R_+ — zbiór liczb rzeczywistych dodatnich

Między tymi zbiorami zachodzą relacje

$$N \subset C \subset W \subset R, \text{ oraz } R_+ \subset R$$

Tabl. 16-1

ZBIÓR	dodawanie	mnożenie	potęgowanie	odejmowanie	dzielenie	pierwiastkowanie
N	tak	tak	tak	nie	nie	nie
C	tak	tak	tak	tak	nie	nie
W	tak	tak	tak	tak	tak ¹⁾	nie
R	tak	tak	tak	tak	tak ¹⁾	tak ²⁾
R_+	tak	tak	tak	nie	tak	tak

¹⁾ z wyjątkiem dzielenia przez zero.

²⁾ z wyjątkiem pierwiastków stopni parzystych z liczb ujemnych.

W dalszej części tego rozdziału omówimy kolejno liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne i wreszcie — liczby rzeczywiste.

Pytania i zadania

1. Co to jest prawo trychotomii? Jakie własności ma relacja a) " $=$ ", b) " $<$ "?
2. Wymienić cztery działania arytmetyczne oraz podać ich podstawowe właściwości. Co to znaczy, że dodawanie liczb jest a) łączne, b) przemienne? Co to znaczy, że mnożenie liczb jest a) łączne, b) przemienne? Co to znaczy, że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania?
3. Podać umowę dotyczącą kolejności działań arytmetycznych.
4. Dlaczego dzielenie przez 0 jest niewykonalne?
5. Podać określenie potęgi, podstawowe wzory dotyczące działań na potęgach, oraz wzory skróconego mnożenia.
6. Udowodnić wzory (16.12) — (16.16).
7. Podać określenie pierwiastka stopnia n z liczby nieujemnej.
8. Obliczyć wartość wyrażenia

$$x = \frac{n}{48} \left[\left(\frac{n+2}{n-2} \right)^3 : \frac{n^2+4n+4}{3n^2-12n+12} \right]$$

dla $n = 32$.

9. Podać podstawowe wzory dotyczące działań na pierwiastkach.
10. Udowodnić wzory (16.19)–(16.21).
11. Podać określenie wartości bezwzględnej.
12. Kiedy równość

$$\sqrt{(a-b)^2} = a-b$$

jest prawdziwa, a kiedy fałszywa?

13. Podać określenie pierwiastka stopnia nieparzystego z liczby ujemnej.
14. Omówić wykonalność działań w zbiorach: $\mathbf{N}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{R}$ i $\mathbf{R}_+$.
15. Omówić wykonalność pierwiastkowania w zbiorze $\mathbf{R}$.
16. Jaką liczbę nazywamy a) elementem obojętnym (modułem) dodawania?, b) elementem obojętnym (modułem) mnożenia?
17. Jak zmieni się iloczyn, gdy mnożną zwiększymy ośmiokrotnie i mnożnik — zmniejszymy czterokrotnie?
18. Uprościć wyrażenie

$$\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right), \quad \text{dla } |x| < 1$$

- 19*. Do ponumerowania stron pewnej książki użyto 6289 cyfr. Ile stron ma ta książka?
- 20*. Ile razy w ciągu doby wskazówki (minutowa i godzinowa) zegarka są do siebie prostopadłe?
- 21*. Andrzej ma 16 lat, to jest dwa razy tyle, ile Jurek miał lat wtedy, kiedy Andrzej miał tyle, ile Jurek ma teraz. Ile lat ma Jurek?
22. Obliczyć

$$\text{a) } \sqrt{16 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 81}, \quad \text{b) } \sqrt{\frac{m^2}{n^2}}, n \neq 0 \quad \text{c) } \sqrt{\frac{81a^2b^4c^2}{36}},$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{x^4}, \quad \text{e) } \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[3]{2}}, \quad \text{f) } \sqrt[3]{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}},$$

$$\text{g) } \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{4}}}.$$

- 23*. Uprościć wyrażenie

$$\sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$$

17. Liczby całkowite

Podamy tu niektóre właściwości zbioru liczb *naturalnych*

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

oraz zbioru liczb *całkowitych*

$$\mathbf{C} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

W zbiorze $\mathbf{N}$ istnieje liczba najmniejsza, jest nią 1, lecz nie istnieje liczba największa. W zbiorze $\mathbf{C}$ nie ma ani liczby najmniejszej, ani największej.

Każdą liczbę naturalną można zapisać w *dziesiątkowym systemie pozycyjnym* za pomocą dziesięciu cyfr arabskich:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Podstawą tego systemu jest liczba 10. W dziesiątkowym systemie pozycyjnym każda cyfra – w zależności od miejsca (pozycji) na którym jest napisana – wyraża liczbę jednostek, setek, tysięcy, itd., np.

$$1971 = 1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 1 \cdot 1$$

Podzielność liczb całkowitych. Niech m i n oznaczają liczby całkowite, przy czym $n \neq 0$.

Liczba m jest *podzielna* przez n , gdy iloraz $m:n$ jest liczbą całkowitą. Liczbę n nazywamy w tym przypadku **podzielnikiem** liczby m .

Uwaga. Zamiast *podzielnik* używa się także terminu *dzielnik*.

W tabl. 17-1 podano niektóre warunki konieczne i wystarczające podzielności; nazywamy je *cechami podzielności*.

Tabl. 17-1

dzielnik	cecha podzielności
2	ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 albo 8
3	suma cyfr dzieli się przez 3
4	liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry dzieli się przez 4
5	ostatnią cyfrą jest 0 albo 5
6	jest podzielna przez 2 i przez 3
9	suma cyfr dzieli się przez 9

Liczby naturalne podzielne przez 2 nazywamy *parzystymi*, zaś niepodzielne przez 2 – *nieparzystymi*.

Liczbę naturalną $n \neq 1$ nie mającą innych podzielników prócz 1 i n nazywamy *liczbą pierwszą*.

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Liczbę naturalną $n \neq 1$ nie będącą liczbą pierwszą, nazywamy *liczbą złożoną*, np.

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ...

Liczby 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.

Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze polega na przedstawieniu tej liczby w postaci iloczynu liczb pierwszych, np.

224	2			1890	2
112	2	2058	2	945	5
56	2	1029	7	189	7
28	2	147	7	27	3
14	2	21	7	9	3
7	7	3	3	3	3
1		1		1	

Po prawej stronie pionowej kreski notujemy kolejne podzielniki; stąd

$$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \quad 2058 = 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3$$

$$1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Największy wspólny podzielnik (NWP) dwóch lub więcej liczb naturalnych znajdujemy następująco: rozkładamy dane liczby na czynniki pierwsze, a następnie wybieramy czynniki wspólne i mnożymy je. Otrzymany iloczyn jest właśnie NWP.

Przykład. Ponieważ $224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ i $1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, więc NWP liczb 224 i 1890 jest $2 \cdot 7$, czyli $\text{NWP} = 14$.

Najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) dwóch lub więcej liczb naturalnych znajdujemy następująco: rozkładamy dane liczby na czynniki pierwsze, a następnie wypisujemy wszystkie czynniki jednej z nich i dopisujemy do nich te czynniki z pozostałych rozkładów, których nie ma wśród wypisanych uprzednio w dostatecznej ilości. Iloczyn wybranych w ten sposób czynników jest NWW

Przykład. Znaleźć NWW liczb 12, 16 i 22.

Mamy tu: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $22 = 2 \cdot 11$

$$\text{NWW} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 528$$

Pytania i zadania

1. Co to jest *podzielnik* liczby całkowitej?
2. Wypowiedzieć cechę podzielności przez a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6, f) 9.
3. Co to jest liczba a) parzysta, b) nieparzysta, c) pierwsza, d) złożona?
4. Co to znaczy *rozłożyć* liczbę naturalną na czynniki pierwsze?
5. Rozłożyć na czynniki pierwsze liczbę
a) 576, b) 7068, c) 398, d) 12 574.

Wykonać sprawdzenie za pomocą mnożenia.

6. Co oznaczają skróty NWP, NWW? Obliczyć NWP i NWW dla dwóch liczb: 560 i 3920.

18. Liczby wymierne

Liczbę postaci

$$\frac{a}{b} \quad (18.1)$$

gdzie a i b oznaczają liczby całkowite i $b \neq 0$, nazywamy *liczbą wymierną*. Na przykład

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{6}{3} \text{ (czyli } 2), \quad \frac{0}{3} \text{ (czyli } 0), \quad \frac{-3}{2}, \quad \frac{9}{-3} \text{ (czyli } -3)$$

są to liczby wymierne.

Prawdziwe są równości

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}, \quad \text{oraz} \quad \frac{+a}{+b} = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

Ułamki zwykłe. Jeżeli a i b są liczbami naturalnymi, to iloraz (18.1) jest *ułamkiem zwykłym: właściwym*, gdy $a < b$, *niewłaściwym*, gdy $a \geq b$.

Ułamek nie zmienia swej wartości, gdy jego *licznik i mianownik* pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera:

$$\begin{array}{l} \text{rozszerzanie} \\ \text{ułamka} \end{array} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (18.2)$$

($c \neq 0$)

$$\begin{array}{l} \text{skracanie} \\ \text{ułamka} \end{array} \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (18.3)$$

Ułamki dodajemy (odejmujemy) sprowadzając do wspólnego mianownika:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d} \quad (18.4)$$

zaś mnożymy i dzielimy następująco:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (18.5)$$

Przykład

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) &= \frac{12}{35} + \frac{2}{5} : \frac{1}{12} = \frac{12}{35} + \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{1} = \frac{12}{35} + \frac{24}{5} = \\ &= \frac{12 + 24 \cdot 7}{35} = \frac{180}{35} = \frac{36}{7} \end{aligned}$$

Przykład*. Obliczyć wartość wyrażenia

$$W = \underbrace{\frac{1 + \frac{1}{a+x}}{1 - \frac{1}{a+x}}}_A \cdot \underbrace{\left[1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax} \right]}_B, \quad (a \neq 0, \quad a \neq 1)$$

$$\text{dla } x = \frac{1}{a-1}.$$

Rozwiązanie. Przykład rozwiążemy w kilku etapach, żeby uniknąć uciążliwego przepisywania całego wyrażenia W . Wprowadzamy oznaczenia pomocnicze A i B . Ponieważ

$$1 + \frac{1}{a+x} = \frac{a+x+1}{a+x}, \quad \text{oraz} \quad 1 - \frac{1}{a+x} = \frac{a+x-1}{a+x}$$

więc

$$A = \frac{a+x+1}{a+x} \cdot \frac{a+x}{a+x-1} = \frac{a+x+1}{a+x-1}$$

Następnie obliczamy B

$$B = \frac{2ax-1+a^2+x^2}{2ax} = \frac{(a+x)^2-1}{2ax} = \frac{(a+x+1)(a+x-1)}{2ax}$$

Stąd

$$W = A \cdot B = \frac{a+x+1}{a+x-1} \cdot \frac{(a+x+1)(a+x-1)}{2ax} = \frac{(a+x+1)^2}{2ax}$$

Podstawiając $x = \frac{1}{a-1}$ mamy następnie

$$a+x+1 = a + \frac{1}{a-1} + 1 = \frac{a^2}{a-1}, \quad \text{oraz} \quad 2ax = \frac{2a}{a-1}$$

więc ostatecznie

$$W = \left(\frac{a^2}{a-1} \right)^2 \cdot \frac{a-1}{2a} = \frac{a^4 \cdot (a-1)}{(a-1)^2 \cdot 2a} = \frac{a^3}{2(a-1)}$$

$$\text{Odp. } \frac{a^3}{2(a-1)}.$$

Ułamki dziesiętne. Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, ..., zapisujemy w dziesiętkowym systemie pozycyjnym oddzielając przecinkiem część całkowitą i pisząc za przecinkiem cyfry wskazujące liczby części 10-tych, 100-nych, 1000-nych, ..., itd.

Na przykład

$$\frac{3}{10} = 0,3; \quad \frac{179}{1000} = 0,179; \quad \frac{2567}{100} = 25,67$$

Ten zapis zwany rozwinięciem dziesiętnym ułamka, ma następujący schemat

$$\dots ABC, DEF \dots = \dots + \underbrace{A \cdot 100 + B \cdot 10 + C \cdot 1}_{\text{część całkowita}} + \underbrace{\frac{D}{10} + \frac{E}{100} + \frac{F}{1000}}_{\text{część ułamkowa}} + \dots$$

przy czym litery ..., A , B , C , D , E , F , ... oznaczają cyfry arabskie (niekoniecznie różne). W ten sposób można zapisać każdy ułamek, dzieląc licznik przez mianownik według znanego algorytmu. Zapisaną w ten sposób liczbę nazywamy *liczbą dziesiętną* lub *ułamkiem dziesiętnym*. Mówimy też, że dany ułamek został zapisany w systemie dziesiętkowym, lub krótko, że zamieniliśmy ułamek zwykły na ułamek dziesiętny.

Przykład. Zamienić ułamki $\frac{193}{8}$ i $\frac{12}{99}$ na ułamki dziesiętne.

Rozwiązanie

$$193:8 = 24,125$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 33 \\ 32 \\ \hline 10 \\ 8 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$12,0:99 = 0,1212...$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \hline 210 \\ 198 \\ \hline 120 \\ 99 \\ \hline 210 \\ 198 \\ \hline 12 \end{array}$$

W pierwszym przypadku otrzymaliśmy *ułamek dziesiętny skończony*. W drugim przypadku otrzymywane reszty wynoszą na przemian 21 i 12, a więc kolejne cyfry za przecinkiem w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{12}{99}$ będą się powtarzać. W takim przypadku mówimy, że *ułamek dziesiętny jest nieskończony*. Ułamek dziesiętny 0,1212... jest *ułamkiem okresowym*, ponieważ zespół cyfr 12 powtarza się w nim. Ułamek taki zapisujemy ujmując w nawias powtarzający się zespół cyfr, zwany *okresem ułamka*. Mamy więc

$$\frac{12}{99} = 0,(12)$$

Przykłady

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots = 0,(3) \quad \frac{4}{11} = 0,3636 \dots = 0,(36)$$

$$\frac{9}{7} = 1,285714285714 \dots = 1,(285714) \quad \frac{7}{60} = 0,1166 \dots = 0,11(6)$$

Uwaga. Każdy ułamek dziesiętny *skończony* możemy traktować jako ułamek *nieskończony* o okresie 0. Na przykład

$$24,125 = 24,12500\dots = 24,125(0)$$

Każdy ułamek ma okresowe lub skończone rozwinięcie dziesiętne. Istotnie, podczas dzielenia a przez b dostajemy reszty, z których każda jest mniejsza od b . Może być zatem co najwyżej $b-1$ różnych reszt (różnych od 0), a więc najpóźniej za b -tym razem dostaniemy taką resztę, jaką otrzymaliśmy już poprzednio. Od tej chwili cyfry w rozwiązaniu dziesiętnym zaczną się powtarzać, a zatem rozwinięcie jest okresowe. Jeżeli jako jedną z reszt otrzymamy liczbę 0, to rozwinięcie jest skończone.

Z nauki o ciągu geometrycznym wiadomo, że każdy ułamek dziesiętny mający okres 9 można zastąpić ułamkiem dziesiętnym skończonym, np.

$$0,1999\dots = 0,1(9) = 0,2$$

Z tego względu wykluczamy w dalszym ciągu ułamki dziesiętne o okresie 9. Można udowodnić, że wówczas

*każda liczba wymierna ma dokładnie jedno
rozwiniecie dziesiętne, okresowe lub skończone*

i na odwrót:

*każdy ułamek dziesiętny okresowy lub skończony
jest rozwinięciem dokładnie jednej liczby wymiernej.*

Na przykład

$$-\frac{4}{3} = -1,(3), \quad -0,2(3) = -\frac{7}{30}, \quad 0 = 0,0, \quad 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Procenty. Jeden *procent* (w skrócie 1%) pewnej liczby, jest to setna część tej liczby.

Na przykład

$$1\% \text{ liczby } 30 \text{ wynosi } \frac{1}{100} \cdot 30 = 0,3,$$

$$5\% \text{ liczby } 50 \text{ wynosi } \frac{5}{100} \cdot 50 = 2,5,$$

$$18\% \text{ liczby } 40 \text{ wynosi } \frac{18}{100} \cdot 40 = 4,2.$$

Z określenia procentu wynikają następujące dwie reguły:

$$p\% \text{ liczby } a \text{ wynosi } \frac{p \cdot a}{100} \quad (18.6)$$

oraz

$$\text{liczba, której } p\% \text{ wynosi } b, \text{ równa jest } \frac{b \cdot 100}{p} \quad (18.7)$$

Przykład. Dopisane do książeczki PKO odsetki za okres jednego roku wyniosły 77 zł 40 gr. Stopa procentowa wynosi 3% w stosunku rocznym. Jaka kwota znajdowała się na książeczce?

Rozwiązanie. Jeżeli 3% kwoty wynosi 77 zł 40 gr, to cała kwota wynosi

$$\frac{77,40 \cdot 100}{3} = 2580$$

Odp. 2580 zł.

Przykład. Pracownikowi obniżono pobory o 10% na skutek czego odwołał się do instancji nadrzędnej. Odwołanie zostało uwzględnione, przy czym polecono podwyższyć obniżone pobory o 10%. Pracownik ponownie odwołał się; dlaczego?

Rozwiązanie
pobory początkowe:
(przed obniżką)

x

pobory po obniżce:

$$x - \frac{x}{100} \cdot 10 = \frac{90}{100} x$$

pobory końcowe:
(po podwyżce obniżonych poborów)

$$\frac{90}{100} x + \frac{90}{100 \cdot 100} x \cdot 10 = \frac{99}{100} x < x$$

Odp. Ponieważ stracił 1% swych początkowych poborów.

Przykład. Bok kwadratu wydłużono o 10% jego pierwotnej długości. O ile % swej pierwotnej wartości zwiększyło się pole kwadratu?

Rozwiązanie

	bok kwadratu a	pole kwadratu a^2
przed wydłużeniem:		
po wydłużeniu:	$a + \frac{a}{10} = \frac{11}{10} a$	$\left(\frac{11}{10} a\right)^2 = \frac{121}{100} a^2$

Pole zwiększyło się o $\frac{21}{100}$ swej wartości początkowej a^2 .

Odp. 21%.

Przykład*. Kawałek metalu zwiększył objętość na skutek ogrzania o $\frac{1}{2}\%$ swej początkowej objętości. Wyrazić w % ubytek ciężaru właściwego.

Rozwiązanie. Oznaczmy P – ciężar metalu, V_0 – objętość przed ogrzaniem, d_0 – ciężar właściwy przed ogrzaniem, d – ciężar właściwy po ogrzaniu. Mamy więc

$$d_0 = \frac{P}{V_0}, \quad d = \frac{P}{V_0 + \frac{1}{200} V_0} = \frac{200 P}{201 V_0}$$

Procentowy ubytek ciężaru właściwego:

$$x = \frac{d_0 - d}{d_0} 100\% = \frac{\frac{P}{V_0} - \frac{200 P}{201 V_0}}{\frac{P}{V_0}} \cdot 100\% = \frac{100}{201} \%$$

Odp. $\frac{100}{201} \%$.

Jeden promil (w skrócie 1‰) pewnej liczby, jest to tysięczna część tej liczby. Na przykład

$$3‰ \text{ liczby } 48 \text{ wynosi } \frac{3}{1000} \cdot 48 = 0.144.$$

$$1\% = 10‰$$

Liczbę tysięcznych części danego metalu w stopie nazywamy *próbą stopu ze względu na ten metal*. Jeżeli na przykład stop srebra jest próby 0,875 to czyste srebro stanowi $875^0/_{00}$ masy tego stopu.

Przykład. Stopiono 1200 g srebra próby 0,750 i 800 g srebra próby 0,875. Jakiej próby jest otrzymany stop?

Rozwiązanie

całkowita zawartość

srebra w stopie: $1200 \cdot 0,750 + 800 \cdot 0,875 = 1600$ g

całkowita masa stopu: $1200 + 800 = 2000$ g

próba stopu: $\frac{1600}{2000} = 0,8$.

Odp. 0,8.

Pytania i zadania

1. Co to są liczby wymierne?
2. Co to są ułamki zwykłe?
3. Co to znaczy, że ułamek zwykły jest a) właściwy, b) niewłaściwy? Podać przykłady.
4. Co to są ułamki dziesiętne?
5. Co to jest okres ułamka dziesiętnego?
6. Jaka liczba jest okresem ułamka skończonego?
7. Czy każda liczba wymierna ma jednoznaczne rozwinięcie dziesiętne?
8. Omówić pojęcie a) procentu, b) promila.
9. Co to znaczy *złoto próby 0,940*?
10. Czy a) suma, b) iloczyn liczb wymiernych jest liczbą wymierną?
11. Wyjaśnić, na czym polega odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między liczbami wymiernymi i okresowymi lub skończonymi uławkami dziesiętnymi. Dlaczego wykluczamy z rozważań ułamki dziesiętne o okresie 9?
12. Z ilu cyfr składa się okres rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{2}{17}$?
13. Jaka jest 69-ta cyfra za przecinkiem w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{12}{99}$?
14. Jaka jest 135-ta cyfra za przecinkiem w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{2}{7}$?
5. Skrócić ułamki:
a) $\frac{96}{720}$, b) $\frac{27}{243}$, c) $\frac{141}{1692}$, d) $\frac{36}{396}$, e) $\frac{764}{5730}$
6. Obliczyć:
a) $\frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{1}{12} + \frac{5}{24}$, b) $21 + \frac{12}{17} + \frac{22}{43} + \frac{5}{17} + 3 + \frac{21}{43}$,
c) $\frac{1}{4} - \frac{23}{2} + \frac{9}{4} + 14$, d) $4\frac{1}{8} - 11\frac{2}{5} + 10\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{7}{40} - 2\frac{3}{8} - \frac{11}{40}$.

U w a g a : $4 \frac{1}{8}$ oznacza $4 + \frac{1}{8}$ itd.

17. Sprowadzić do najprostszej postaci wyrażenie ułamkowe

- a) $\frac{63 \cdot 78}{42 \cdot 36}$, b) $\frac{56 \cdot 63}{35 \cdot 48}$, c) $\frac{95 \cdot 105 \cdot 150}{19 \cdot 35 \cdot 50}$,
d) $\frac{44 \cdot 49 \cdot 56}{66 \cdot 42 \cdot 48}$, e) $\frac{121 \cdot 243 \cdot 81}{270 \cdot 11 \cdot 486}$, f) $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$.

18. Znaleźć liczbę, której

- a) $\frac{7}{8}$ wynosi $5 \frac{1}{4}$, b) $\frac{9}{11}$ wynosi $\frac{27}{22}$, c) $\frac{11}{13}$ wynosi 25.

19. $\frac{4}{9}$ masy buraka cukrowego stanowi cukier. Ile cukru zawiera 225 kg buraków cukrowych?

20. Jeden robotnik wykonał w ciągu dnia $\frac{11}{10}$, drugi $\frac{4}{3}$, a trzeci $\frac{17}{15}$ dziennej normy. Który z nich najwięcej wykonał?

21. Obliczyć

- a) $\frac{\left(140 \frac{7}{30} - 138 \frac{5}{12}\right) : 18 \frac{1}{6}}{1 : 500}$, b) $\frac{\left(85 \frac{7}{30} - 83 \frac{5}{18}\right) : 2 \frac{2}{3}}{1 : 25}$,
c) $\frac{(1,238 + 2,762) \cdot 0,2}{(36,487 - 34,237) : 2,8125}$, d) $\frac{(0,3 - 0,15) : 0,3}{(1,88 + 2,12) \cdot 0,125}$.

22. Obliczyć

- a) 4% liczby 62, b) 36% liczby 130, c) 18% liczby 360, d) liczbę, której 15% wynosi 8, e) liczbę, której 70% wynosi 45.

23. Na amortyzację maszyny odpisuje się rocznie 12% jej początkowej wartości, co stanowi 1950 zł. Jaka jest wartość nowej maszyny?

24. Stop zawiera 78% miedzi i 12% cyny, zaś resztę stanowi cynk. Ile kg miedzi, cyny i cynku zawiera stop, jeżeli cyny jest w nim o 1,8 kg więcej niż cynku?

25. Masa towaru brutto wynosi 172 kg. Tara stanowi $4 \frac{1}{3}\%$ masy brutto. Jaka jest masa towaru netto?

26. Jeden bok prostokąta skrócono o 50%, a drugi wydłużono o 50%. Jak zmieni się pole prostokąta?

27. Jaki jest skurcz liniowy żeliwa w ‰ , jeżeli długość modelu wynosi 150 cm, a długość modelu po zastygnięciu 147,75 cm?

28. Czy może być $2x < x$?

29. Obliczyć

- a) $\left[\left(-4 \frac{3}{4} \right) \cdot \left(-\frac{12}{19} \right) \right] : \left[1 \frac{2}{5} \cdot (-1,4) \right]$,
b) $14 \cdot (-5) \cdot (+2) \cdot (+7) \cdot \left(-\frac{2}{5} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{4}{7}$.

19. Liczby niewymierne

Niech Z oznacza niepusty zbiór liczb.

Zbiór liczb Z nazywamy *ograniczonym z dołu*, jeżeli istnieje liczba m nie większa od każdej liczby tego zbioru, tzn.

$$\bigvee_m \bigwedge_{x \in Z} x \geq m \quad (19.1)$$

O liczbie m mówimy, że ogranicza z dołu zbiór Z .

Na przykład zbiór N jest ograniczony z dołu przez liczby: 1, 0, -100, itd.

Definicja. *Kres dolny* zbioru liczb Z jest to największa z liczb ograniczająca ten zbiór z dołu.

Na przykład kresem dolnym zbioru N jest 1. Zbiór R nie ma kresu dolnego.

Zbiór liczb Z nazywamy *ograniczonym z góry*, jeżeli istnieje liczba M nie mniejsza od każdej liczby tego zbioru, tzn.

$$\bigvee_M \bigwedge_{x \in Z} x \leq M \quad (19.2)$$

O liczbie M mówimy, że ogranicza z góry zbiór Z .

Definicja. *Kres górny* zbioru liczb Z jest to najmniejsza z liczb ograniczająca ten zbiór z góry.

Na przykład kresem górnym zbioru liczb ujemnych jest 0. Zbiór N nie ma kresu górnego.

Kres (dolny, górny) zbioru liczb może należeć do tego zbioru, a może do niego nie należeć.

Zbiór, który nie jest ograniczony z dołu, nie ma kresu dolnego, zaś zbiór, który nie jest ograniczony z góry — nie ma kresu górnego.

Przybliżenia dziesiętne liczby wymiernej. Różważmy liczbę wymierną

$$\frac{2}{3} = 0,66666\dots$$

oraz dwa odpowiadające jej ciągi przybliżeń dziesiętnych, ciąg przybliżeń dziesiętnych z *niedomiarem*:

$$0,6; \quad 0,66; \quad 0,666; \quad \dots \quad (19.3)$$

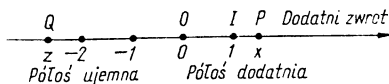
oraz ciąg przybliżeń dziesiętnych z *nadmiarem*

$$0,7; \quad 0,67; \quad 0,667; \quad \dots \quad (19.4)$$

W zbiorze (19.3) nie ma liczby największej, podobnie jak w zbiorze (19.4) nie ma liczby najmniejszej. Liczba $\frac{2}{3}$ jest najmniejszą z liczb ograniczających zbiór (19.3) z góry i jednocześnie największą z liczb ograniczających zbiór (19.4) z dołu. Liczba $\frac{2}{3}$ jest kresem dolnym zbioru (19.4) i jednocześnie kresem górnym zbioru (19.3).

Można udowodnić, że *każda liczba wymierna jest kresem górnym zbioru swoich przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem i kresem dolnym zbioru swoich przybliżeń dziesiętnych z nadmiarem*.

Oś liczbowa. Liczby wymierne można interpretować geometrycznie. W tym celu rozważa się tzw. *oś liczbową*, to znaczy prostą, na której obrano punkt początkowy O i punkt jednostkowy I . Kolejność tych punktów wyznacza *dodatni wzrost osi* (od O do I), który zaznaczamy strzałką (rys. 19-1). Punkтови O przyporządkowujemy liczbę 0, natomiast punktowi I — liczbę 1.



Rys. 19-1

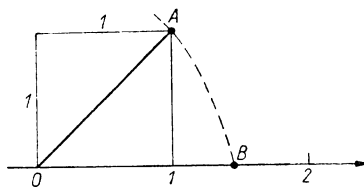
Długość odcinka OI przyjmujemy za *jednostkę długości*.

Punkt O nazywamy *początkiem osi*; dzieli on oś na dwie *półosie*: *dodatnią* — na której leży punkt I — oraz *ujemną*.

Punkt O należy do obydwu półosi.

Każdej dodatniej liczbie wymiernej x przyporządkowujemy taki punkt P położony na dodatniej półosi, którego odległość od punktu O wyrażona w obranej jednostce, równa jest x . Parze liczb przeciwnych przyporządkowujemy parę punktów położonych symetrycznie względem początku osi. Liczbom ujemnym odpowiadają więc punkty ujemnej półosi. Na rys. 19-1 liczbie dodatniej x przyporządkowany jest punkt P , zaś liczbie ujemnej z — punkt Q .

Każdej liczbie wymiernej przyporządkowany jest na osi liczbowej dokładnie jeden punkt. Istnieją natomiast takie punkty osi liczbowej, które nie są przyporządkowane żadnym liczbom wymiernym. Na rys. 19-2 przedstawiona jest konstrukcja, która pozwala znaleźć taki właśnie punkt B . Zauważmy



Rys. 19-2

mianowicie, że odcinki OA i OB są równe, mają zatem równe długości. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $OA^2 = 2$. Otóż nie istnieje liczba wymierna $\frac{a}{b}$, której kwadrat równy jest 2. Istotnie, jeżeli

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2, \quad \text{to} \quad a \cdot a = 2 \cdot b \cdot b$$

Ostatnia równość jest fałszywa, ponieważ po rozłożeniu obu jej stron na czynniki pierwsze czynnik 2 występuje po prawej stronie nieparzystą liczbę razy, natomiast po lewej stronie — nie występuje wcale, lub występuje parzystą liczbę razy. Hipo-

teza o istnieniu liczby wymiernej, której kwadrat jest 2 doprowadziła nas zatem do równości fałszywej, a więc jest fałszywa.

W zbiorze W nie istnieje zatem liczba, która stanowi długość przekątnej kwadratu o boku 1. Przykład ten świadczy o tym, że liczby wymierne nie wystarczają do mierzenia odcinków. Aby każdemu odcinkowi móc przyporządkować liczbę stanowiącą jego długość rozszerzono pojęcie liczby, wprowadzając tzw. liczby niewymierne. Taką jest na przykład liczba, której kwadrat równy jest 2. Liczbę tę oznaczamy $\sqrt{2}$.

Określenie liczby niewymiernej można podać w oparciu o ciągi przybliżeń dziesiętnych. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Każda liczba ciągu rosnącego liczb wymiernych:

$$1; \quad 1,4; \quad 1,41; \quad 1,414; \quad 1,4142; \quad \dots \quad (19.5)$$

ma tę własność, że jej kwadrat jest mniejszy od 2, natomiast kwadrat każdej liczby ciągu malejącego

$$2; \quad 1,5; \quad 1,42; \quad 1,415; \quad 1,4143; \quad \dots \quad (19.6)$$

jest większy od 2.

Ciąg utworzony z różnic odpowiednich wyrazów ciągów (19.6) i (19.5) maleje do zera:

$$1; \quad 0,1; \quad 0,01; \quad 0,001; \quad 0,0001; \quad \dots \quad (19.7)$$

Wynika stąd, że istnieje co najwyżej jedna taka liczba, która jest kresem górnym zbioru (19.5) i jednocześnie kresem dolnym zbioru (19.6). Użyliśmy tu zwrotu *co najwyżej*; nie jest on równoznaczny ze stwierdzeniem, że liczba taka istnieje, lecz oznacza, że liczba taka jest *dokładnie jedna* albo *nie istnieje* w ogóle. W zbiorze W nie ma takiej liczby, bo gdyby była, to jej kwadrat byłby równy 2, co — jak wiemy — nie jest możliwe.

Liczba niewymierna $\sqrt{2}$ zapełni tę lukę.

Obliczamy dalsze wyrazy ciągów (19.5) i (19.6), które wyznaczają ułamek dziesiętny nieskończony

$$1,41421356\dots \quad (19.8)$$

Ułamek ten uważamy za rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej, którą oznaczamy symbolem $\sqrt{2}$. Ułamek (19.8) nie może być okresowy, byłby bowiem wówczas rozwinięciem dziesiętnym liczby wymiernej. Liczba $\sqrt{2}$ jest kresem górnym zbioru (19.5) i jednocześnie kresem dolnym zbioru (19.6). Liczba ta nie należy do żadnego z tych zbiorów. Ciąg (19.5) nazywamy ciągiem przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem, natomiast ciąg (19.6) nazywamy ciągiem przybliżeń dziesiętnych z nadmiarem liczby $\sqrt{2}$. Liczba niewymierna $\sqrt{2}$ o rozwinięciu dziesiętnym (19.8) jest więc kresem górnym zbioru (19.5) swych przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem i jednocześnie kresem dolnym zbioru (19.6) swych przybliżeń dziesiętnych z nadmiarem.

Inne liczby niewymierne, np. $\sqrt{3}$, π , określamy analogicznie.

Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieokresowe.

Zbiór wszystkich liczb niewymiernych oznaczamy symbolem **IW**.

Liczba niewymierna może być dodatnia albo ujemna.

Działania arytmetyczne na liczbach niewymiernych określone są za pomocą działań na przybliżeniach wymiernych tych liczb. Wyjaśnimy to na przykładzie sumy dwóch liczb niewymiernych x i y :

$$x = 0,1032981... \quad y = 0,6928146... \quad (19.9)$$

Rozwinięcia (19.9) są z założenia *nieokresowe*.

Bierzemy pod uwagę ciągi przybliżeń dziesiętnych liczby x

z nadmiarem: 0,2; 0,11; 0,104; 0,1033; ...

z niedomiarem: 0,1; 0,10; 0,103; 0,1032; ...

oraz ciągi przybliżeń dziesiętnych liczby y

z nadmiarem: 0,7; 0,70; 0,693; 0,6929; ...

z niedomiarem: 0,6; 0,69; 0,692; 0,6928; ...

Dodając odpowiednie wyrazy dostajemy dwa ciągi

z nadmiarem: 0,9; 0,81; 0,797; 0,7962; ...

z niedomiarem: 0,7; 0,79; 0,795; 0,7960; ...

przybliżeń dziesiętnych sumy $x+y$

$$x+y = 0,796...$$

Przybliżenia liczb. Błąd bezwzględny, błąd względny. Potrzeba przeprowadzania obliczeń skłania nas często do posługiwania się *przybliżeniami liczb* (zarówno niewymiernych, jak i wymiernych). Zwykle są to przybliżenia wymierne w postaci liczby dziesiętnej.

Niech a oznacza *przybliżenie* liczby a_0 .

Definicja. *Błąd przybliżenia* a liczby a_0 jest to liczba

$$b = a - a_0 \quad (19.10)$$

Liczbę $-b$, przeciwną względem b , nazywamy *poprawką*.

Definicja. *Błąd bezwzględny* przybliżenia a liczby a_0 jest to liczba

$$\Delta = |a - a_0| \quad (19.11)$$

Definicja. *Błąd względny* (względem przybliżenia a) jest to liczba

$$\delta = \frac{|a - a_0|}{a} \quad (19.12)$$

Jeżeli $a < a_0$, to a jest przybliżeniem z *niedomiarem*, jeżeli natomiast $a > a_0$, to a jest przybliżeniem z *nadmiarem* liczby a_0

Przykład. Zamieniając ułamek $\frac{13}{9}$ na ułamek dziesiętny, otrzymamy 1,444 ...

Możemy tu poprzestać na jednym z przybliżeń dziesiętnych:

$$1; \quad 1,4; \quad 1,44; \quad 1,444; \quad \dots$$

Jeżeli zastąpimy ułamek $\frac{13}{9}$ jego przybliżeniem dziesiętnym 1,44, to napiszemy

$$\frac{13}{9} \approx 1,44$$

(znak $\approx$ czytamy: *równa się w przybliżeniu*). W tym przypadku popełniamy błąd:

$$b = 1,44 - \frac{13}{9} = -\frac{1}{225}$$

błąd bezwzględny

$$\Delta = \left| 1,44 - \frac{13}{9} \right| = \frac{1}{225}$$

oraz błąd względny (względem przybliżenia)

$$\delta = \frac{1}{225} : 1,44 = \frac{1}{324}$$

Często się zdarza, że mamy liczbę dziesiętną i chcemy ją zaokrąglić, tj. odrzucić (zastąpić zerami) pewną liczbę jej cyfr końcowych. Wówczas postępujemy w myśl następującej reguły.

Reguła zaokrąglania. Jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3 albo 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmiany. Jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8 albo 9, to ostatnią z zachowanych cyfr podwyższamy o 1, przy czym jeżeli jest nią 9, to zastępujemy ją zerem i podwyższamy o 1 poprzednią cyfrę, itd.

Na przykład liczbę $x = 32,518\ 926\dots$ można zaokrąglić w każdy z następujących sposobów:

$$x \approx 32,51893; \quad x \approx 32,5189; \quad x \approx 32,519;$$

$$x \approx 32,52; \quad x \approx 32,5; \quad x \approx 33; \quad x \approx 30.$$

W rachunkach przybliżonych posługujemy się często pojęciem *cyfry znaczącej*.

Cyfrą znaczącą przybliżenia dziesiętnego jest 1, 2, ..., 9, a ponadto 0 zawarte między nimi, oraz zera końcowe — jeżeli oznaczają brak jednostek odpowiedniego rzędu.

Zer początkowych, oraz zer końcowych napisanych w wyniku zaokrąglania lub w celu zapełnienia miejsca — nie zaliczamy do cyfr znaczących. Na przykład:

Liczba 21 007 ma pięć cyfr znaczących.

Liczba 0,0086 ma dwie cyfry znaczące: 86. Jeżeli tę liczbę zaokrąglimy i zastąpimy liczbą 0,009 to ta ostatnia ma już tylko jedną cyfrę znaczącą: 9.

Liczba 1969 ma cztery cyfry znaczące. Jeżeli tę liczbę zaokrąglimy do 1970, to otrzymana liczba ma 3 cyfry znaczące.

Wiadomo, że $\pi \approx 3,14$. Przybliżenie 3,14 liczby π ma 3 cyfry znaczące. Jeżeli zastąpimy to przybliżenie liczbą 3,1400, to liczba cyfr znaczących nie zmieni się. Liczba cyfr znaczących nie ulegnie także zmianie, gdy zamiast 3,14 napiszemy 003,14.

W rachunkach praktycznych często mamy do czynienia z liczbami niewymiernymi postaci

$$a + b \cdot \sqrt{c} \quad (19.13)$$

przy czym a , b i c oznaczają liczby wymierne, $c > 0$ i $\sqrt{c} \notin W$.

Na przykład

$$3 - 2\sqrt{5}, \quad \frac{2}{7} + \frac{1}{3}\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{\frac{7}{5}}$$

Jeżeli liczbę c ustalimy, to zbiór wszystkich liczb postaci (19.13) ma interesującą właściwość, a mianowicie *suma, różnica, iloczyn oraz iloraz* (gdy dzielnik jest różny od 0) liczb postaci (19.13) jest także liczbą tej postaci.

A oto przykłady

$$\begin{aligned} (3 - 5\sqrt{2}) + (-2 + 4\sqrt{2}) &= 1 - \sqrt{2} \\ (1 - 2\sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2}) &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot \sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) \cdot 2 + \\ &+ (-2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4 = -2 - 3\sqrt{2} \\ \frac{2 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} &= \frac{(2 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{-1} = -4 - 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego** przypominamy na przykładach.

Przykład. Obliczyć $\sqrt{32}$ z dokładnością 0,01 (tzn. z błędem bezwzględnym mniejszym od 0,01).

			obliczenia pomocnicze	
	$\sqrt{32,00 00} = 5,65$		$5^2 \leq 32, \quad 6^2 > 32$	
pierwsza reszta	$\begin{array}{r} 25 \\ \hline 700 \end{array}$	$106 \cdot 6$	$2 \cdot 5 = 10$	
	$\begin{array}{r} 636 \\ \hline 6400 \end{array}$	$1125 \cdot 5$	$106 \cdot 6 \leq 700, \quad 107 \cdot 7 > 700$	
druga reszta	$\begin{array}{r} 5625 \\ \hline 775 \end{array}$		$2 \cdot 56 = 112$	
			$1125 \cdot 5 < 6400,$	
trzecia reszta			$1126 \cdot 6 > 6400$	

Objaśnienie. Liczbę podpierwiastkową dzielimy na klasy po dwie cyfry, poczynając od przecinka dziesiętnego w obie strony. Liczba tych klas przed przecinkiem (w rozważanym przykładzie jest nią 1), równa jest liczbie cyfr przed przecinkiem w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{32}$. Klasa skrajna przed przecinkiem może być jednocyfrowa (inaczej niż w przykładzie). Następnie dobieramy największą liczbę jednocyfrową, której kwadrat nie przekracza 32; jest nią 5. Cyfra 5 jest pierwszą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego $\sqrt{32}$. Kwadrat liczby 5, czyli 25 piszemy pod liczbą 32 i odejmujemy od niej. Dostajemy tzw. *pierwszą resztę*: $32 - 25 = 7$. Za cyfrą 7 dopisujemy kolejno cyfry następnej klasy: 700. Pierwszą cyfrę szukanego rozwinięcia, 5, mnożymy przez 2, $2 \cdot 5 = 10$ i dopisujemy największą cyfrę A , dla której liczba trzycyfrowa $10A$ pomnożona przez liczbę jednocyfrową A daje iloczyn nie przekra-

czający 700. Cyfrą tą jest 6. Jest to druga cyfra szukanego rozwinięcia, którą piszemy po przecinku za cyfrą pierwszą, czyli za 5. Mnożymy $106 \cdot 6 = 636$. Piszemy ten iloczyn pod liczbą 700 i odejmujemy od niej. Dostajemy tzw. *drugą resztę*: $700 - 636 = 64$. Za cyframi 64 dopisujemy kolejno cyfry następnej klasy: 6400. Liczbę utworzoną z pierwszych dwóch cyfr szukanego rozwinięcia, 56, mnożymy przez 2, $2 \cdot 56 = 112$ i dopisujemy największą cyfrę B , dla której liczba czterocyfrowa $112B$ pomnożona przez B daje iloczyn nie przekraczający 6400. Cyfrą tą jest 5. Jest to trzecia cyfra szukanego rozwinięcia. Piszemy ją za dwiema pierwszymi cyframi, czyli za 56. Mnożymy $1125 \cdot 5 = 5625$, piszemy ten iloczyn pod liczbą 6400 i odejmujemy od niej. Dostajemy tzw. *trzecią resztę*: $6400 - 5625 = 775$. Na tym rachunek kończymy, gdyż

$$5,65 < \sqrt{32} < 5,66$$

więc $\sqrt{32} \approx 5,65$ z dokładnością 0,01.

Uwaga. Jeżeli któraś z reszt jest równa zeru, to algorytm pozwala obliczyć pierwiastek dokładnie.

A oto dalsze przykłady

$$\begin{array}{r} \sqrt{72} \overline{)25} = 85 \\ \underline{64} \\ 825 \\ \underline{825} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{4 \overline{)66}} \overline{)56} = 216 \\ \underline{4} \\ 66 \\ \underline{66} \\ 41 \cdot 1 \\ \underline{41} \\ 2556 \\ \underline{2556} \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{0,03 \overline{)19} \overline{)00}} = 0,178, \text{ z dokładnością } 0,001.$$

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{19 \overline{)00}} = 27 \cdot 7 \\ \underline{219} \\ 189 \\ \underline{3000} \\ 2784 \\ \underline{216} \end{array}$$

Usuwanie niewymierności z mianownika, należy do często spotykanych przekształceń liczb niewymiernych.

Przykłady

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}, \quad \text{dla } a > 0, b > 0, a \neq b$$

$$\frac{5}{1 + \sqrt[3]{2}} = \frac{5(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{(1 + \sqrt[3]{2})(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = \frac{5(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{1^3 + (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{5}{3}(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$$

Przykład*. Usunąć niewymierność z mianownika wyrażenia

$$\frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

Rozwiązanie. Ponieważ

$$2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10} = 2(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}(1 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{2})$$

więc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}} &= \frac{1}{(2 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{2})} = \frac{(2 - \sqrt{5})(1 - \sqrt{2})}{(4 - 5)(1 - 2)} = \\ &= (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Odp. $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{2} - 1)$.

Na zakończenie tego punktu podamy jeszcze jeden przykład, którego rozwiązanie wymaga pomysłowości i zręczności rachunkowej.

Przykład.** Udowodnić, że

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4 \quad (19.14)$$

Rozwiązanie. Ponieważ

$$\begin{aligned} 20 + 14\sqrt{2} &= 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 = (2 + \sqrt{2})^3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} 20 - 14\sqrt{2} &= 8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2} = \\ &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 = (2 - \sqrt{2})^3 \end{aligned}$$

więc lewa strona równości (19.14) równa jest

$$\sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4, \text{ cnd.}$$

Pytania i zadania

1. Co to znaczy: zbiór Z jest ograniczony a) z góry, b) z dołu? Podać przykłady zbiorów ograniczonych (z góry lub z dołu) i takich, które nie są ograniczone.
2. Podać określenie *kresu górnego* zbioru liczb.
3. Podać określenie *kresu dolnego* zbioru liczb.
4. Podać przykłady zbioru, który
 - a) ma kres dolny i kres górny, b) nie ma kresu dolnego ani górnego, c) ma kres dolny i nie ma kresu górnego, d) ma kres górny i nie ma kresu dolnego.
5. Podać przykład zbioru, który ma kres górny a) należący, b) nie należący do tego zbioru.
6. Wyjaśnić związek między pojęciami: liczba wymierna, ciągi przybliżeń dziesiętnych (z nadmiarem, z niedomiarem) tej liczby, kres dolny i kres górny.

7. Co to jest oś liczbowa? Omówić przyporządkowanie liczbom wymiernym punktów osi liczbowej i przyporządkowanie odwrotne.
8. Udowodnić, że nie ma liczby wymiernej, której kwadrat równa się a) 3, b) 5.
9. Wyjaśnić na przykładzie $\sqrt{2}$ określenie liczby niewymiernej za pomocą ciągów przybliżeń dziesiętnych.
10. Czy istnieje liczba niewymierna o rozwinięciu dziesiętnym mającym okres 13?
11. Wyjaśnić znaczenie terminów: błąd przybliżenia, poprawka, błąd bezwzględny, błąd względny, cyfra znacząca.
12. Podać i wyjaśnić regułę zaokrąglania.
13. Omówić właściwości liczb $a+b\sqrt[n]{c}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{W}$, $c > 0$ i $\sqrt[n]{c} \notin \mathbb{W}$.
14. Obliczyć
 - a) $\sqrt[3]{2916}$, b) $\sqrt[3]{9604}$, c) $\sqrt[3]{73,4}$ z dokładnością 0,001,
 - d) $\sqrt[3]{0,79}$ z dokładnością 0,001, e) $\sqrt[3]{0,00092}$ z dokładnością 0,0001.
15. Usunąć niewymierność z mianownika

$$\begin{aligned}
 &\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \quad \text{b) } \frac{7}{\sqrt{8}-2}, \quad \text{c) } \frac{30}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \\
 &\text{d) } \frac{2+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}, \quad \text{e) } \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}, \quad \text{f)* } \frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}, \\
 &\text{g)* } \frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}
 \end{aligned}$$

- 16**. Udowodnić równość

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$$

Wskazówka: $a = 2 + \sqrt{5}$, $b = 2 - \sqrt{5}$, $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$,
 wykazać, że $c^3 + 3c = 4$.

- 17*. Obliczyć

$$\left(a \sqrt[4]{\frac{b}{a}} + \sqrt[4]{bc} + \sqrt[4]{4ab^2c} \right) \left(\sqrt[4]{ab} + c \sqrt[4]{\frac{b}{c}} - \sqrt[4]{4ab^2c} \right)$$

dla $a = 1,851$, $b = 3$, $c = 0,149$.

20. Zbiór liczb rzeczywistych

Zbiór liczb rzeczywistych jest sumą zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych:

$$\mathbb{W} \cup \mathbb{IW} = \mathbb{R}$$

Każda liczba rzeczywista x ma dokładnie jedno rozwinięcie dziesiętne:

skończone lub okresowe, gdy $x \in \mathbb{W}$
 nieokresowe, gdy $x \in \mathbb{IW}$

zaś każdy ułamek dziesiętny jest rozwinięciem dokładnie jednej liczby rzeczywistej (przypominamy, że ułamki o okresie 9 są *wykluczone*).

W zbiorze R określone są relacje ($=$, $<$) oraz działania, o których mówiliśmy w punkcie 16.

Każdej liczbie rzeczywistej jest przyporządkowany dokładnie jeden punkt osi liczbowej i na odwrót: każdemu punktowi osi liczbowej jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba rzeczywista.

Liczbę x przyporządkowaną punktowi P osi liczbowej, nazywamy *współrzedną* punktu P na tej osi.

Przyporządkowanie punktom osi — współrzędnych, jest wzajemnie jednoznaczne.

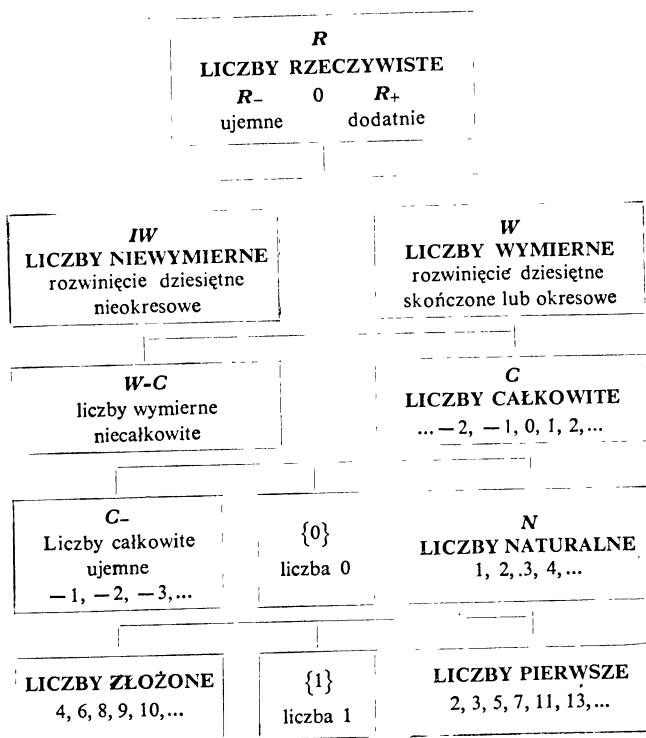
Zasada ciągłości. *Każdy zbiór liczb rzeczywistych, który jest ograniczony z góry, ma kres górny* (w zbiorze R).

Tej ostatniej właściwości nie ma zbiór W . Na przykład nie istnieje liczba wymierna, będąca kresem górnym zbioru wszystkich liczb wymiernych, których kwadrat jest mniejszy niż 2. Kres ten — jak wiemy — jest liczbą niewymierną $\sqrt{2}$.

Mówimy, że zbiór R jest ciągły. Zbiór W nie jest ciągły.

W tabl. 20-1 zebrane są niektóre wiadomości o zbiorze R .

Tabl. 20-1



Przedziały, stanowią ważny rodzaj podzbiorów zbioru $\mathbf{R}$.

Przedział otwarty $(a; b)$ określamy następująco:

$$x \in (a; b) \Leftrightarrow a < x < b \quad (20.1)$$

W przedziale tym nie ma liczby najmniejszej i nie ma liczby największej. Liczby a i b są *kresami*: dolnym i górnym zbioru $(a; b)$.

Przedział zamknięty (domknięty) $\langle a; b \rangle$ określamy następująco:

$$x \in \langle a; b \rangle \Leftrightarrow a \leq x \leq b \quad (20.2)$$

Uwaga. Nierówności $<$ oraz $>$ nazywamy *mocnymi (ostrymi)* w odróżnieniu od nierówności *słabych (nieostrzych)* $\leq$ oraz $\geq$; przypominamy, że

$$a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$$

W przedziale zamkniętym $\langle a; b \rangle$ istnieje liczba najmniejsza a oraz liczba największa b .

Przedziały: lewostronnie domknięty $\langle a; b)$, oraz *prawostronnie domknięty* $(a; b \rangle$ określamy tak:

$$x \in \langle a; b) \Leftrightarrow a \leq x < b \quad (20.3)$$

$$x \in (a; b \rangle \Leftrightarrow a < x \leq b \quad (20.4)$$

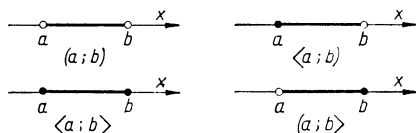
Ponadto rozpatrujemy *przedziały nieograniczone* (nieskończone):

$$x \in (-\infty; a) \Leftrightarrow x < a$$

$$x \in (a; +\infty) \Leftrightarrow x > a$$

oraz $(-\infty; +\infty) = \mathbf{R}$.

Na rys. 20-1 przedsta wiona jest interpretacja geometryczna przedziałów.



Rys. 20-1

Pytania i zadania

- Wyjaśnić, na czym polega wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie liczbom rzeczywistym a) ich rozwinięć dziesiętnych, b) punktów osi liczbowej.
- Co to jest *współrzędna* punktu P na osi liczbowej?
- Podać zasadę ciągłości.
- Czy zbiór $\mathbf{W}$ jest ciągły? Czy zbiór $\mathbf{R}$ jest ciągły?
- Podać określenie przedziału a) $(a; b)$, b) $\langle a; b \rangle$, c) $(a; b \rangle$, d) $\langle a; b \rangle$, e) $(-\infty; a)$, f) $(a; +\infty)$.
- Narysować zbiór liczb
a) $(-5; 0) \cap (-1; 2)$, b) $\mathbf{C} \cap \langle -5; 1 \rangle$, c) $\mathbf{C} \cup \langle -5; 1 \rangle$

21**. Grupa. Pierścień. Ciało

Zwróćmy tu uwagę na niektóre właściwości podzbiorów zbioru $\mathbf{R}$.

Grupa. Bierzemy pod uwagę zbiór dodatnich liczb wymiernych, $\mathbf{W}_+$. Zbiór ten ma następujące właściwości:

I. W zbiorze $\mathbf{W}_+$ określone jest *mnożenie* $(\cdot)$

$$[(x \in \mathbf{W}_+) \wedge (y \in \mathbf{W}_+)] \Rightarrow (x \cdot y) \in \mathbf{W}_+$$

II. Mnożenie jest *łączne*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

III. W zbiorze $\mathbf{W}_+$ istnieje *element jednostkowy* (a mianowicie liczba 1) taki, że dla każdego $x \in \mathbf{W}_+$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

IV. Dla każdego $x \in \mathbf{W}_+$ istnieje w zbiorze $\mathbf{W}_+$ *element odwrotny* (a mianowicie liczba $\frac{1}{x}$) taki, że

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

Zbiór, który spełnia warunki I–IV, nazywamy grupą ze względu na działanie $(\cdot)$. Zbiór $\mathbf{W}_+$ stanowi grupę, z mnożeniem $(\cdot)$ jako *działaniem grupowym*.

Pierścień. Bierzemy pod uwagę zbiór liczb całkowitych $\mathbf{C}$. Zbiór ten ma następujące właściwości:

I. W zbiorze $\mathbf{C}$ są określone dwa działania: *dodawanie* $(+)$

$$[(x \in \mathbf{C}) \wedge (y \in \mathbf{C})] \Rightarrow (x + y) \in \mathbf{C}$$

oraz *mnożenie* $(\cdot)$

$$[(x \in \mathbf{C}) \wedge (y \in \mathbf{C})] \Rightarrow (x \cdot y) \in \mathbf{C}$$

II. Działania $(+)$ i $(\cdot)$ są *przemienne* i *łączne*, a ponadto *mnożenie jest rozdzielne względem dodawania* (por. wzory (16.5)–(16.9), str. 41).

III. W zbiorze $\mathbf{C}$ określone jest *działanie odwrotne* do dodawania – *odejmowanie* $(-)$

$$[(x \in \mathbf{C}) \wedge (y \in \mathbf{C})] \Rightarrow (x - y) \in \mathbf{C}$$

Zbiór, który spełnia warunki I–III, nazywamy *pierścieniem*. Zbiór $\mathbf{C}$ jest pierścieniem liczbowym.

Ciało. Rozważmy zbiór $\mathbf{R}$.

I. W zbiorze $\mathbf{R}$ określone są dwa działania: *dodawanie* $(+)$ i *mnożenie* $(\cdot)$

$$[(x \in \mathbf{R}) \wedge (y \in \mathbf{R})] \Rightarrow (x + y) \in \mathbf{R}$$

oraz

$$[(x \in \mathbf{R}) \wedge (y \in \mathbf{R})] \Rightarrow (x \cdot y) \in \mathbf{R}$$

II. Działania te są *łączne*, *przemienne*, oraz *mnożenie jest rozdzielne względem dodawania*.

III. W zbiorze R istnieje *element zerowy* (moduł dodawania) a mianowicie taka liczba 0, że dla każdego x

$$x+0 = x$$

oraz *element jednostkowy* (moduł mnożenia) a mianowicie taka liczba 1, że dla każdego x

$$x \cdot 1 = x$$

IV. W zbiorze R określone jest *działanie odwrotne* do dodawania — *odejmowanie* ($-$)

$$[(x \in R) \wedge (y \in R)] \Rightarrow (x-y) \in R$$

oraz *działanie odwrotne* do mnożenia — *dzielenie* ($:$) — z wyjątkiem dzielenia przez 0

$$[(x \in R) \wedge (y \in R - \{0\})] \Rightarrow (x:y) \in R$$

Zbiór, który spełnia podane tu warunki I–IV, nazywamy *ciałem*. Zbiór R jest ciałem liczbowym.

Pytania

1. Jaki zbiór nazywamy a) grupą, b) pierścieniem, c) ciałem liczbowym?
2. Sprawdzić, że a) zbiór W jest ciałem, b) zbiór N nie jest pierścieniem.

Odpowiedzi do rozdz. II†

16.

8. 16/15. 12. prawdz. dla $a \geq b$, fałsz. dla $a < b$. 17. Wzrośnie dwukrotnie. 18. $\sqrt{1-x}$.
 19. 1849. 20. 44. 21. 12. 22. a) 540, b) $\left|\frac{m}{n}\right|$, c) $\frac{3}{2} b^2|ac|$, d) $|x|$, e) $\sqrt[6]{32}$, f) $\sqrt[12]{2187}$,
 g) $2\sqrt[3]{3}$. 23. $3x-9$ gdy $x \geq 5$, $x+1$ gdy $3 \leq x < 5$, $7-x$ gdy $1 \leq x < 3$, oraz
 $9-3x$ gdy $x < 1$.

17.

6. NWP = 560, NWW = 11 760.

18.

6. 0. 7. tak. 10. tak. 11. Okres wykluczamy dlatego, żeby mieć jednoznaczność rozwinięcia, gdyż np.

$$0,2 = 0,2(0) = 0,1999... = 0,1(9)$$

12. 16. 13. 1. 14. 5. 15. a) $\frac{2}{15}$, b) $\frac{1}{9}$, c) $\frac{1}{12}$, d) $\frac{1}{11}$,
 e) $\frac{2}{15}$. 16. a) 2, b) 26, c) 5, d) 1. 17. a) $\frac{13}{4}$, b) $\frac{21}{10}$,
 c) 45, d) $\frac{49}{54}$, e) $\frac{99}{20}$, f) 64. 18. a) 6, b) $\frac{3}{2}$, c) $29\frac{6}{11}$.

19. 100 kg. 20. Drugi. 21. a) 50, b) $18 \frac{1}{3}$, c) 1, d) 1.
 22. a) 2,48, b) 46,8, c) 64,8, d) $53 \frac{1}{3}$, e) $64 \frac{2}{7}$. 23. 16 250 zł.
 24. 70,2 kg miedzi, 10,8 kg cyny, 9 kg cynku. 25. 164,6 kg. 26. Zma-
 leje o 25%. 27. 15‰. 28. tak, np. dla $x = -1$. 29. a) $-1 \frac{26}{49}$,
 b) -112.

19.

10. nie. 14. a) 54, b) 98, c) 8,567, d) 0,888, e) 0,0303.

15. a) $\sqrt{2}+1$, b) $\frac{7}{2}(\sqrt{2}+1)$, c) $\frac{5}{2}(\sqrt{30}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$,

d) $\frac{1}{2}(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6})$, e) $\frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{59}$,

f)* $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{2}$, g)* $\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{5}$. 17*. 6.

Rozdział IV

FUNKCJE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

22. Funkcje jednej zmiennej

Pojęcie *funkcji* (odwzorowania) omawialiśmy już na str. 35. Wiemy, że: *funkcja* f odwzorowująca zbiór X w zbiór Y jest to przyporządkowanie każdemu elementowi x ze zbioru X dokładnie jednego elementu y ze zbioru Y .

Funkcję f zapisujemy tak:

$$x \rightarrow y = f(x), \text{ gdzie } x \in X \text{ i } y \in Y \quad (22.1)$$

przy czym

x nazywamy *argumentem funkcji* lub *zmienną niezależną*

y nazywamy *wartością funkcji* lub *zmienną zależną*

f jest symbolem *funkcji* czyli *odwzorowania*

X nazywamy *dziedziną* lub *zbiorem argumentów* funkcji

Jeżeli funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y (tzn. jeżeli każdy element zbioru Y jest przyporządkowany co najmniej jednemu elementowi zbioru X), to Y nazywamy *przeciwdziedziną* lub *zbiorem wartości funkcji*.

Zajmiemy się obecnie takimi funkcjami, dla których X i Y są pewnymi zbiorami liczb rzeczywistych. Są to funkcje jednej zmiennej liczbowej, których wartościami są także liczby.

Na przykład

$$x \rightarrow y = x^2, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R} \text{ i } y \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \quad (22.2)$$

stanowi zapis funkcji jednej zmiennej liczbowej, która przyjmuje wartości liczbowe.

Funkcja może być określona w różny sposób. Na przykład za pomocą jednego albo kilku wzorów, za pomocą *tabeli* wartości, *wykresu*, umowy wyrażonej słowami, lub jeszcze inaczej.

W dalszym ciągu poznamy wiele różnych funkcji.

Zamiast (22.1) piszemy zazwyczaj po prostu

$$y = f(x) \quad (22.3)$$

gdzie $x \in X$. Warunek $y \in Y$ często pomijamy. Znaleźnienie przeciwdziedziny funkcji może być trudne. Niekiedy pomijamy także zapis $x \in X$. Należy wówczas przyjąć,

że dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb, dla których prawa strona równości (22.3) jest określona.

Przykład. Znaleźć dziedzinę X funkcji

$$y = \frac{1}{x^2 - x}$$

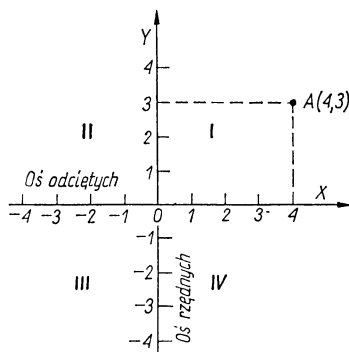
Rozwiązanie

$$\begin{aligned} x \in X &\Leftrightarrow x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow [(x \neq 0) \wedge (x \neq 1)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty). \end{aligned}$$

Odp. $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Wykres funkcji. Funkcję jednej zmiennej liczbowej można interpretować geometrycznie sporządzając jej wykres w układzie współrzędnych.

Definicja. *Układ współrzędnych* prostokątnych na płaszczyźnie jest to para osi liczbowych wzajemnie prostopadłych i o wspólnym punkcie początkowym O , zwanym początkiem układu (rys. 22-1).



Rys. 22-1

Oś poziomą nazywamy *osią odciętych* i oznaczamy zazwyczaj OX ; na tej osi odkładamy wartości zmiennej niezależnej x . Drugą oś, pionową, nazywamy *osią rzędnych* i oznaczamy OY ; odkładamy na niej wartości zmiennej zależnej y , czyli wartości funkcji.

Taki układ współrzędnych oznaczamy OXY ; dzieli on płaszczyznę na cztery ćwiartki (I, II, III i IV, patrz rys. 22-1).

Każdemu punktowi A rozważanej płaszczyzny przyporządkowujemy parę liczb: odciętą x oraz rzędną y . Odcięta x jest współrzędną na OX rzutu prostokątnego punktu A na tę oś. Rzędna y jest współrzędną na OY rzutu prostokątnego punktu A na OY .

Liczby x i y nazywamy *współrzędnymi* (prostokątnymi) punktu A . Zapis $A(x, y)$ oznacza, że x jest odciętą, natomiast y jest rzędną punktu A . Na rys. 22-1 punkt A ma odciętą $+4$ i rzędną $+3$.

Początek układu ma obie współrzędne równe zero: $O(0, 0)$.

Każdy punkt OX ma rzędną równą zero, natomiast każdy punkt OY ma odcięłą równą zero.

Przyporządkowanie punktom płaszczyzny uporządkowanych par (x, y) liczb rzeczywistych jest wzajemnie jednoznaczne: każdy punkt ma dokładnie jedną parę współrzędnych (w ustalonym układzie) i dla każdej pary liczb rzeczywistych istnieje dokładnie jeden punkt, którego współrzędnymi są te liczby.

Definicja. Wykres funkcji $y = f(x)$ jest to zbiór wszystkich punktów $(x, f(x))$, gdy x należy do dziedziny tej funkcji.

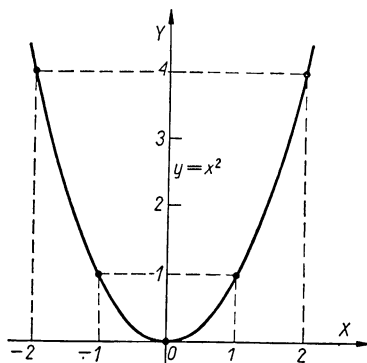
Wykres funkcji sporządzamy zazwyczaj w ten sposób, że na wstępie układamy tabelkę jej zmienności, przyjmując kilka wartości liczbowych argumentu i obliczając odpowiadające im wartości zmiennej y . Następnie rysujemy układ współrzędnych OXY i zaznaczamy punkty, których współrzędnymi są pary (x, y) wzięte z tabelki. Mając już kilka zaznaczonych w ten sposób punktów łączymy je, choćby odręcznie, uzyskując przybliżony wykres funkcji $y = f(x)$.

Przykład. Wykreślić funkcję $y = x^2$.

Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji, $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, następnie rysujemy układ OXY , zaznaczamy na rysunku punkty $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(2, 4)$, wreszcie łączymy je linią (rys. 22-2).

Tabl. 22-1

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Rys. 22-2

Funkcja stała jest to funkcja

$$y = k \quad (22.4)$$

gdzie k jest daną liczbą. Wykresem funkcji (22.4) jest prosta równoległa do OX i przechodząca przez punkt $(0, k)$.

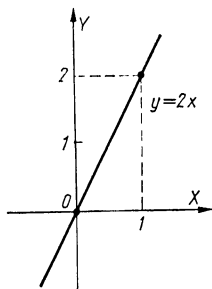
Proporcjonalność prosta. Funkcja

$$y = kx, \quad (k \neq 0) \quad (22.5)$$

przy czym $x \in \mathbf{R}$, wyraża zależność zmiennej y od zmiennej x , zwaną *proporcjonalnością prostą*.

Wykresem funkcji (22.5) jest *prosta*; przechodzi ona przez początek układu oraz przez punkt $A(1, k)$, gdyż zarówno para $(0, 0)$ jak i para $(1, k)$ spełniają równość (22.5).

Na rys. 22-3 przedstawiono wykres funkcji (22.5) dla $k = 2$.



Rys. 22-3

Z równości (22.5) wynika, że zmienna y jest wprost proporcjonalna do zmiennej x wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek (iloraz) $\frac{y}{x}$ jest stały (równy k) dla każdego $x \neq 0$; dla $x = 0$ jest $y = 0$.

Zamiast równości (22.5) można więc dla każdego $x \neq 0$ napisać

$$\frac{y}{x} = k \quad (22.6)$$

Liczbę k nazywamy *współczynnikiem proporcjonalności* (prostej).

Na przykład obwód koła, $2\pi r$, jest wprost proporcjonalny do promienia r przy czym współczynnik proporcjonalności wynosi 2π .

Obwód kwadratu, $4a$, jest wprost proporcjonalny do długości a boku, przy czym współczynnik proporcjonalności wynosi 4.

Przykład. Jeżeli ruch odbywa się ze stałą prędkością v , to droga s przebyta w czasie t wyraża się wzorem

$$s = v \cdot t$$

Droga s jest wprost proporcjonalna do czasu t . Stała prędkość v jest tu współczynnikiem proporcjonalności.

Przykład. Żarówka zużywa w ciągu 14 godzin 0,84 kWh energii elektrycznej. Ile energii zużyje ta żarówka w ciągu 45 godzin?

Rozwiązanie. Ilość zużytej energii elektrycznej jest wprost proporcjonalna do czasu palenia się żarówki. Ponieważ stosunek tych dwóch zmiennych jest stały (por. (22.6)), więc

$$\frac{0,84}{14} = \frac{y}{45}, \quad \text{czyli} \quad y = 2,7$$

Odp. 2,7 kWh.

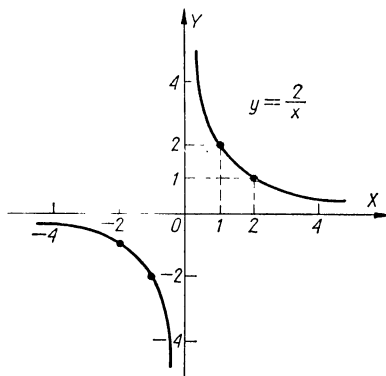
Proporcjonalność odwrotna. Funkcja

$$y = \frac{k}{x}, \quad (k \neq 0) \quad (22.7)$$

przy czym $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, wyraża zależność zmiennej y od zmiennej x , zwaną *proporcjonalnością odwrotną*.

Wykresem funkcji (22.7) jest linia zwana *hiperbolą*.

Na rys. 22-4 przedstawiono wykres funkcji (22.7) dla $k = 2$.



Rys. 22-4

Z równości (22.7) wynika, że zmienna y jest odwrotnie proporcjonalna do zmiennej x wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn $x \cdot y$ jest stały (równy k) dla każdego $x \neq 0$.

Zamiast równości (22.7) można więc napisać

$$x \cdot y = k \quad (k \neq 0) \quad (22.8)$$

Liczbę k nazywamy *współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej*.

Na przykład długość a jednego boku prostokąta przy ustalonym polu S jest odwrotnie proporcjonalna do długości b drugiego boku, przy czym współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej jest tu S :

$$a \cdot b = S$$

Czas t trwania ruchu jednostajnego przy ustalonej drodze s jest odwrotnie proporcjonalny do prędkości v , przy czym współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej jest tu s :

$$v \cdot t = s$$

Objętość V gazu doskonałego jest przy ustalonej temperaturze odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia p tego gazu

$$p \cdot V = \text{const}$$

Równość ta wyraża treść *prawa Boyle'a – Mariotte'a*.

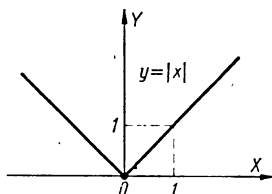
Przykład. 12 robotników wykona pewną pracę w ciągu 15 dni. W ciągu ilu dni wykona tę pracę 4 robotników?

Rozwiązanie. Zakładamy, że zmiana liczby robotników nie zmienia warunków pracy. Czas trwania pracy jest więc odwrotnie proporcjonalny do liczby robotników. Ponieważ iloczyn tych dwóch zmiennych jest stały (por. (22.8)), więc

$$12 \cdot 15 = 4 \cdot x, \text{ czyli } x = 45$$

Odp. 45 dni.

Funkcja $y = |x|$. Ponieważ równość $y = |x|$ oznacza, że $y = -x$ dla $x < 0$ oraz $y = x$ dla $x \geq 0$ (por. str. 45) więc wykres funkcji $y = |x|$ składa się z dwóch półprostych wyprowadzonych z punktu $(0, 0)$ i położonych symetrycznie względem OY – rys. 22-5



Rys. 22-5

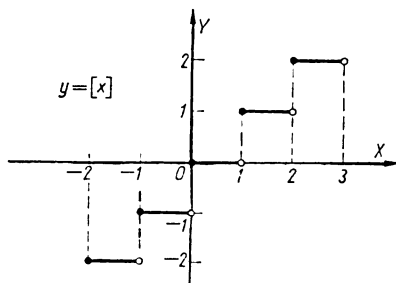
Funkcja $y = [x]$. Symbol $[x]$ oznacza *część całkowitą* liczby x , czyli największą z liczb całkowitych nie większych od x .

Mamy więc

$$[x] \in \mathbf{C} \quad \text{ i } \quad [x] \leq x < [x] + 1$$

Na przykład $[-\sqrt{3}] = -2$, $[0] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$.

Na rys. 22-6 przedstawiony jest wykres tej funkcji.



Rys. 22-6

A oto zadanie tekstowe na znajdowanie funkcji.

Przykład*. Na drodze a metrów przednie koło bryczki obróciło się x razy, a tylne koło wykonało b obrotów mniej. Niech y oznacza różnicę obwodów tylnego i przedniego koła, wyrażoną w centymetrach. Znaleźć zależność y od x .

Rozwiązanie

liczba obrotów tylnego koła $x-b$

droga przebyta przez tylne koło, w metrach a

obwód tylnego koła, w metrach $\frac{a}{x-b}$

obwód przedniego koła, w metrach $\frac{a}{x}$

różnica obwodów kół, w metrach $\frac{a}{x-b} - \frac{a}{x} = \frac{ax - ax + ab}{(x-b)x} = \frac{ab}{x(x-b)}$

Odp. $y = \frac{100 ab}{x(x-b)}$.

Pytania i zadania

- Wyjaśnić znaczenie terminów a) funkcja, b) zmienna niezależna, c) zmienna zależna.
- Znaleźć dziedzinę funkcji
 - $y = \frac{1}{x^2+1}$,
 - $y = \frac{1}{x^2-1}$,
 - $y = \sqrt{1-x^2}$,
 - $y = \sqrt{x^2-1}$.
- Co to jest układ współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie?
- Co to są współrzędne prostokątne punktu?
- Co to jest wykres funkcji?
- Co to znaczy: y jest wprost proporcjonalne do x ? Podać przykład.
- Jaka funkcja wyraża proporcjonalność prostą? Sporządzić wykres tej funkcji.
- Co to znaczy: y jest odwrotnie proporcjonalne do x ? Podać przykład.
- Jaka funkcja wyraża proporcjonalność odwrotną? Sporządzić wykres tej funkcji.
- Co to jest współczynnik proporcjonalności a) prostej, b) odwrotnej?
- W której ćwiartce płaszczyzny odcięta oraz rzędna punktu mają a) taki sam znak, b) różne znaki?
- Narysować punkty: $A(2, 1)$, $B(-3, 2)$, $C(0, -2)$, $D(2, -1)$.
- Wykreślić funkcję a) $y = |x-1|$, b) $y = |2x+5|$.
- Wykreślić funkcję a) $y = [x+2]$, b) $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.
- Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. Obliczyć
 - $f(1)$,
 - $f(-3)$,
 - $f(a)$,
 - $f\left(\frac{1}{a}\right)$,
 - $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

16. Znaleźć dziedzinę i sporządzić wykres funkcji

a) $y = \sqrt{x}$, b) $y = \sqrt[3]{x}$, c) $y = \sqrt[4]{x}$, d) $y = \sqrt{x^2}$.

17. Sporządzić wykres funkcji stałej $y = k$ dla a) $k = -2$, b) $k = 0$, c) $k = 1$.

18. Długości dwóch boków prostokąta wynoszą odpowiednio a cm i b cm. Każdy bok zwiększono o x cm. Wyrazić przyrost y pola za pomocą x .

19*. Dany jest prostokąt o bokach a i b , przy czym $a > 2b$. Długość boku b zwiększono o x , długość boku a zmniejszono o $2x$. Wyrazić przyrost y pola jako funkcję zmiennej x . Dla jakiej wartości $x \neq 0$ pole nie ulegnie zmianie?

20. Rura dostarcza do zbiornika $116\frac{2}{3}$ litra woły w ciągu 7 minut. Ile wody dostarczy ta rura w ciągu 15 minut?

21. Samochód ciężarowy zużywa na trasie 35 km 11,2 l benzyny. Ile benzyny zużywa ten samochód na trasie 10 km?

22. Wiadomo, że $a:b = c:d$. Wyprowadzić następujące proporcje

a) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, b) $\frac{c-d}{a-b} = \frac{d}{b}$ dla $a \neq b$, c) $\frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d}$.

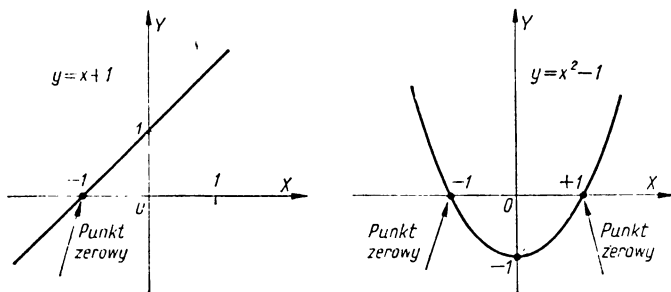
23*. Zbiornik napełniają trzy pompy pracujące jednocześnie. Pierwsza z nich pracując sama, napełnia zbiornik w czasie 8 godzin, druga w czasie 6 godzin trzecia w czasie x godzin. Znaleźć zależność czasu y napełniania zbiornika od x . Sporządzić wykres.

24*. Wykreślić funkcję $y = x + \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

23. Właściwości funkcji

Definicja. *Punkt zerowy (miejsce zerowe) funkcji* jest to taka wartość argumentu, dla której wartość funkcji jest równa zero.

Na przykład funkcja $y = x + 1$ ma tylko jeden punkt zerowy: jest nim liczba -1 . Funkcja $y = x^2 - 1$ ma dwa punkty zerowe, a mianowicie -1 i $+1$. Na rys. 23-1 przedstawiono wykresy tych dwóch funkcji.



Rys. 23-1

Jeżeli liczba x_0 jest punktem zerowym funkcji f , to $f(x_0) = 0$, więc punkt $(x_0, f(x_0))$ należy jednocześnie do wykresu funkcji f i do osi OX .

Definicja. Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze X , gdy dla każdych dwóch liczb x_1 i x_2 z tego zbioru

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (23.1)$$

Funkcja rosnąca przyporządkowuje większej wartości zmiennej niezależnej większą wartość zmiennej zależnej.

Przykład. Wykazać, że funkcja

$$y = \frac{x}{1+x}, \quad \text{gdzie} \quad x \in (-1; +\infty) \quad (23.2)$$

jest rosnąca w swej dziedzinie.

Rozwiązanie. Niech

$$x_1 \in (-1; +\infty), \quad x_2 \in (-1; +\infty), \quad \text{oraz} \quad x_1 < x_2 \quad (23.3)$$

Wystarczy udowodnić, że

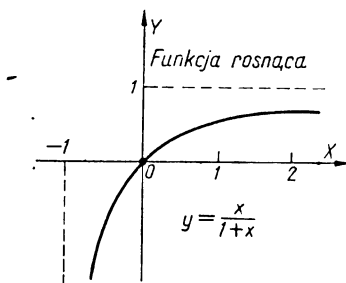
$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad (23.4)$$

Ponieważ

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2} - \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2 - x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}$$

więc z uwagi na warunki (23.3) nierówność (23.4) jest spełniona.

Na rys. 23-2 przedstawiony jest wykres funkcji (23.2).



Rys. 23-2

Definicja. Funkcję f nazywamy malejącą w zbiorze X , gdy dla każdych dwóch liczb x_1 i x_2 z tego zbioru

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (23.5)$$

Zwracamy uwagę, że kierunek nierówności między wartościami funkcji jest w implikacji (23.5) przeciwny niż w implikacji (23.1): większej wartości argumentu przyporządkowana jest tu mniejsza wartość funkcji.

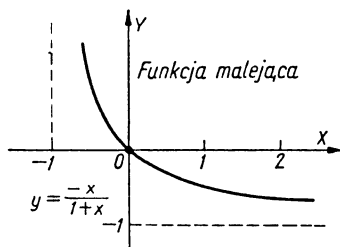
Na przykład funkcja

$$y = \frac{-x}{1+x}, \quad \text{gdzie } x \in (-1; +\infty) \quad (23.6)$$

jest malejąca w swej dziedzinie, ponieważ dla każdych dwóch liczb x_1, x_2 z przedziału $(-1; +\infty)$ spełniających warunek $x_1 < x_2$, mamy

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{-x_2}{1+x_2} - \frac{-x_1}{1+x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{(1+x_2)(1+x_1)} < 0$$

Na rys. 23-3 przedstawiony jest wykres funkcji (23.6).



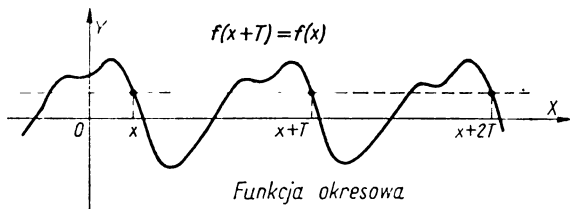
Rys. 23-3

Definicja. Funkcję f nazywamy *okresową*, gdy istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdej liczby x z dziedziny funkcji f liczba $x+T$ także należy do tej dziedziny, oraz

$$f(x+T) = f(x) \quad (23.7)$$

Liczbę T nazywamy *okresem* funkcji f .

Interpretacja geometryczna tej definicji przedstawiona jest na rys. 23-4.



Rys. 23-4

Najmniejszy okres dodatni (jeżeli istnieje) nazywamy okresem *zasadniczym* lub *podstawowym*.

Na przykład funkcja $y = \sin x$ jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π . Każda liczba $2\pi \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{C} - \{0\}$, jest także okresem tej funkcji, np. $4\pi, 6\pi$.

Przykład. Znaleźć okres podstawowy funkcji

$$y = \cos 4x \quad (23.8)$$

Rozwiązanie. Podstawmy $4x = u$. Funkcja $\cos u$ ma okres podstawowy 2π , więc $4T = 2\pi$, czyli $T = \frac{\pi}{2}$.

Odp. $\frac{\pi}{2}$.

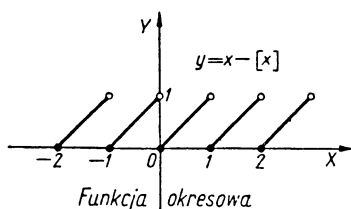
Każda liczba (różna od zera) jest okresem każdej funkcji stałej, natomiast żadna funkcja stała nie ma okresu podstawowego, ponieważ nie istnieje najmniejsza liczba dodatnia.

Przykład. Funkcja

$$y = x - [x] \quad (23.9)$$

jest okresowa i ma okres podstawowy równy 1.

Na rys. 23-5 przedstawiony jest wykres tej funkcji (por. rys. 22-6)

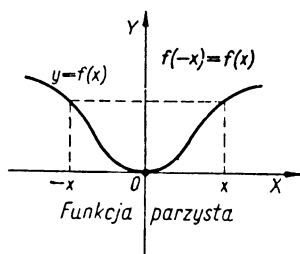


Rys. 23-5

Definicja. Funkcję f nazywamy *parzystą*, gdy dla każdej liczby x z dziedziny funkcji f liczba przeciwna $-x$ także należy do tej dziedziny, oraz

$$f(-x) = f(x) \quad (23.10)$$

Interpretację geometryczną tej definicji przedstawia rys. 23-6.



Rys. 23-6

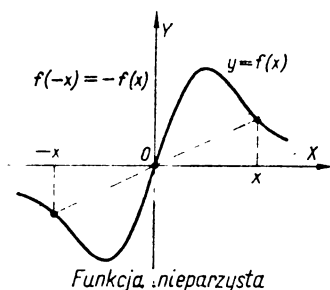
Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi rzędnych. Funkcjami *parzystymi* są na przykład

$$\begin{array}{lll} y = \cos x, & \text{ponieważ} & \cos(-x) = \cos x \\ y = x^2, & \text{ponieważ} & (-x)^2 = x^2 \\ y = x^4 + \frac{1}{x^2}, & \text{ponieważ} & (-x)^4 + \frac{1}{(-x)^2} = x^4 + \frac{1}{x^2} \end{array}$$

Definicja. Funkcję f nazywamy *nieparzystą*, gdy dla każdej liczby x z dziedziny funkcji f liczba przeciwna $-x$ także należy do tej dziedziny, oraz

$$f(-x) = -f(x) \quad (23.11)$$

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu (rys. 23-7).



Rys. 23-7

Funkcjami nieparzystymi są na przykład

$$y = \sin x, \quad \text{ponieważ} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$y = x^3, \quad \text{ponieważ} \quad (-x)^3 = -x^3$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad \text{ponieważ} \quad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Zwracamy uwagę, że funkcje parzyste i nieparzyste nie wyczerpują wszystkich funkcji. Nie każda funkcja, która nie jest parzysta jest nieparzysta. Podobnie, nie każda funkcja, która nie jest nieparzysta jest parzysta. Istnieją funkcje, które nie są parzyste i nie są nieparzyste. Na przykład

$$y = x + 1 \quad (23.12)$$

Przesunięcie wykresu funkcji. Z geometrii wiadomo, że przesunąć figurę F o wektor $\vec{v}$ znaczy to: przesunąć każdy punkt tej figury o ten wektor.

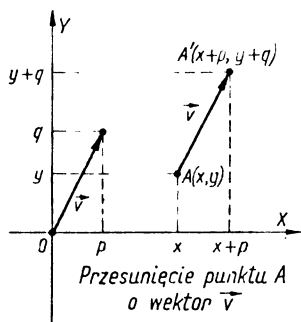
Jeżeli punkt $A(x, y)$ przesuniemy o wektor $\vec{v} = [p; q]$, to otrzymamy punkt $A'(x+p, y+q)$. Przesunięcie takie pokazane jest na rys. 23.8.

Jeżeli znamy linię L stanowiącą wykres funkcji $y = f(x)$, to wykres funkcji

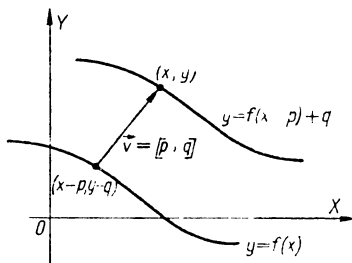
$$y = f(x-p) + q \quad (23.13)$$

znajdziemy przesuwając tę linię o wektor $\vec{v} = [p; q]$. Istotnie, współrzędne x, y każdego punktu tej przesuniętej linii mają tę właściwość, że różnice $x-p$ i $y-q$ są współrzędnymi pewnego punktu linii L , (rys. 23-9) a więc spełniają związek $y-q = f(x-p)$. Stąd dostajemy równość (23.13).

Przykład. Sporządzić wykres funkcji



Rys. 23-8



Rys. 23-9

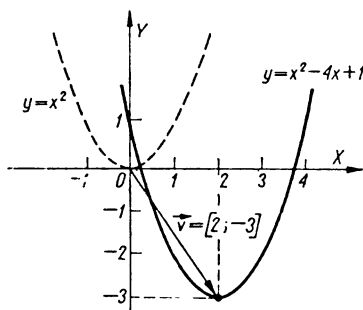
$$y = x^2 - 4x + 1$$

Rozwiązanie. Mamy tu

$$y = (x-2)^2 - 3 \quad (23.14)$$

więc szukaną linią jest wykres paraboli $y = x^2$, przesunięty o wektor $\vec{v} = [2; -3]$.

Odp. Rys. 23-10.



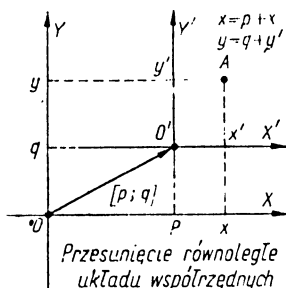
Rys. 23-10

Wprowadzenie nowego układu współrzędnych. W ostatnim przykładzie, a także w wielu innych przypadkach, dogodnie jest wprowadzić nowy układ współrzędnych prostokątnych, przesunięty równolegle względem układu OXY . W tym celu wybieramy punkt O' – początek nowego układu – i prowadzimy przezeń oś $O'X'$ zgodnie równoległą do OX , oraz oś $O'Y'$ zgodnie równoległą do OY . Jeżeli współrzędnymi punktu O' w układzie OXY są odpowiednio p i q , to między współrzędnymi (x, y) oraz współrzędnymi (x', y') tego samego punktu w układzie $O'X'Y'$, zachodzą następujące związki (por. rys. 23-11)

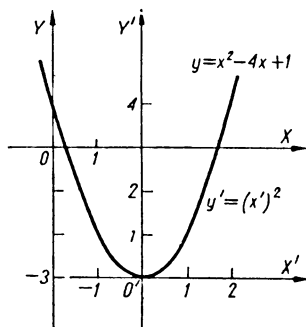
$$\begin{aligned} x &= p + x' \\ y &= q + y' \end{aligned} \quad (23.15)$$

Równość (23.13) można więc zastąpić taką równością: $y' = f(x')$.

Na przykład w celu sporządzenia wykresu funkcji (23.14) wprowadzamy nowy układ współrzędnych $O'X'Y'$, umieszczając jego początek O' w punkcie $(2, -3)$, a następnie wykreślamy w tym układzie parabolę $y' = (x')^2$ – rys. 23-12.



Rys. 23-11



Rys. 23-12

Zwracamy uwagę, że ta sama parabola jest w układzie OXY wykresem funkcji $y = x^2 - 4x + 1$, natomiast w układzie $O'X'Y'$ – gdzie $O' (2, -3)$ – wykresem funkcji $y' = (x')^2$.

Pytania i zadania

- Co to jest *punkt zerowy* funkcji? Podać interpretację geometryczną.
- Podać określenie i przykłady *funkcji rosnącej*.
- Udowodnić, że funkcja $y = x^2$ jest rosnąca na dodatniej półosi.
- Podać określenie i przykłady *funkcji malejącej*.
- Udowodnić, że funkcja $y = x^2$ jest malejąca na ujemnej półosi.
- Podać określenie *funkcji okresowej*. Zapisać tę definicję korzystając z symbolów logiki. Co to jest *okres podstawowy*?
- Znaleźć okres podstawowy i naszkicować wykres funkcji
 - $y = \sin 3x$,
 - $y = \cos \frac{x}{2}$,
 - $y = \operatorname{tg} 2x$,
 - $y = \operatorname{ctg} 6x$,
 - $y = x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$,
 - $y = 3$,
 - $y = \frac{1}{\sin x}$,
 - $y = |\sin x|$.
- Podać określenie, przykład, oraz interpretację geometryczną funkcji a) *parzystej*, b) *nieparzystej*.
- * Udowodnić, że jeżeli liczba p jest okresem (niekoniecznie podstawowym) funkcji f , to dla każdego $k \in \mathbb{N}$ liczba $k \cdot p$ jest także okresem tej funkcji.
- * Udowodnić, że każdą funkcję f , której dziedziną jest zbiór położony na osi odciętych symetrycznie względem punktu O można przedstawić jako sumę dwóch składników, z których jeden jest funkcją parzystą, drugi zaś – nie-

parzystą. Przedstawić w ten sposób funkcję a) $y = x + 1$, b) $y = \frac{1}{x}$,

c) $y = x^3 + x^2 - x + 2$.

11. Wyjaśnić na czym polega przesunięcie wykresu funkcji. Jak można znaleźć wykres funkcji $y = f(x-p) + q$, gdy znany jest wykres funkcji $y = f(x)$?

12. Sporządzić wykres funkcji

a) $y = 3x + 2$, na podstawie wykresu $y = 3x$,

b) $y = 2(x+1)^2 + 1$, na podstawie wykresu $y = 2x^2$,

c)* $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 1}$, na podstawie wykresu $y = \frac{1}{x^2}$,

d)* $y = x - [x - 2] + 1$.

13. Wyjaśnić, na czym polega równoległe przesunięcie układu. Podać związek między współrzędnymi w układzie pierwotnym i w układzie przesuniętym.

14*. Dana jest funkcja $y = \sqrt{x-1}$. Sporządzić wykres tej funkcji w układzie OXY , a następnie w układzie $O'X'Y'$, jeżeli $O' (1, 0)$. Jaka jest dziedzina tej funkcji na OX , a jaka na $O'X'$?

24. Równania i nierówności

Na wstępie przypomnimy kilka pojęć dotyczących równań i nierówności z jedną zmienną liczbową, zwaną *niewiadomą*.

Definicja. Rozwiązanie równania lub nierówności jest to każda liczba spełniająca odpowiednio to równanie lub tę nierówność.

Rozwiązanie równania nazywamy też *pierwiastkiem* tego równania.

Zbiór rozwiązań równania lub nierówności jest to zbiór utworzony ze wszystkich rozwiązań tego równania lub odpowiednio tej nierówności.

Rozwiązać równanie lub nierówność, znaczy to znaleźć zbiór rozwiązań tego równania lub odpowiednio tej nierówności. Zbiór rozwiązań może być *skończony*, *nieskończony* albo *pusty*. Ten ostatni przypadek ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy równanie lub nierówność są sprzeczne, a więc gdy nie mają w ogóle rozwiązań.

Przykład. Równanie

$$x^2 - 1 = 0$$

ma w zbiorze $\mathbf{R}$ dwa rozwiązania, czyli dwa pierwiastki, a mianowicie -1 oraz $+1$. Zbiorem rozwiązań jest tu zbiór $\{-1, 1\}$.

Przykład. Nierówność

$$x^2 - 1 < 0$$

ma w zbiorze $\mathbf{R}$ nieskończenie wiele rozwiązań. Zbiorem rozwiązań jest tu przedział $(-1; 1)$.

Przykład. Równanie

$$x^2 + 1 = 0$$

nie ma w zbiorze $\mathbf{R}$ rozwiązań. Zbiorem rozwiązań jest tu zbiór pusty $\emptyset$.

Rozwiązując równanie lub nierówność posługujemy się często *metodą równań równoważnych* lub odpowiednio *metodą nierówności równoważnych*.

Przypominamy (por. str. 21), że dwa równania lub dwie nierówności są równoważne, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Metoda równań (nierówności) równoważnych polega na takim przekształceniu danego równania (nierówności), na skutek którego dostajemy równanie (nierówność) równoważne poprzedniemu i łatwiejsze do rozwiązania. Jeżeli to nowe równanie (nierówność) rozwiążemy, to tym samym rozwiążemy i równanie (nierówność) dane.

Stosując tę metodę korzystamy często z następujących dwóch twierdzeń.

Twierdzenie 1 (o działaniach na równości). Dla każdego c

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c \quad (24.1)$$

oraz

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c \quad (24.2)$$

przy czym dla każdego $c \neq 0$

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c \quad (24.3)$$

Twierdzenie 2 (o działaniach na nierówności). Dla każdego c

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \quad (24.4)$$

a ponadto dla każdego dodatniego c

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad (24.5)$$

zaś dla każdego ujemnego c

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c \quad (24.6)$$

Przypuśćmy, że dane jest pewne wyrażenie zawierające zmienną i określone w tej samej dziedzinie co równanie (lub nierówność), w którym ta zmienna jest niewiadomą.

Z twierdzenia 1 wynika, że jeżeli
do obu stron równania dodamy (albo od obu stron odejmiemy) tę samą liczbę lub to samo wyrażenie

albo

obie strony równania pomnożymy (albo podzielimy) przez tę samą liczbę różną od zera lub przez to samo wyrażenie nie przyjmujące wartości zero,
to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Z twierdzenia 2 wynika natomiast, że jeżeli
do obu stron nierówności dodamy (albo od obu stron odejmiemy) tę samą liczbę lub to samo wyrażenie

albo

obie strony nierówności pomnożymy (albo podzielimy) przez tę samą liczbę dodatnią lub przez to samo wyrażenie przyjmujące tylko wartości dodatnie

albo

obie strony nierówności pomnożymy (albo podzielimy) przez tę samą liczbę ujemną lub przez to samo wyrażenie przyjmujące tylko wartości ujemne i zmienimy zwrot nierówności,

to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$2x - 6 = 3 - x$$

Rozwiązanie

$$2x - 6 = 3 - x \Leftrightarrow 2x = 9 - x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$$

do obu stron do obu stron obie strony
dodałmy 6 dodałmy x podzieliliśmy
przez 3

Odp. $x = 3$.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$-2x + 6 < 0$$

Rozwiązanie

$$-2x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$$

obie strony do obu stron obie strony
pomnożyliśmy dodałmy 6 podzieliliśmy
przez -1 przez 2

Odp. $(3; +\infty)$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2 \quad (24.7)$$

Rozwiązanie

$$2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Równanie $0 = 0$ jest tożsamościowe, więc równanie (24.7) jest także tożsamościowe, gdyż jest mu równoważne.

Odp. $\mathbb{R}$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$2x = (x + 1)^2 - x^2 \quad (24.8)$$

Rozwiązanie

$$2x = (x + 1)^2 - x^2 \Leftrightarrow 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

Równanie $0 = 1$ jest sprzeczne, więc równanie (24.8) jest także sprzeczne, gdyż jest mu równoważne.

Odp. Równanie (24.8) jest sprzeczne.

Obok metody równań równoważnych, stosujemy także do rozwiązywania równań *metodę analizy starożytnych*.

Metoda analizy starożytnych polega na takim przekształceniu danego równania, zwanego tu *wyjściowym*, na skutek którego dostajemy równanie łatwiejsze do rozwiązania i mające tę właściwość, że spełnia je każdy pierwiastek równania wyjściowego (ale niekoniecznie na odwrót). Otrzymane równanie nazywamy *wynikowym*, gdyż wynika ono z równania wyjściowego. Równania: wyjściowe i wynikowe, mogą nie być równoważne: wśród pierwiastków równania wynikowego mogą znajdować się takie, które nie spełniają równania wyjściowego. Są to tzw. *pierwiastki obce* (dla równania wyjściowego). Przypuśćmy, że rozwiązaliśmy równanie wynikowe. Jedynie wśród rozwiązań tego równania mogą znajdować się pierwiastki równania wyjściowego. Aby rozwiązać równanie wyjściowe, należy więc wyeliminować ze zbioru rozwiązań równania wynikowego pierwiastki obce. W tym celu sprawdzamy, czy znalezione pierwiastki równania wynikowego spełniają równanie wyjściowe i odrzucamy te, które go nie spełniają. W ten sposób znajdujemy zbiór rozwiązań równania wyjściowego.

Podkreślamy, że sprawdzenie (weryfikacja pierwiastków równania wynikowego) jest niezbędne w metodzie analizy starożytnych.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x^2+x+1} = -x \quad (24.9)$$

Rozwiązanie

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x^2+x+1} = -x \Rightarrow x^2+x+1 = x^2 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 & & \\ \text{równanie} & & \text{równanie} \\ \text{wyjściowe} & & \text{wynikowe} \end{array}$$

Liczbę -1 podstawiamy na miejsce x do równania (24.9). Dostajemy $\sqrt{1} = -(-1)$, czyli $\sqrt{1} = 1$, a więc równość prawdziwą.

Odp. $x = -1$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x^2+x+1} = x \quad (24.10)$$

Rozwiązanie

$$\sqrt{x^2+x+1} = x \Rightarrow x^2+x+1 = x^2 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Liczbę -1 podstawiamy na miejsce x do równania (24.10). Dostajemy $\sqrt{1} = -1$, a więc równość fałszywą.

Odp. Równanie (24.10) jest sprzeczne.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x^6+x^2-1} = x^3 \quad (24.11)$$

Rozwiązanie

$$\sqrt{x^6+x^2-1} = x^3 \Rightarrow x^6+x^2-1 = x^6 \Rightarrow x^2-1 = 0$$

Równanie wynikowe ma dwa pierwiastki: $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 1$. Łatwo sprawdzić, że tylko liczba 1 spełnia równanie (24.11).

Odp. $x = 1$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x^2-1} = x \quad (24.12)$$

Rozwiązanie

$$\sqrt{x^2-1} = x \Rightarrow x^2-1 = x^2 \Rightarrow -1 = 0$$

Równanie wynikowe jest sprzeczne, więc równanie wyjściowe także jest sprzeczne.

Odp. Równanie (24.12) jest sprzeczne.

Pytania i zadania

1. Co to jest a) rozwiązanie równania (nierówności), b) pierwiastek równania, c) zbiór rozwiązań równania?
2. Co to znaczy: rozwiązać równanie?
3. Co to są dwa równania (nierówności) równoważne?
4. Opisać metodę równań równoważnych.
5. Podać twierdzenia o działaniach a) na równości, b) na nierówności, oraz wnioski dotyczące przekształcania równości lub nierówności.
6. Opisać metodę analizy starożytnych. Wyjaśnić znaczenie sprawdzenia pierwiastków równania wynikowego. Co to są pierwiastki obce?
7. Czy równanie $x^2 = x$ jest równoważne równaniu $x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$?
8. Czy równanie $\sqrt{x} = x$ jest równoważne równaniu $x = x^2$?
9. Czy równanie $x^2 - x = 0$ jest równoważne równaniu $x - 1 = 0$?
10. Rozwiązać równanie

$$a) \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1} = 1, \quad b) \sqrt{x-7} + \sqrt{5-x} = 3.$$

25. Funkcja, równanie i nierówność liniowa

Definicja. Funkcja liniowa jest to funkcja

$$y = ax + b, \quad x \in R \quad (25.1)$$

Litery a i b oznaczają liczby dane, przy czym a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, natomiast b – wyrazem wolnym.

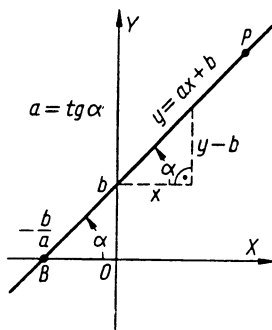
Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa jest funkcją pierwszego stopnia: jej przeciw dziedziną jest zbiór R .

Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest *funkcją stałą*; jej przeciwdziedziną jest zbiór jednostkowy $\{b\}$.

Wykresem funkcji liniowej (25.1) jest prosta przecinająca OY w punkcie o rzędnej b i nachylona do OX pod takim kątem α , że

$$\operatorname{tg} \alpha = a \quad (25.2)$$

(patrz rys. 25-1). Przypominamy, że kąt nachylenia prostej L do OX jest to kąt skierowany $\sphericalangle XBP$, gdzie B jest punktem przecięcia L i OX , zaś P jest dowolnym punktem prostej L o rzędnej dodatniej. Jeżeli $L \parallel OX$, to przyjmujemy $\alpha = 0^\circ$.



Rys. 25-1

Wykres funkcji pierwszego stopnia sporządzamy zazwyczaj tak, że znajdujemy jego punkty wspólne z osiami układu, a następnie prowadzimy przez nie prostą. Dla funkcji (25.1) będą to następujące punkty

$$A(0, b) \quad \text{oraz} \quad B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$$

(por. rys. 25-1).

Zmianie wartości wyrazu wolnego b odpowiada w interpretacji geometrycznej, *przesunięcie równoległe* prostej o kierunku OY , natomiast zmianę współczynnika kierunkowego a odpowiada *obrót* prostej wokół punktu $A(0, b)$.

Wpływ wartości a i b na wykres funkcji liniowej ilustrują rysunki 25-2a b, i c.

Wiele ważnych praw fizyki wyraża się za pomocą funkcji pierwszego stopnia. Na przykład funkcję taką stanowi zależność prędkości v od czasu t w ruchu jednostajnie zmiennym

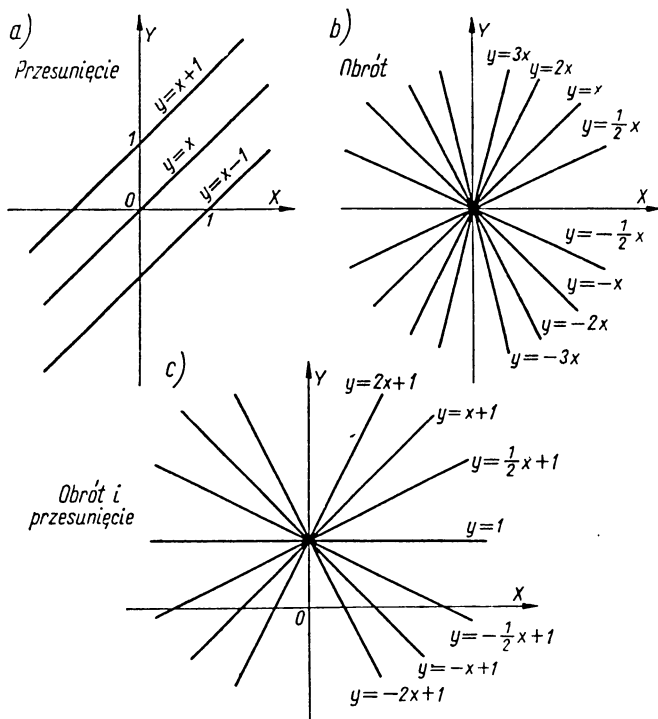
$$v = at + v_0$$

przy czym v_0 oznacza prędkość w chwili 0, natomiast a oznacza przyspieszenie.

Definicja. Równanie

$$ax + b = 0 \quad (25.3)$$

w którym x jest niewiadomą, zaś a i b są to liczby dane, nazywamy *równaniem liniowym z jedną niewiadomą*.



Rys. 25-2

Jeżeli $a \neq 0$, to równanie (25.3) jest równaniem pierwszego stopnia. W tym przypadku mamy

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

więc istnieje dokładnie jedna liczba spełniająca równanie (25.3), a mianowicie

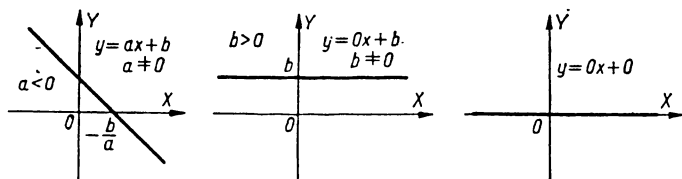
$$x_0 = -\frac{b}{a} \quad (25.4)$$

Równanie pierwszego stopnia ma dokładnie jeden pierwiastek.

Jeżeli $a = 0$ i $b = 0$, to każda liczba spełnia równanie (25.3). Równanie jest więc w tym przypadku tożsamościowe.

Jeżeli $a = 0$ i $b \neq 0$, to żadna liczba nie spełnia równania (25.3). Równanie jest więc sprzeczne.

Na rys. 25-3 przedstawiona jest interpretacja geometryczna każdego z omówionych tu trzech przypadków. Zwracamy uwagę, że pierwiastek równania (25.3) jest punktem zerowym funkcji liniowej $y = ax + b$.



Rys. 25-3

Przykład. Rozwiązać równanie

$$-\frac{17}{19}x + 51 = 0$$

Rozwiązanie

$$-\frac{17}{19}x + 51 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{19}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 57 = 0 \Leftrightarrow x = 57$$

Odp. $x = 57$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\frac{4-x}{x-1} + 1 = \frac{5}{x} \quad (25.5)$$

Rozwiązanie. Ponieważ dzielnik nie może być zerem, więc szukamy pierwiastków w zbiorze $\mathbf{R} - \{0, 1\}$. W tym zbiorze równanie (25.5) jest równoważne równaniu

$$x(4-x) + x(x-1) = 5(x-1)$$

które dostajemy mnożąc (25.5) obustronnie przez $x(x-1)$. Stąd

$$4x - x^2 + x^2 - x = 5x - 5, \quad \text{czyli} \quad -2x + 5 = 0$$

Odp. $x = \frac{5}{2}$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\frac{x-a}{b} - \frac{b-x}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} \quad (25.6)$$

jeżeli a i b są to liczby dane i różne od zera.

Rozwiązanie

$$\frac{x-a}{b} - \frac{b-x}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} \Leftrightarrow a(x-a) - b(b-x) = a^2+b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax - a^2 - b^2 + bx = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a+b)x = 2(a^2+b^2)$$

Jeżeli $a+b \neq 0$, to dzieląc ostatnie równanie obustronnie przez $a+b$ dostajemy jedyny pierwiastek

$$x_0 = \frac{2(a^2+b^2)}{a+b}$$

Jeżeli $a+b=0$, to równanie (25.6) jest równoważne równaniu $0=2(a^2+b^2)$, więc jest sprzeczne, (a i b są różne od zera z założenia).

Odp. $x = \frac{2(a^2+b^2)}{a+b}$, gdy $a+b \neq 0$, równanie sprzeczne, gdy $a+b=0$.

Uwaga. Litery oznaczające liczby dane, nazywamy *parametrami*. W ostatnim przykładzie były dwa parametry: a i b .

Przykład. Ile należy wziąć kg srebra próby 0,7 i ile kg srebra próby 0,9, żeby otrzymać 4 kg stopu próby 0,85?

Rozwiązanie. Niewiadomą ilość srebra próby 0,7 oznaczmy literą x . Srebra próby 0,9 powinno więc być $(4-x)$ kg

czystego srebra jest w stopie $0,7x+0,9(4-x)$

próba otrzymanego stopu wynosi $\frac{0,7x+0,9(4-x)}{4}$

Żądając, żeby próba otrzymanego stopu wynosiła 0,85, otrzymamy równanie z jedną niewiadomą x :

$$\frac{0,7x+0,9(4-x)}{4} = 0,85$$

skąd $3,6-0,2x=3,4$, czyli $0,2x=0,2$, więc $x=1$.

Odp. Należy wziąć 1 kg srebra próby 0,7 i 3 kg srebra próby 0,9.

Wykonamy sprawdzenie otrzymanej odpowiedzi. W jednym kg srebra próby 0,7 i trzech kg srebra próby 0,9 znajduje się łącznie $1 \cdot 0,7 + 3 \cdot 0,9 = 3,4$ kg czystego srebra. Ponieważ stopu mamy łącznie 4 kg, więc jego próba wynosi $\frac{3,4}{4,0} = 0,85$, zgodnie z warunkiem podanym w zadaniu.

Przykład*. Winda zjeżdża w dół ruchem jednostajnym. Po 10 sekundach od początku jej ruchu odrywa się kamyk w punkcie, z którego ruszyła. W momencie uderzenia o wciąż zjeżdżającą windę kamyk ma prędkość trzykrotnie większą niż winda. Obliczyć czas spadania kamyka.

Rozwiązanie. Niech t oznacza szukaną liczbę sekund, v – prędkość windy, g – przyspieszenie ziemskie

prędkość kamyka w chwili uderzenia o windę gt

prędkość windy w tej samej chwili $v = \frac{1}{3}gt$

droga przebyta przez windę do chwili uderzenia $v(10+t) = \frac{1}{3}gt \cdot (10+t)$

droga przebyta przez kamyk do chwili uderzenia
(spadek swobodny) $\frac{gt^2}{2}$

Ponieważ drogi przebyte przez kamyk i przez windę do chwili uderzenia są równe, więc

$$\frac{1}{3}gt(10+t) = \frac{gt^2}{2}$$

skąd, dzieląc obustronnie przez $\frac{gt}{6}$, otrzymamy $2(10+t) = 3t$, czyli $t = 20$.

Odp. 20 sekund.

Przykład*. Od dwóch kawałków stopu o różnej zawartości procentowej miedzi, ważących m i n kG odcięto jednakowe wagowo kawałki i każdy z odciętych kawałków stopiono z resztą drugiego stopu. W otrzymanych stopach stwierdzono jednakową procentową zawartość miedzi. Ile ważył każdy z odciętych kawałków?

Rozwiązanie. Oznaczamy

p – zawartość procentowa miedzi w kawałku o wadze m kG

q – zawartość procentowa miedzi w kawałku o wadze n kG

x – waga w kG każdego z odciętych kawałków.

Ponieważ w otrzymanych stopach stwierdzono jednakową zawartość procentową miedzi, więc

$$\frac{p \cdot x + q \cdot (n-x)}{n} = \frac{q \cdot x + p \cdot (m-x)}{m}$$

Stąd

$$\frac{(p-q)x}{n} + \frac{(p-q)x}{m} = p-q$$

Ponieważ $p \neq q$, więc dzieląc tę równość obustronnie przez $p-q$ dostajemy

$$\frac{x}{n} + \frac{x}{m} = 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{m+n}{n \cdot m} x = 1, \quad \text{więc} \quad x = \frac{n \cdot m}{m+n}$$

Odp. $\frac{nm}{m+n}$ kG.

Nierówność liniowa. Niech a i b oznaczają liczby dane, zaś x – zmienną.

Nierówność, której jedną stronę stanowi $ax+b$, drugą zaś 0, nazywamy *nierównością liniową z jedną niewiadomą x* .

A oto proste przykłady

<i>nierówność</i>	<i>rozwiązanie</i>	<i>odpowiedź</i>
$2x+1 < 0$	$2x+1 < 0 \Leftrightarrow 2x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$
$-3x+9 \leq 0$	$-3x+9 \leq 0 \Leftrightarrow -3x \leq -9 \Leftrightarrow x \geq 3$	$[3; +\infty)$
$4x-12 > 0$	$4x-12 > 0 \Leftrightarrow 4x > 12 \Leftrightarrow x > 3$	$(3; +\infty)$
$7x+98 \geq 0$	$7x+98 \geq 0 \Leftrightarrow 7x \geq -98 \Leftrightarrow x \geq -14$	$[-14; +\infty)$

Rozwiązanie nierówności liniowej jest ściśle związane ze zmiennością funkcji liniowej:

$$y = ax+b \quad (25.7)$$

Jeżeli $a = 0$, to nierówność liniowa jest tożsamościowa, np.

$$2 > 0, \quad 1 \geq 0, \quad -4 \leq 0, \quad 0 \leq 0$$

albo sprzeczna, np.

$$2 < 0, \quad 1 \leq 0, \quad -4 \geq 0, \quad 0 < 0$$

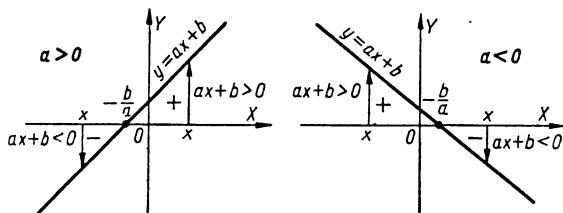
Jeżeli $a \neq 0$, to nierówność liniowa jest *pierwszego stopnia*. Zbiorem rozwiązań takiej nierówności, jest jeden z przedziałów

$$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right), \quad \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$$

albo jeden z przedziałów

$$\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right], \quad \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$$

zależnie od tego, czy nierówność jest *mocna* ($<$, $>$), czy *słaba* ($\leq$, $\geq$) (patrz rys.25-4)



Rys. 25-4

Podamy teraz dalsze przykłady rozwiązywania nierówności liniowych.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$\frac{5+3x}{2} > \frac{4x-10}{3} + x$$

Rozwiązanie

$$\frac{5+3x}{2} > \frac{4x-10}{3} + x \Leftrightarrow 3(5+3x) > 2(4x-10) + 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15+9x > 14x-20 \Leftrightarrow -5x > -35 \Leftrightarrow x < 7$$

Odp. $(-\infty; 7)$.

Przykład. Dla jakich wartości m pierwiastek x_0 równania $2x-m = 3(m-1)-x$ jest większy od 1?

Rozwiązanie. Znajdujemy pierwiastek danego równania

$$x_0 = \frac{4m-3}{3}$$

Żądając, żeby $x_0 > 1$, dostajemy

$$\frac{4m-3}{3} > 1, \quad \text{więc} \quad 4m-3 > 3, \quad \text{czyli} \quad m > \frac{3}{2}$$

Odp. $m > \frac{3}{2}$

Przykład. Rozwiązać układ nierówności

$$\begin{cases} 1 < 3x-8 \\ 3x-8 < 7 \end{cases} \quad (25.8)$$

Rozwiązanie. Należy znaleźć zbiór wszystkich liczb, które spełniają obydwie nierówności układu (25.8).

Zbiór rozwiązań

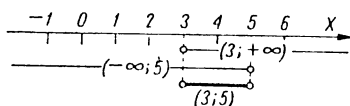
pierwszej nierówności: $(3; +\infty)$

drugiej nierówności: $(-\infty; 5)$

Zbiór rozwiązań układu (25.8) jest iloczynem tych dwóch przedziałów:
 $(-\infty; 5) \cap (3; +\infty)$, czyli przedziałem $(3; 5)$.

Odp. $(3; 5)$.

Na rys. 25-5 przedstawiona jest interpretacja geometryczna tego przykładu.



Rys. 25-5

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$(x^2 + 1)(3x - 5) < 0 \quad (25.9)$$

Rozwiązanie. Ponieważ dla każdego x jest $x^2 + 1 > 0$, więc nierówność (25.9) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $3x - 5 < 0$, czyli gdy $x < \frac{5}{3}$.

Odp. $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$.

Przykład. Z dwóch miejscowości odległych od siebie o 29 km wyruszyło jednocześnie dwóch turystów idąc naprzeciw siebie ze stałą prędkością 4 km/h¹⁾ aż do chwili spotkania. Po jakim czasie odległość między turystami będzie mniejsza od 7 km?

¹⁾ 1 h = 1 godzina (oznaczenie z układu SI).

Rozwiązanie. Po upływie x godzin odległość między turystami zmniejszy się o $(4x+4x)$ km, czyli o $8x$ km, będzie więc wynosić $(29-8x)$ km. Żądając, aby odległość ta była mniejsza od 7 km, otrzymamy nierówność

$$29-8x < 7, \quad \text{czyli} \quad x > \frac{11}{4}$$

Odp. Po upływie 2 godzin i 45 minut.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$\frac{3x-2}{x-4} \leq 1 \quad (25.10)$$

Rozwiązanie

$$\frac{3x-2}{x-4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-4} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-4} \leq 0$$

Nierówność

$$\frac{x+1}{x-4} \leq 0$$

jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x+1 \geq 0 \quad \text{i} \quad x-4 < 0 \quad (25.11)$$

lub

$$x+1 \leq 0 \quad \text{i} \quad x-4 > 0 \quad (25.12)$$

Zbiorem rozwiązań układu (25.11) jest przedział $[-1; 4)$, natomiast układu (25.12) – zbiór pusty.

Odp. $[-1; 4)$.

Uwaga. Jeżeli w trakcie rozwiązywania nierówności pomnożymy obie jej strony przez czynnik zawierający zmienną, to łatwo możemy popełnić pomyłkę. Wynika to stąd, że czynnik zawierający zmienną może zmieniać znak, a od znaku zależy kierunek nierówności (por. (24.5) i (24.6)). Na skutek tego nierówność, którą napiszemy po takim pomnożeniu może nie być równoważna poprzedniej. Na przykład mnożąc nierówność (25.10) obustronnie przez $x-4$ i zachowując poprzedni kierunek nierówności, dostaniemy $3x-2 \leq x-4$, czyli $2x \leq -2$, więc $x \leq -1$. Odpowiedź, do której prowadzi ten rachunek, czyli $(-\infty; -1]$, jest błędna, gdyż jak wykazaliśmy, zbiór rozwiązań nierówności (25.10) jest przedziałem $[-1; 4)$. Zwróćmy uwagę, że mnożąc nierówność (25.10) obustronnie przez $x-4$ i zachowując poprzedni kierunek nierówności ograniczyliśmy się do takich wartości x , dla których spełniony jest warunek $x-4 > 0$, czyli $x > 4$ i otrzymaliśmy stąd warunek $x \leq -1$, niezgodny z poprzednim. Wynika stąd, że nierówność (25.10) nie ma rozwiązań wśród liczb większych od 4. Liczba 4 nie spełnia nierówności (25.10), gdyż dla $x = 4$ lewa strona tej nierówności nie jest określona. Jeżeli $x < 4$, to $x-4 < 0$, więc mnożąc nierówność (25.10) obustronnie przez $x-4$ należy jednocześnie zmienić kierunek nierówności. Stąd $3x-2 \geq x-4$, więc $x \geq -1$, a ponieważ zajmujemy się przypadkiem, gdy $x < 4$, więc ostatecznie $-1 \leq x < 4$, zgodnie

z rozwiązaniem uzyskanym poprzednio. Dyskusja znaku czynnika, przez który mnożymy obie strony nierówności może okazać się zawiła. Łatwo w niej popełnić pomyłkę i dlatego należy unikać mnożenia obu stron nierówności przez czynnik zawierający zmienną, który nie jest stałego znaku.

Nierówność z wartością bezwzględną. Z określenia wartości bezwzględnej (por. str. 45) wynika, że dla każdego $a > 0$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad (25.13)$$

oraz

$$|x| > a \Leftrightarrow [(x < -a) \vee (x > a)] \quad (25.14)$$

Na przykład

$$|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$$

$$|x| > 1 \Leftrightarrow [(x < -1) \vee (x > 1)]$$

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$|2x-1| < 2 \quad (25.15)$$

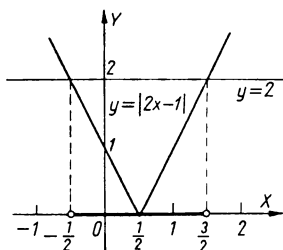
Rozwiązanie. Na podstawie (25.13) stwierdzamy, że nierówność (25.15) jest równoważna układowi nierówności:

$$-2 < 2x-1 < 2$$

Stąd

$$x > -\frac{1}{2} \quad \text{ i } \quad x < \frac{3}{2}$$

Odp. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$



Rys. 25-6

Na rys. 25-6 przedstawiona jest interpretacja geometryczna nierówności (25.15) i jej rozwiązania. Sporządzone na tym rysunku wykresy obu stron nierówności mogą stanowić podstawę do znalezienia zbioru jej rozwiązań *metodą graficzną*, która w wielu przypadkach jest łatwiejsza niż metoda rachunkowa.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$|2-3x| > 2 \quad (25.16)$$

Rozwiązanie. Nierówność (25.16) jest na podstawie (25.14) równoważna następującej alternatywie nierówności

$$2-3x < -2 \quad \text{lub} \quad 2-3x > 2$$

Stąd

$$x > \frac{4}{3} \quad \text{lub} \quad x < 0$$

$$\text{Odp. } (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right).$$

Pytania i zadania

1. Podać określenie *funkcji liniowej*. Czy każda funkcja liniowa jest funkcją pierwszego stopnia?
2. Podać interpretację geometryczną parametrów a i b we wzorze $y = ax + b$.
3. Co to jest *współczynnik kierunkowy*? Co to jest kąt nachylenia prostej do OX ?
4. Wykonać wykres funkcji

$$\text{a) } y = -3x + 1 \quad \text{b) } y = 2x - 3, \quad \text{c) } y = -2x - 1, \quad \text{d) } y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

5. Jakie równanie nazywamy *liniowym*? Czy każde równanie liniowe jest równaniem pierwszego stopnia i na odwrót?
6. Kiedy równanie liniowe $ax + b = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek, kiedy jest tożsamościowe a kiedy jest sprzeczne? Podać interpretację geometryczną każdego z tych trzech przypadków.
7. Rozwiązać równanie

$$\text{a) } \frac{5x}{9} - \frac{4}{15} = \frac{2x-1}{3}, \quad \text{b) } (x+2)(x-3) = (x-5)(x-6),$$

$$\text{c) } \frac{3-x}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 2, \quad \text{d) } \frac{3}{x^2-1} - \frac{2x}{x+1} = \frac{5x}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1}.$$

8. Masa wodoru zawartego w wodzie stanowi 12,5% masy zawartego w niej tlenu. Ile kg wodoru i ile kg tlenu znajduje się w 8,1 kg wody?
- 9*. Jeden zbiornik zawiera mieszaninę spirytusu z wodą w stosunku 2:3, drugi — w stosunku 3:7. Ile litrów należy wziąć z każdego zbiornika, żeby otrzymać 12 litrów mieszaniny o stosunku spirytusu do wody jak 3:5?
- 10*. Pewien stop zawiera miedź i cynk w stosunku 1:2, drugi — w stosunku 2:3. Ile kg pierwszego stopu i ile kg drugiego stopu należy połączyć, żeby otrzymać 44 kg stopu o stosunku miedzi do cynku jak 17:27?
11. Ojciec ma 42 lata, a syn 12. Za ile lat ojciec będzie dwa razy starszy od syna?
- 12*. Jeden kran napełnia zbiornik o 2 h dłużej, a drugi o $4\frac{1}{2}$ h dłużej niż oba krany jednocześnie. W jakim czasie napełnia zbiornik każdy kran oddzielnie?
13. Ile gramów stopu 30% i ile gramów stopu 70% należy mieszać, żeby otrzymać 500 gramów stopu 60%?

- 14*. Z dwóch miejscowości A i B wyszli jednocześnie dwaj turyści idący ze stałymi prędkościami. Pierwszy przeszedł drogę z A do B i wrócił zaraz do A , drugi przeszedł z B do A i wrócił zaraz do B . Turyści minęli się pierwszy raz w odległości a km od A , drugi raz w odległości b km od B . Jaka jest odległość od A do B ?

15*. Rozwiązać równanie

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a+1}{b},$$

jeżeli a i b są to liczby dane, przy czym $a \neq b$ i $b \neq 0$.

16. Rozwiązać nierówność

- a) $4x-3 < x+6$, b) $\frac{4x+1}{2} > \frac{x+4}{5}$, c) $(x-4)^2+6 > x^2+2x+2$,
 d) $(3x-1)^2+(4x-1)^2 < (5x-1)^2$, e) $(x+5)(4-x) > 0$,
 f) $\frac{3x-15}{x-2} < 0$, g) $\frac{2x+1}{x+2} > 1$, h) $\frac{5x-1}{x+6} < 1$.

17*. Rozwiązać rachunkowo i graficznie nierówności

- a) $|x| \geq 1$, b) $|x-1| < 2$, c) $|2-x| > 1$, d) $|x|+x \geq 3$.

18. Znaleźć wszystkie liczby całkowite, które spełniają układ nierówności

$$6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \quad \text{ i } \quad \frac{8x+3}{2} < 2x+25$$

19. Liczba dziesiątek w liczbie dwucyfrowej jest o 2 mniejsza od liczby jednostek.

Znaleźć tę liczbę jeśli wiadomo, że jest ona większa od 25, ale mniejsza od 39.

20. Rozwiązać w pamięci nierówność $|x| > x$.

26. Równanie lub nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Dotychczas rozpatrywaliśmy równania lub nierówności z jedną niewiadomą, np.

$$2x+3=0, \quad x^2-x < 0, \quad x^2=x+1, \text{ itp.}$$

Obecnie zajmiemy się równaniami lub nierównościami z *dwiema niewiadomymi*, np.

$$x+2y=1, \quad x^2+y^2 > 4, \quad x+2xy=1$$

Definicja. Mówimy, że para liczb (a, b) *spełnia* równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi x, y , jeżeli podstawiając do tego równania (lub odpowiednio nierówności) a zamiast x , oraz b zamiast y , dostaniemy równość (nierówność) prawdziwą.

Definicja. Każdą parę liczb spełniającą równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi nazywamy *rozwiązaniem* tego równania lub odpowiednio tej nierówności.

Na przykład para (1, 2) jest rozwiązaniem (jedynym) równania

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0 \quad (26.1)$$

zaś nierówność

$$x^2 + 4y^2 + 1 < 0 \quad (26.2)$$

nie ma rozwiązań czyli jest *sprzeczna*. Równanie

$$y = x + 1 \quad (26.3)$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań: każda para $(x, x+1)$ — gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą — spełnia to równanie. Równanie

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \quad (26.4)$$

jest *tożsamościowe*: spełnia je każda para liczb rzeczywistych. Nierówność

$$x^2 + y^2 < 1 \quad (26.5)$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań, ale nie jest tożsamościowa.

Definicja. Wykres równania lub nierówności z dwiema niewiadomymi jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają odpowiednio to równanie lub tę nierówność.

Na przykład wykresem równania (26.1) jest punkt P (1, 2), wykresem nierówności (26.2) jest zbiór pusty, równania (26.3) — prosta, równania (26.4) — cała płaszczyzna, wykresem nierówności (26.5) jest wnętrze koła o środku w początku układu i o promieniu 1.

Definicja. Dwa równania lub nierówności z dwiema niewiadomymi nazywamy *równoważnymi*, jeżeli mają taki sam zbiór rozwiązań, czyli gdy mają taki sam wykres.

Równanie lub nierówność pierwszego stopnia. Równanie

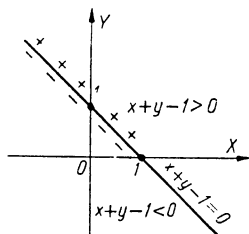
$$ax + by + c = 0 \quad (26.6)$$

w którym a, b i c oznaczają liczby dane, przy czym co najmniej jedna z liczb a i b jest różna od zera, zaś x i y są to zmienne, nazywamy *równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi* x i y . Wykresem równania (26.6) jest w tym przypadku **prosta**.

Na przykład wykres równania

$$x + y - 1 = 0 \quad (26.7)$$

przedstawiony jest na rys. 26-1.



Rys. 26-1

Jeżeli w równaniu pierwszego stopnia (26.6) zastąpimy znak równości (=) znakiem nierówności (< albo >), to dostaniemy *nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi*. Wykresem tej nierówności jest jedna strona prostej o równaniu (26.6). Na przykład wykresem nierówności

$$x+y-1 < 0$$

jest ta półpłaszczyzna wyznaczona przez prostą o równaniu (26.7), w której leży początek układu współrzędnych — patrz rys. 26-1.

Pytania i zadania

1. Co to jest a) równanie, b) nierówność, pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi?
2. Co to jest *rozwiązanie* równania lub nierówności z dwiema niewiadomymi?
3. Wykreślić równanie
a) $x-y+1=0$, b) $2x+3y-6=0$, c) $x-4=0$, d) $y+1=0$.
4. Wykreślić nierówność
a) $x < y$, b) $x+1 > 2y$, c) $y < 3x+2$.
5. Znaleźć kilka rozwiązań równania
a) $y = x^2 - 4$, b) $y = 1 - x^2$. Podać interpretację geometryczną.
6. Rozwiązać graficznie nierówność $2x+3 > |x|$, a następnie znaleźć wszystkie rozwiązania całkowite.

27. Układ równań pierwszego stopnia

Niech dany będzie układ dwóch równań

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases} \quad (27.1)$$

w którym a, b i c oraz a_1, b_1 i c_1 oznaczają liczby dane, zaś x i y są niewiadomymi, które należy obliczyć. Zakładamy, że każde z równań tego układu jest równaniem pierwszego stopnia, czyli a lub b i a_1 lub b_1 są różne od zera. Układ (27.1) jest w tym przypadku *układem dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi*.

Definicja. Każdą parę liczb (x, y) , która jest *jednocześnie* rozwiązaniem obu równań układu (27.1), nazywamy *rozwiązaniem tego układu*.

Rozwiązać układ równań — znaczy to znaleźć wszystkie rozwiązania tego układu albo wykazać, że zbiór rozwiązań jest pusty.

Zbiór rozwiązań układu równań jest iloczynem zbiorów rozwiązań poszczególnych równań tego układu.

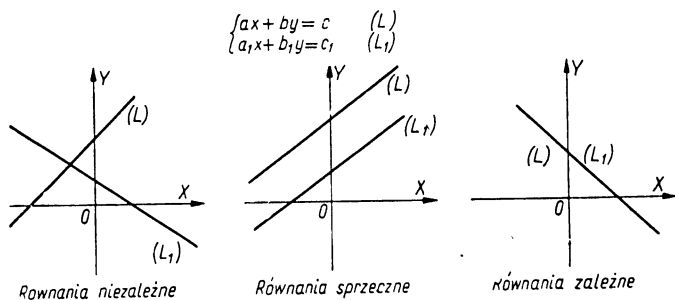
Wykresem każdego z równań (27.1) jest *prosta*. Niech L oznacza jedną, zaś L_1 drugą z tych prostych.

Jeżeli $L \nparallel L_1$ to proste *przecinają się*, czyli mają dokładnie jeden punkt wspólny; mówimy wówczas, że równania układu (27.1) są *wzajemnie niezależne*.

Jeżeli $L \parallel L_1$ i $L \neq L_1$ czyli gdy proste są *równoległe* i różne, to nie mają one żadnego punktu wspólnego; w tym przypadku mówimy, że równania układu (27.1) są *wzajemnie sprzeczne*, gdyż przez żadną parę liczb nie mogą być spełnione jednocześnie.

Jeżeli $L = L_1$, czyli gdy proste są równe (pokrywają się), to mają one wszystkie punkty wspólne; mówimy wówczas, że równania układu (27.1) są *wzajemnie zależne* (równoważne).

Na rys. 27-1 przedstawione są te trzy przypadki. Wyczerpują one wszystkie możliwości.



Rys. 27-1

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad (27.2)$$

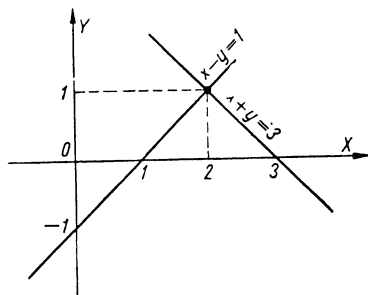
Rozwiązanie (metodą podstawiania). Z pierwszego równania wyznaczamy y w zależności od x i podstawiamy do drugiego równania. Ponieważ

$$y = x - 1 \quad (27.3)$$

więc dostajemy $x + (x - 1) = 3$, stąd $2x = 4$, czyli $x = 2$. Obliczoną wartość x podstawiamy do równania (27.3). Stąd $y = 1$. Układ (27.2) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Równania tego układu są wzajemnie niezależne.

Odp. (2, 1).

Rys. 27-2 ilustruje ten przykład. Współrzędne punktu przecięcia prostej $x - y = 1$ z prostą $x + y = 3$, stanowią rozwiązanie układu (27.2).



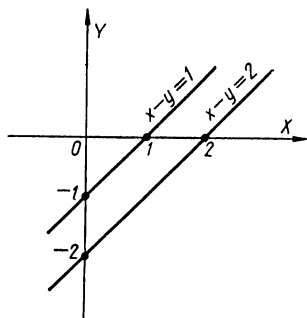
Rys. 27-2

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=2 \end{cases} \quad (27.4)$$

Rozwiązanie. Z pierwszego równania wyznaczamy $y = x-1$ i podstawiamy do drugiego równania. Dostajemy $1 = 2$, czyli równość fałszywą. Równania układu (27.4) są wzajemnie sprzeczne, co ilustruje rys. 27-3

Odp. Układ jest sprzeczny.



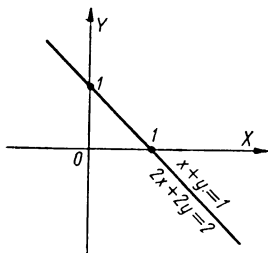
Rys. 27-3

Przykład. Rozwiązać układ równań

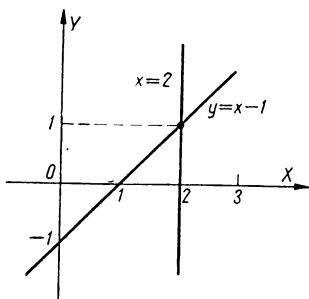
$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \quad (27.5)$$

Rozwiązanie. Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 1-x$ i podstawiamy do drugiego równania. Dostajemy $0 = 0$, czyli równość prawdziwą dla każdego x . Równania układu (27.5) są zależne. Każda para liczb $(x, 1-x)$, gdzie x oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, spełnia układ (27.5). Ilustruje to rys. 27-4.

Odp. $(x, 1-x)$, x – dowolne.



Rys. 27-4



Rys. 27-5

Metodę podstawiania można interpretować geometrycznie. Wyjaśnimy to na przykładzie układu (27.2). Wyznaczając z pierwszego równania $y = x - 1$ i podstawiając do drugiego równania, zastąpiliśmy układ (27.2) układem

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad (27.6)$$

Wykresy równań tego układu są przedstawione na rys. 27-5. Punkt wspólny prostych (27.6) jest taki sam jak prostych (27.2); układy (27.2) i (27.6) mają to samo, jedno rozwiązanie.

Definicja. Dwa układy równań (nierówności, lub równania i nierówności) nazywamy równoważnymi, jeżeli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Układ (27.2) jest równoważny układowi (27.6).

Rozwiązywanie układu równań można niekiedy znacznie uprościć zastępując go innym układem, który jest mu równoważny.

Następujące przekształcenia układu równań prowadzą do układu, który jest *równoważny* danemu układowi:

zastąpienie każdego równania układu równaniem mu równoważnym

albo

wyznaczenie z jednego równania jednej niewiadomej w zależności od drugiej i podstawienie do drugiego równania, a następnie zastąpienie układu danego układem złożonym z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania

albo

pomnożenie obu stron jednego równania przez tę samą liczbę różną od zera, pomnożenie obu stron drugiego równania przez tę samą liczbę różną od zera, dodanie tych równań stronami, a następnie zastąpienie otrzymanym równaniem jednego z równań danego układu

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 5x + 2y = 29 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \quad (27.7)$$

Rozwiązanie. Mnożymy obie strony pierwszego równania przez -2 , drugiego przez 5 . Stąd

$$-10x - 4y = -58$$

oraz

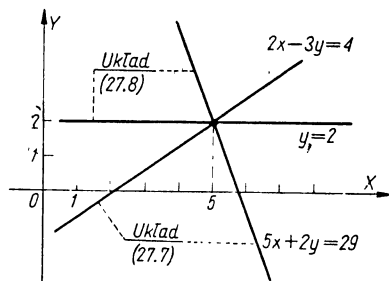
$$10x - 15y = 20$$

Otrzymane równania dodajemy stronami. Dostajemy $-19y = -38$ czyli $y = 2$. Układ (27.7) jest więc równoważny układowi równań

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \quad (27.8)$$

Równoważność tę ilustruje rys. 27-6. Układ (27.8) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Odp. (5, 2).



Rys. 27-6

Wyznacznik drugiego stopnia. Wprowadzimy pomocnicze oznaczenie. Niech A , B , C i D będą dowolnymi liczbami.

Definicja. Różnicę iloczynów $A \cdot B - C \cdot D$ nazywamy *wyznacznikiem drugiego stopnia* i oznaczamy symbolem

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix}$$

Na przykład

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 5 = -18,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 3 \cdot (-7) = 21.$$

Dyskusja układu równań pierwszego stopnia (por. str. 102)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \quad (27.1)$$

polega na zbadaniu wpływu wartości współczynników a , b , c oraz a_1 , b_1 i c_1 na istnienie i liczbę rozwiązań tego układu.

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

utworzony ze współczynników przy niewiadomych w układzie (27.1) nazywamy *wyznacznikiem tego układu* i oznaczamy literą W . Mamy więc

$$W = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad (27.9)$$

Ponadto oznaczamy

$$W_1 = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \text{oraz} \quad W_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \quad (27.10)$$

Wyznacznik W_1 można utworzyć z wyznacznika W zastępując w nim liczby a i a_1

odpowiednio przez c i c_1 . Podobnie jest z wyznacznikiem W_2 , który można utworzyć z wyznacznika (27.9) zastępując w nim b przez c i b_1 przez c_1 .

Wyznaczniki (27.9) i (27.10) ułatwiają dyskusję układu (27.1).

Jeżeli $W \neq 0$, to układ równań (27.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie, a mianowicie

$$x = \frac{W_1}{W}, \quad y = \frac{W_2}{W} \quad (27.11)$$

Równania układu (27.1) są w tym przypadku wzajemnie niezależne. W celu wyprowadzenia wzorów (27.11) mnożymy obustronnie pierwsze z równań (27.1) przez b_1 i drugie przez $-b$. Stąd

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} ax + by &= c \Rightarrow b_1 ax + b_1 by = b_1 c \\ a_1 x + b_1 y &= c_1 \Rightarrow -ba_1 x - b b_1 y = -b c_1 \end{aligned} \right\} \\ \Downarrow \\ (ab_1 - ba_1)x &= b_1 c - bc_1 \\ \Downarrow \\ W \cdot x &= W_1 \end{aligned} \quad (27.12)$$

Następnie mnożymy obustronnie pierwsze z równań układu (27.1) przez $-a_1$, drugie zaś przez a . Po wykonaniu przekształceń podobnych jak poprzednio, dostajemy

$$W \cdot y = W_2 \quad (27.13)$$

Zauważmy, że wyprowadzając równania (27.12) i (27.13) wnioskowaliśmy, nie dbając o równoważność równań. Każde rozwiązanie (x, y) układu (27.1) ma więc tę właściwość, że x spełnia równanie (27.12) i y spełnia równanie (27.13), ale niekoniecznie na odwrót. Dlatego nie można jeszcze twierdzić, że wzory (27.11) na rozwiązanie układu (27.1) — które w rozpatrywanym przypadku $W \neq 0$ są równoważne równaniom (27.12) i (27.13) — zostały już wyprowadzone. Należy jeszcze wykonać sprawdzenie (analiza starożytnych). W tym celu trzeba podstawić do układu (27.1) prawe strony równości (27.11) — odpowiednio na miejsce x i y . Sprawdzenie daje wynik pozytywny. Wykonanie odpowiedniego rachunku pozostawiamy Czytelnikowi.

Jeżeli $W = 0$ i $W_1 \neq 0$ lub $W = 0$ i $W_2 \neq 0$, to równania układu (27.1) są wzajemnie sprzeczne. Istotnie, co najmniej jedno z równań (27.12) i (27.13) nie ma wówczas rozwiązania a to wyklucza już istnienie rozwiązania układu (27.1).

Jeżeli $W = 0$ i $W_1 = W_2 = 0$, to równania układu (27.1) są od siebie zależne (założyliśmy, że są to równania pierwszego stopnia, czyli że a lub b i a_1 lub b_1 są różne od zera). W tym przypadku każda liczba x spełnia równanie (27.12) i każda liczba y spełnia równanie (27.13), jednakże nie każda para liczb (x, y) stanowi rozwiązanie układu (27.1). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, przy czym wartość jednej z niewiadomych (nie zawsze którejkolwiek) jest parametrem, któremu można nadawać dowolne wartości (por. układ (27.5)).

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik układu

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.}$$

Następnie obliczamy W_1 i W_2

$$W_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad \text{oraz} \quad W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Stąd

$$x = \frac{-6}{-2} = 3, \quad y = \frac{-4}{-2} = 2$$

Odp. (3, 2).

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

Odp. Układ nie ma rozwiązań.

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Odp. $(x, x-1)$, x - dowolne.

Uwaga. Jeżeli pominąć założenie, że równania układu (27.1) są *pierwszego stopnia*, to układ ten w przypadku, gdy $W=0$ i $W_1=W_2=0$ może nie mieć rozwiązania. Na przykład układ równań

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 2 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ x+y=2a \end{cases}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyznacznik układu

$$W = \begin{vmatrix} a & -b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a + b$$

a następnie wyznaczniki

$$W_1 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & -b \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

oraz

$$W_2 = \begin{vmatrix} a & a^2 + b^2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - (a^2 + b^2) = a^2 - b^2$$

Jeżeli $a+b \neq 0$, to na podstawie wzorów (27.11) mamy

$$x = \frac{(a+b)^2}{a+b} = a+b, \quad \text{oraz} \quad y = \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a-b$$

Jeżeli $a+b = 0$, to $a = -b$ więc $a^2 - b^2 = 0$. W tym przypadku $W = W_1 = W_2 = 0$. Jeżeli $a \neq 0$, to równania układu są pierwszego stopnia i są zależne. Spełnia je każda para liczb $(x, 2a-x)$, gdzie x — liczba dowolna. Jeżeli $a = 0$, to ponieważ $a = -b$ więc $b = 0$. W tym przypadku badany układ jest postaci

$$\begin{cases} 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

więc spełnia go każda para liczb przeciwnych.

Odp. Jeżeli $a+b \neq 0$, to $x = a+b$, $y = a-b$; jeżeli $a+b = 0$, to każda para $(x, 2a-x)$, gdzie x — dowolna liczba — spełnia ten układ.

Przykład¹⁾. Bryła mosiądzu (stop miedzi i cynku) waży 67,2 kG. Ile kG waży miedź, a ile cynk znajdujące się w bryle, jeżeli po zanurzeniu do wody traci ona na ciężarze 8 kG, a ciężary właściwe miedzi i cynku wynoszą odpowiednio 8,9 oraz 6,9 kG/dm³?

Rozwiązanie. Oznaczamy: x — ciężar miedzi w kG, y — ciężar cynku w kG. Na podstawie treści przykładu $x+y = 67,2$. Aby ułożyć drugie równanie, w którym wystąpią niewiadome x i y , powołamy się na prawo Archimidesa, według którego bryła zanurzona w wodzie traci na ciężarze tyle, ile waży woda przez nią wyparta. Ponieważ objętość bryły wynosi $\left(\frac{x}{8,9} + \frac{y}{6,9}\right) \text{ dm}^3$, zaś traci ona na ciężarze 8 kG, więc $\frac{x}{8,9} + \frac{y}{6,9} = 8$. Ułożyliśmy więc układ dwóch równań stopnia pierwszego

$$\begin{cases} x+y = 67,2 \\ \frac{x}{8,9} + \frac{y}{6,9} = 8 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $x = 53,4$ oraz $y = 13,8$.

Odp. Miedź waży 53,4 kG, zaś cynk 13,8 kG.

¹⁾ 1 dm = 1 decymetr (oznaczenie w układzie SI).

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y-1} + \frac{5}{x-y+1} = 2 \\ \frac{3}{x+y-1} - \frac{2}{x-y+1} = 1 \end{cases} \quad (27.14)$$

Rozwiązanie. Wprowadzamy pomocnicze niewiadome

$$t = \frac{1}{x+y-1}, \quad \text{oraz } z = \frac{1}{x-y+1} \quad (27.15)$$

Układ (27.14) przyjmie postać

$$\begin{cases} t+5z = 2 \\ 3t-2z = 1 \end{cases} \quad (27.16)$$

Układ (27.16) rozwiązujemy i dostajemy $t = \frac{9}{17}$ i $z = \frac{5}{17}$. Podstawiając obliczone wartości do związków (27.15) otrzymamy

$$\begin{cases} x+y-1 = \frac{17}{9} \\ x-y+1 = \frac{17}{5} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x+y = \frac{26}{9} \\ x-y = \frac{12}{9} \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten ostatni układ i dostajemy $x = \frac{119}{45}$, oraz $y = \frac{11}{45}$.

Odp. $\left(\frac{119}{45}, \frac{11}{45} \right)$.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x-3y+5z = 11 \\ x+4y-7z = -12 \\ 3x+2y+8z = 31 \end{cases} \quad (27.17)$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy x z drugiego równania

$$x = -12 - 4y + 7z \quad (27.18)$$

i podstawiamy do pierwszego i trzeciego równania. Po redukcji otrzymamy

$$\begin{cases} 11y-19z = -35 \\ 10y-29z = -67 \end{cases} \quad (27.19)$$

Układ równań: (27.18) i (27.19), jest równoważny układowi (27.17). W równaniach (27.19) znajdują się tylko dwie niewiadome y i z . Rozwiązujemy ten układ w znany sposób i dostajemy $y = 2$, $z = 3$. Wartość x obliczamy z równania (27.18), $x = -12 - 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 1$.

Odp. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Przykład*. Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 15. Pierwsza cyfra jest o 5 mniejsza od drugiej, która jest o 4 większa od trzeciej. Jaka to liczba?

Rozwiązanie. Niech x oznacza liczbę setek, y liczbę dziesiątek, z zaś liczbę jednostek w szukanej liczbie. Z warunków zadania mamy

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ x+5=y \\ y-4=z \end{cases}$$

Układ ten rozwiązujemy podobnie jak w przykładzie poprzednim. Dostajemy $x=3$, $y=8$, $z=4$.

Odp. 384.

Pytania i zadania

1. Napisać układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
2. Co to jest *rozwiązanie* układu (27.1)? Podać interpretację geometryczną rozwiązania.
3. Kiedy równania układu (27.1) są *wzajemnie* a) *zależne*, b) *niezależne*, c) *sprzeczne*? Podać przykłady.
4. Co to znaczy, że dwa układy równań są *równoważne*?
5. Podać przykłady takich sposobów przekształcania układu równań, na skutek których dostajemy układy równań równoważne.
6. Co to jest *wyznacznik* układu równań (27.1)?
7. Podać dyskusję układu równań (27.1).
8. Podać układ równań (27.1), który nie ma rozwiązania.
9. Czy układ (27.1) może mieć dokładnie dwa różne rozwiązania?
10. Rozwiązać układ równań

$$\text{a)} \begin{cases} x-5y=1 \\ x+2y=2 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 10x+17y=107 \\ 15x+8y=143 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y = 0,15 \\ 3x-2y = -7 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 6x+2y=0 \\ 2x+2=2-x-y \end{cases} \quad \text{e)} \begin{cases} x-10y=28 \\ 13y-x=17 \end{cases} \quad \text{f)} \begin{cases} 2x-y=3+x \\ x-\frac{1}{2}y=3+\frac{x}{2} \end{cases}$$

11*. Rozwiązać układ równań o niewiadomych x i y :

$$\text{a)} \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$$

gdzie $a^2 \neq b^2$

gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$

12. Rozwiązać układ równań o niewiadomych x i y :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = -9 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = m \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = n \end{cases} \quad (m^2 \neq n^2) \\ \text{c)} \begin{cases} \frac{xy+13}{y+6} = x-2 \\ y-2 = \frac{xy-13}{x+4} \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{1}{3x-2y+1} + \frac{1}{x+2y-3} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x+2y-3} - \frac{1}{3x-2y+1} = \frac{1}{12} \end{cases} \\ \text{e)*} \begin{cases} (k-1)x+2y = 1 \\ x+ky = 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} \frac{2}{x+y} - \frac{3}{x-y} = -\frac{11}{13} \\ \frac{3}{x+y} + \frac{5}{x-y} = \frac{74}{39} \end{cases} \end{array}$$

13*. Rozwiązać układy równań

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x-8y+2z = -8 \\ 2y+3z = -1 \\ 2x+4y-z = 9 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{x+2y}{5x+6z} = \frac{7}{9} \\ x+y+z = 128 \\ \frac{3y+4z}{x+2y} = \frac{8}{7} \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = -\frac{9}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} - \frac{2}{z} = \frac{5}{3} \end{cases} \end{array}$$

14**. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ |x-1| - y = -5 \end{cases}$$

15. Statek porusza się z prądem rzeki z prędkością 18 km/h, a pod prąd z prędkością 14 km/h. Obliczyć prędkość własną statku i prędkość prądu rzeki.
16. Po zmieszaniu dwóch roztworów kwasu solnego 75% i 54% otrzymano 42 litry roztworu kwasu 66%. Ile wzięto do tej mieszaniny kwasu 75%, a ile 54%?
17. Kurczęta i króliki znajdujące się w klatce mają razem 35 głów i 94 nogi. Ile jest kurcząt, a ile królików?
- 18*. Dwa samochody wyruszyły naprzeciw siebie z miast oddległych o 210 km i poruszają się ze stałymi prędkościami. W chwili spotkania jeden z nich ma jeszcze przed sobą 2 h jazdy, a drugi $\frac{9}{8}$ h jazdy do miasta, z którego wyruszył mijany samochód. Obliczyć prędkości obu samochodów.
- 19*. W wolne miejsce wpisz tak dobrane równanie pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych, żeby otrzymany układ dwóch równań a) miał dokładnie jedno rozwiązanie, b) miał nieskończenie wiele rozwiązań, c) nie miał rozwiązania

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x+3y = 7 \\ \dots\dots\dots \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x+3y = 7 \\ \dots\dots\dots \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x+3y = 7 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \end{array}$$

20*. Dany jest układ równań

$$\begin{cases} (m-3)x - 4y = n \\ -9x + (m+2)y = 9 \end{cases}$$

o niewiadomych x i y oraz parametrach m i n . Dla jakich wartości parametrów równania tego układu są a) niezależne, b) zależne, c) sprzeczne?

Wskazówka. $m^2 - m - 42 = (m-7)(m+6)$.

28. Nierówności z wielu zmiennymi

Zajmiemy się tu nierównościami, w których występują dwie, lub większa liczba zmiennych.

Przykład. Udowodnić, że dla każdych dwóch liczb a i b spełniona jest nierówność słaba

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (28.1)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Rozwiązanie

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc ostatnia z otrzymanych nierówności jest spełniona dla każdych dwóch liczb a i b , przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$. Nierówność $(a-b)^2 \geq 0$ jest równoważna nierówności (28.1), cnd.

Przy dowodzeniu nierówności korzystamy często z następującego twierdzenia.

Twierdzenie (o łączeniu nierówności). Jeżeli

$$a < b \quad \text{ i } \quad c < d$$

to

$$a + c < b + d \quad (28.2)$$

oraz dla każdych dodatnich b i c

$$a \cdot c < b \cdot d \quad (28.3)$$

Dowód. Nierówność (28.2) można udowodnić tak:

$$\begin{aligned} [(a < b) \wedge (c < d)] &\Rightarrow [(a-b < 0) \wedge (c-d < 0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [((a-b) + (c-d) < c-d) \wedge (c-d < 0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a-b) + (c-d) < 0 \Rightarrow (a+c) - (b+d) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a+c < b+d \end{aligned}$$

Mamy następnie

$$[(a < b) \wedge (c > 0)] \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

oraz

$$[(c < d) \wedge (b > 0)] \Rightarrow c \cdot b < d \cdot b$$

$\Downarrow$

$$a \cdot c < b \cdot d, \text{ cnd.}$$

Przykład*. Udowodnić, że dla każdych trzech liczb a, b i c , z których co najmniej jedna jest różna od pozostałych, spełniona jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca \quad (28.4)$$

Rozwiązanie. Niech a będzie liczbą różną od b i od c . Na podstawie poprzedniego przykładu mamy więc

$$a^2 + b^2 > 2ab \quad \text{ i } \quad a^2 + c^2 > 2ac$$

a ponadto $b^2 + c^2 \geq 2bc$. Korzystając z tych trzech nierówności oraz z twierdzenia o łączeniu nierówności i określenia nierówności słabej dostajemy

$$2(a^2 + b^2 + c^2) > 2(ab + bc + ca)$$

Dzieląc tę nierówność obustronnie przez 2 otrzymamy nierówność (28.4), cnd.

Przykład*. Udowodnić, że dla każdych dwóch liczb a i b mających ten sam znak, spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (28.5)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Rozwiązanie. Wiemy (por. (28.1)), że dla każdych dwóch liczb a i b mamy $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Ponieważ a i b są tego samego znaku, więc ich iloczyn jest dodatni. Dzieliąc obie strony otrzymanej nierówności przez ab dostajemy zatem nierówność (28.5). Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = 2ab$, czyli gdy $(a - b)^2 = 0$, a więc gdy $a = b$, cnd.

Definicja. Średnia arytmetyczna n liczb jest to suma tych liczb podzielona przez n :

$$s_A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (28.6)$$

Na przykład średnią arytmetyczną liczb 2, 3, 7 i 8 jest

$$s_A = \frac{2+3+7+8}{4} = 5$$

Definicja. Średnia geometryczna n liczb nieujemnych jest to pierwiastek stopnia n z iloczynu tych liczb:

$$s_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (28.7)$$

Na przykład średnią geometryczną liczb 8, 4 i 2 jest

$$s_G = \sqrt[3]{8 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Przykład*. Udowodnić, że średnia arytmetyczna dwóch liczb nieujemnych a i b jest nie mniejsza od średniej geometrycznej tych liczb.

Rozwiązanie. Ponieważ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, więc $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, a zatem $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dzieląc tę nierówność obustronnie przez 2, dostajemy

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \text{cnd.} \quad (28.8)$$

Przykład.** Udowodnić, że średnia geometryczna trzech liczb dodatnich jest nie większa od średniej arytmetycznej tych liczb, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby te są równe.

Rozwiązanie. Niech a , b i c będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Oznaczmy

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \quad (28.9)$$

Liczby (28.9) są dodatnie, a ponadto $xyz = 1$. Wynika stąd, że xy jest odwrotnością liczby z , yz jest odwrotnością liczby x , zaś zx jest odwrotnością liczby y . Wiemy (por. (28.5)), że suma każdej liczby dodatniej i jej odwrotności jest nie mniejsza od 2, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby te są równe, a więc gdy każda z nich wynosi 1.

Stąd

$$xy + z \geq 2, \quad yz + x \geq 2 \quad \text{i} \quad zx + y \geq 2 \quad (28.10)$$

a zatem

$$xy + yz + zx + x + y + z \geq 6 \quad (28.11)$$

Mnożymy obustronnie pierwszą z nierówności (28.10) przez z , drugą przez x i trzecią przez y ; suma lewych stron otrzymanych w ten sposób nierówności jest nie mniejsza od sumy ich prawych stron. Uwzględniając warunek $xyz = 1$, otrzymamy więc

$$3 + z^2 + x^2 + y^2 \geq 2(x + y + z). \quad (28.12)$$

Z nierówności (28.11) mamy następnie

$$x + y + z \geq 6 - (xy + yz + zx) \quad (28.13)$$

a ponieważ nierówność jest *przechodnia*, więc na podstawie (28.12) i (28.13) dostajemy

$$3 + z^2 + x^2 + y^2 \geq 12 - 2(xy + yz + zx)$$

czyli

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 9$$

Stąd

$$(x + y + z)^2 \geq 9, \quad \text{więc} \quad x + y + z \geq 3$$

Podstawiając w miejsca x , y i z prawe strony równości (28.9), dostajemy

$$\frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3, \quad \text{czyli} \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z = 1$, czyli gdy $a = b = c$, cnd.

Pytania i zadania

1. Podać twierdzenie o łączeniu nierówności.
2. Uzasadnić słuszność następujących wnioskowań:
 - a) $(x \leq y) \Rightarrow (x+z \leq y+z)$, b) $[(x \leq z) \wedge (z < u)] \Rightarrow x < u$,
 - c) $[(x \leq y) \wedge (y \leq z)] \Rightarrow x \leq z$, d) $[(x \geq 0) \wedge (y > 0)] \Rightarrow x+y > 0$.
3. Zakładamy, że $x < y$. Udowodnić, że

$$\text{a) } x < \frac{x+y}{2}, \quad \text{b) } \frac{x+y}{2} < y, \quad \text{c) } \frac{3x+y}{4} < \frac{x+y}{2}.$$

- 4*. Udowodnić, że jeżeli $a \cdot b < 0$, to

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a+b=0$.

- 5*. Udowodnić, że dla każdych trzech liczb dodatnich a, b i c , przy czym $a < b$, spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

- 6**. Udowodnić, że dla każdych trzech liczb dodatnich a, b i c spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b=c$.

Odpowiedzi do rozdziału IV

22.

2. a) $\mathbf{R}$, b) $(-\infty; -1) \cup (-1; +1) \cup (+1; +\infty)$, c) $\langle -1; +1 \rangle$, d) $(-\infty; -1) \cup \langle +1; +\infty)$. 11. a) I, III, b) II, IV. 15. a) 2, b) $\frac{26}{3}$, c) $a^2 + \frac{1}{a}$, dla $a \neq 0$, d) $\frac{1}{a^2} + a$, dla $a \neq 0$, e) $\frac{1}{x^4} + x^2$, dla $x \neq 0$. 17. Wykreślami są proste równoległe do OX . 18. $y = x^2 + (a+b)x$. 19. $y = (a-2b)x - 2x^2$; $x = \frac{a-2b}{2}$. 20. 250 litrów. 21. 3,2 litra. 23*. $y = \frac{24x}{24+7x}$. 24*. $y = -x-1$, gdy $x \leq -2$, $y = x+3$, gdy $-2 < x < 1$, $y = 3x+1$, gdy $x \geq 1$.

23.

7. a) $\frac{2\pi}{3}$, b) 4π , c) $\frac{\pi}{2}$, d) $\frac{\pi}{6}$, e) 2, f) nie ma, g) 2π , h) π . 10*. $f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$, b) $y = 0 + \frac{1}{x}$. 14. $\langle 1; +\infty)$ na OX , $\langle 0; +\infty)$ na $O'X'$.

24.

7. nie. 8. tak. 9. nie. 10. a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, b) równanie sprzeczne.

25.

5. równanie pierwszego stopnia jest liniowe, ale nie na odwrót. 7. a) $\frac{3}{5}$, b) 3,6, c) sprzeczne, d) 3. 8. 0,9 kg wodoru i 7,2 kg tlenu. 9*. 9 litrów z pierwszego i 3 z drugiego zbiornika. 10*. 9 kg pierwszego i 35 kg drugiego stopu. 11. za 18 lat. 12*. 5 h i 7,5 h. 13. 125 g pierwszego i 375 g drugiego stopu. 14*. $3a - b$; przyjęto, że turyści mijają się za każdym razem idąc w przeciwnych kierunkach. 15*. $\frac{b}{b-a-1}$, gdy

$b - a \neq 1$, sprzeczne gdy $a - b = 1$. 16. a) $x < 3$, b) $x > \frac{1}{6}$, c) $x < 2$, d) $x > \frac{1}{4}$, e) $(-5; 4)$, f) $(2; 5)$, g) $x > 1$ lub $x < -2$, h) $-6 < x < \frac{7}{4}$.

17*. a) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, b) $(-1; 3)$, c) $x < 1$ lub $x > 3$, d) $x \geq \frac{3}{2}$.

18. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 i 11. 19. 35. 20. $(-\infty; 0)$.

26.

5. a) $(0, -4)$, $(1, -3)$, itp. 6. $N \cup \{0\}$.

27.

9. nie. 10. a) $\left(\frac{12}{7}, \frac{1}{7}\right)$, b) $(9, 1)$, c) $(-1, 2)$, d) $(x, -3x)$ x - dowolne, e) $(178, 15)$,

f) równania sprzeczne. 11*. a) $x = \frac{a}{a-b}$, $y = \frac{b}{a+b}$, b) $x = \frac{ab}{a+b}$, $y = \frac{ab}{a+b}$,

gdy $a^2 - b^2 \neq 0$; $(x, a-x)$, x - dowolne, gdy $a = b$; równania sprzeczne, gdy

$a = -b$. 12. a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, b) $x = \frac{2m}{m^2 - n^2}$, $y = \frac{2n}{m^2 - n^2}$, c) $\left(\frac{9}{2}, 1\right)$, d) $(3, 2)$,

e*) $x = \frac{1}{k+1}$, $y = \frac{1}{k+1}$, gdy $k \neq -1$ i $k \neq 2$; układ jest sprzeczny dla $k = -1$;

y dowolne, $x = 1 - 2y$ dla $k = 2$, f) $(8, 5)$. 13*. a) $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$, b) $x = 51$,

$y = 76$, $z = 1$, c) $x = -6$, $y = 3$, $z = -4$. 14**. $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$. 15. 16 km/h

i 2 km/h. 16. 24 litry kwasu 75% i 18 litrów kwasu 54%. 17. 23 kurczęta i 12 króli-

ków. 18. 60 km/h i 80 km/h. 20*. a) $m \neq 7$ i $m \neq -6$, b) $m = 7$ i $n = -4$ lub $m = -6$ i $n = 9$, c) $m = 7$ i $n \neq -4$ lub $m = -6$ i $n \neq 9$.

Rozdział V

FUNKCJA KWADRATOWA

29. Funkcja drugiego stopnia

Definicja. Funkcję

$$y = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R} \quad (29.1)$$

gdzie $a \neq 0$, b i c są to liczby dane, nazywamy *funkcją drugiego stopnia* (także: *funkcją kwadratową* lub *trójmianem kwadratowym*).

Na przykład

$$y = 2x^2, \quad y = x^2 - x, \quad y = 3x^2 + 2, \quad y = -2x^2 + x + 1$$

są to funkcje drugiego stopnia.

Zależność drogi s od czasu t w ruchu jednostajnie zmiennym po prostej

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

jest funkcją drugiego stopnia.

Jednomian drugiego stopnia (kwadratowy) jest to funkcja

$$y = ax^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (29.2)$$

gdzie $a \neq 0$. Jednomian ten jest funkcją kwadratową (przypadek gdy $b = c = 0$).

Wykresem jednomianu drugiego stopnia jest krzywa zwana *parabolą*. Na rys. 29-1 przedstawione są wykresy funkcji (29.2) dla różnych wartości współczynnika a .

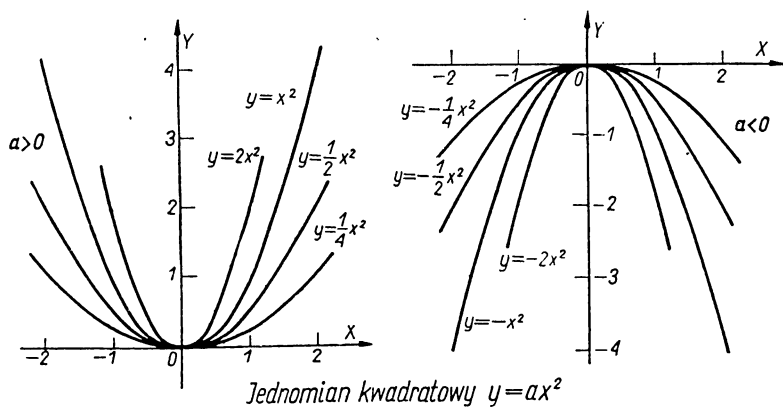
Funkcja (29.2) jest *parzysta*, ponieważ dla każdego x mamy $ax^2 = a(-x)^2$. Oś OY jest więc *osią symetrii* dla paraboli stanowiącej wykres tej funkcji (por. rys. 29-1). Punkt, w którym oś symetrii przecina parabolę — na rys. 29-1 jest nim początek układu czyli punkt $(0,0)$ — nazywamy *wierzchołkiem* paraboli. Wierzchołek dzieli parabolę na dwa *ramiona* zwrócone w górę, gdy $a > 0$, natomiast w dół — gdy $a < 0$.

Jeżeli $a > 0$, to funkcja $y = ax^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, a rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$. Dla $x = 0$ przyjmuje ona *wartość najmniejszą*.

(minimum) równą 0. Funkcja (29.2) przyjmuje wartości dowolnie duże, jeżeli tylko wartość $|x|$ jest dostatecznie duża, co notujemy tak:

jeżeli $x \rightarrow -\infty$ lub $x \rightarrow +\infty$, to $y \rightarrow +\infty$

(czytamy: jeżeli x dąży do $-\infty$ lub do $+\infty$, to y dąży do $+\infty$). W tym przypadku funkcja (29.2) nie przyjmuje wartości największej.



Rys. 29-1

Jeżeli $a < 0$, to funkcja $y = ax^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i malejąca w przedziale $(0; +\infty)$. Dla $x = 0$ przyjmuje ona wartość największą (maksimum) równą 0. Funkcja przyjmuje wartości ujemne o dowolnie dużej wartości bezwzględnej, jeżeli tylko wartość $|x|$ jest dostatecznie duża, co notujemy tak:

jeżeli $x \rightarrow -\infty$ lub $x \rightarrow +\infty$, to $y \rightarrow -\infty$

W tym przypadku funkcja (29.2) nie przyjmuje wartości najmniejszej.

Postać kanoniczna trójmianu kwadratowego. Trójmian (29.1) można zawsze sprowadzić do tzw. postaci kanonicznej. W tym celu należy wykonać następujące przekształcenia. Ponieważ $a \neq 0$, więc

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Oznaczając

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (29.3)$$

wyróżnik trójkianu kwadratowego

dostajemy ostatecznie

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (29.4)$$

postać kanoniczna trójkianu kwadratowego

Przykłady

$$x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 9 + 8 = (x+3)^2 - 1$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$-x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2) = - \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \right] =$$

$$= - \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right] = - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$-3x^2 + 12x = -3(x^2 - 4x) = -3[(x-2)^2 - 4] = -3(x-2)^2 + 12$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a} \quad (29.5)$$

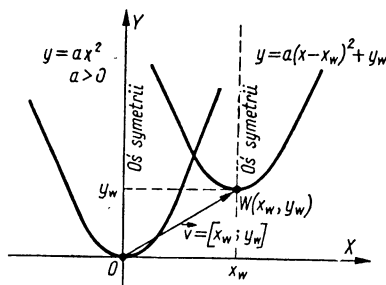
dzięki którym równość (29.4) można zapisać tak

$$y = a(x - x_w)^2 + y_w \quad (29.6)$$

Z równości tej wynika, że wykres trójkianu (29.1) jest *parabolą*, która powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor

$$\vec{v} = [x_w; y_w]$$

(por. str. 83). *Oś symetrii* tej paraboli jest prosta równoległa do OY i przechodząca przez punkt $(x_w, 0)$, zaś jej *wierzchołkiem* jest punkt $W(x_w, y_w)$ – patrz rys. 29-2.



Rys. 29-2

Pierwszy składnik po prawej stronie równości (29.6) nie zmienia znaku: jest on nieujemny dla $a > 0$, zaś niedodatni dla $a < 0$. Składnik ten jest równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $x = x_w$. Wynika stąd, że trójmian (29.1) ma dla $x = x_w$ minimum równe y_w gdy $a > 0$, natomiast maksimum równe y_w gdy $a < 0$.

Postać iloczynowa trójmianu kwadratowego. Jeżeli wyróżnik (29.3) trójmianu (29.1) jest nieujemny, $\Delta \geq 0$, to trójmian ten można rozłożyć na czynniki liniowe, czyli sprowadzić do tzw. postaci iloczynowej. Wobec (29.4) mamy wówczas

$$\begin{aligned} y &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \\ &= a \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \end{aligned}$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (29.7)$$

ostatecznie dostajemy

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (29.8)$$

postać iloczynowa trójmianu kwadratowego

Jeżeli $\Delta = 0$, to $x_1 = x_2$. Oznaczając tę wspólną wartość x_1 i x_2 symbolem x_0 , można wówczas zamiast (29.8) napisać

$$y = a(x - x_0)^2 \quad (29.9)$$

Jeżeli $\Delta < 0$, to prawa strona równości (29.4) jest stałego znaku (dodatnia, gdy $a > 0$, natomiast ujemna gdy $a < 0$).

Z rozważań tych wynika, że trójmian (29.1)

ma dwa punkty zerowe x_1 i x_2 gdy $\Delta > 0$

ma jeden punkt zerowy x_0 (tzw. podwójny) gdy $\Delta = 0$

nie ma punktów zerowych gdy $\Delta < 0$.

Punkt zerowy trójmianu nazywamy też *pierwiastkiem* trójmianu. Pierwiastek trójmianu jest odcięta punktu, w którym parabola będąca wykresem trójmianu przecina oś OX .

Wykres trójmianu kwadratowego wygodnie jest sporządzić znajdując uprzednio współrzędne x_w i y_w wierzchołka W , rysując oś symetrii $x = x_w$ oraz badając punkty przecięcia wykreślonej paraboli z osiami układu współrzędnych. Wszystkie te informacje można uzyskać z postaci kanonicznej trójmianu, oraz ze wzorów (29.7)

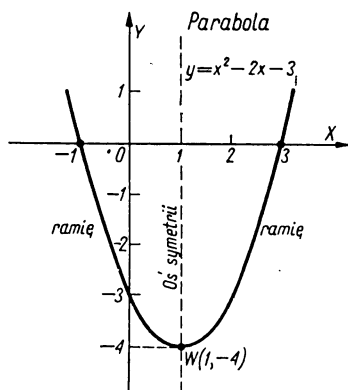
Przykład. Wykreślić trójmian

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (29.10)$$

Rozwiązanie. Sprowadzamy trójkąt do postaci kanonicznej

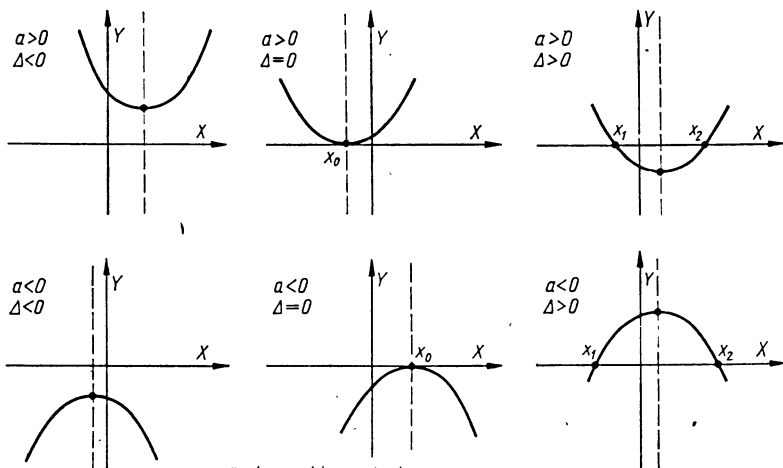
$$y = (x-1)^2 - 4$$

z której odczytujemy współrzędne wierzchołka: $W(1, -4)$, oraz równanie osi symetrii $x = 1$. Następnie badamy punkty przecięcia paraboli z osiami układu OXY . Przyjmując $x = 0$ dostajemy $y = -3$, więc wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$. Obliczamy wyróżnik trójkątnika $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$. Ponieważ $\Delta > 0$, więc trójkąt (29.10) ma dwa pierwiastki, które znajdujemy ze wzorów (29.7), $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Parabola przecina więc oś OX w dwóch punktach: $(-1, 0)$



Rys. 29-3

i $(3, 0)$. Wykres zbadanego trójkątnika przedstawiony jest na rys. 29-3. Trójkąt ma minimum równe -4 dla $x = 1$.



Zmiennosć trójkątnika $y = ax^2 + bx + c$
 $\Delta = b^2 - 4ac$

Rys. 29-4

Na rys. 29-4 przedstawione są schematyczne wykresy trójkątnego kwadratu w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ . Ramiona paraboli są zwrócone w górę, gdy $a > 0$, natomiast w dół gdy $a < 0$. W przypadku gdy $b = 0$ osią symetrii jest OY (por. wzory (29.5) i (29.6)).

Wykresy przedstawione na rys. 29-4 ilustrują przeprowadzoną poprzednio analizę trójkątnego (29.1), zwaną *dyskusją trójkątnego kwadratu*. Znajomość tej dyskusji, a więc znajomość zmienności trójkątnego kwadratu jest bardzo ważna, gdyż stanowi podstawę do rozwiązywania wielu zagadnień.

Przykład. Wyznaczyć trójkątny kwadrat $y = ax^2 + bx + c$ jeżeli wiadomo, że jego wykres przechodzi przez punkty $(0, 1)$, $(1, 0)$ i $(2, 1)$.

Rozwiązanie. Z warunków zadania mamy

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \quad (29.11)$$

Rozwiązując otrzymany układ równań, dostajemy $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$.

Odp. $y = x^2 - 2x + 1$.

Przykład*. Wyznaczyć trójkątny kwadrat $y = ax^2 + bx + c$ jeżeli wiadomo, że dla $x = -2$ przyjmuje on najmniejszą ze wszystkich swych wartości, która wynosi 4, zaś dla $x = 1$ przyjmuje wartość 13.

Rozwiązanie. Z warunków zadania mamy

$$-\frac{b}{2a} = -2, \quad -\frac{\Delta}{4a} = 4, \quad \text{oraz} \quad a + b + c = 13$$

Stąd

$$\begin{cases} 4a - b = 0 \\ b^2 - 4ac + 16a = 0 \\ a + b + c = 13 \end{cases} \quad (29.12)$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $b = 4a$ i podstawiamy do dwóch następnych równań. Otrzymamy

$$\begin{cases} 16a^2 - 4ac + 16a = 0 \\ 5a + c = 13 \end{cases}$$

Dzieląc obustronnie pierwsze z tych równań przez $4a$, ($a \neq 0$), dostajemy układ dwóch równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych a i c

$$\begin{cases} 4a - c + 4 = 0 \\ 5a + c = 13 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, dostajemy $a = 1$ i $c = 8$, następnie zaś obliczamy $b = 4a = 4 \cdot 1 = 4$.

Odp. $y = x^2 + 4x + 8$.

- Co to jest a) funkcja drugiego stopnia, b) funkcja kwadratowa, c) trójkąt kwadratowy? Podać przykłady.
- Co to jest jednomian drugiego stopnia? Omówić kształt wykresu jednomianu $y = ax^2$ w zależności od współczynnika a . Co to jest wierzchołek paraboli?
- Udowodnić, że funkcja $y = ax^2$ jest dla $a > 0$ malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$, natomiast dla $a < 0$ – rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i malejąca w przedziale $(0; +\infty)$.
- Na wspólnym rysunku sporządzić wykresy funkcji
 - $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2 + 1$, $y = -2x^2 + 1$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$,
 - $y = x^2 - x$, $y = x^2$, $y = x^2 + x$, $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 + 3x$,
 - $y = -x^2 - 1$, $y = -x^2$, $y = -x^2 + 1$, $y = -x^2 + 2$, $y = -x^2 + 3$.
- Sprowadzić trójkąt $y = ax^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej. Co to jest wyróżnik trójkąta kwadratowego?
- Sprowadzić do postaci kanonicznej trójkąt
 - $y = x^2 + 5x + 4$, b) $y = 3x^2 + 12x + 20$, c) $y = -4x^2 + 16x + 20$, d) $y = 2x^2 + 6x$, e) $y = -8x^2 + 16x$, f) $y = x^2 + 12x + 1$.
- Wyjaśnić związek wykresu jednomianu $y = ax^2$ z wykresem trójkąta $y = ax^2 + bx + c$.
- Podać sposób znalezienia wierzchołka i osi symetrii paraboli stanowiącej wykres trójkąta kwadratowego.
- Czy istnieje trójkąt kwadratowy, którego wykres nie przecina a) OX , b) OY ?
- Co można powiedzieć o wykresie trójkąta $y = ax^2 + bx + c$, jeżeli $a < 0$ i $\Delta < 0$? Jaki jest w tym przypadku znak współczynnika c ?
- Co to jest postać iloczynowa trójkąta kwadratowego? Czy każdy trójkąt można sprowadzić do tej postaci?
- Podać warunek konieczny i wystarczający na to, żeby trójkąt $y = ax^2 + bx + c$ miał w zbiorze R stały znak.
- Podać wzory na pierwiastki (punkty zerowe) trójkąta kwadratowego.
- Omówić sposób wykreślania trójkąta kwadratowego, a następnie wykonać wykres
 - $y = 2x^2 + 5x + 1$, b) $y = -4x^2 + x + 12$, c) $y = -2x^2 + 7x + 3$.
- Sprowadzić do postaci iloczynowej i znaleźć pierwiastki trójkątów
 - $y = x^2 - 6x - 187$, b) $y = 6x^2 - 192x + 1242$, c) $y = -2x^2 - 1,98x + 0,02$.
- Podać schematyczne wykresy trójkąta kwadratowego (29.1) w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ .
- Znaleźć trójkąt kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, który dla $x = 5$ ma wartość 5, zaś dla $x = 3$ ma minimum równe 1.

18*. Wiadomo, że trójmian $y = ax^2 + bx + c$ ma dokładnie jeden pierwiastek, a ponadto dla $x = 0$ ma wartość 1 i dla $x = 2$ ma wartość 9. Znaleźć ten trójmian.

19*. Wykreślić funkcję

$$\text{a) } y = |x^2 - 2x|, \quad \text{b) } y = |x^2 + 5x + 6|, \quad \text{c) } y = \frac{1}{|x^2 - 1|}.$$

20*. Narysować wykres dowolnego trójmianu kwadratowego i na jego podstawie określić znaki współczynników i wyróżnika.

30. Ekstremum trójmianu kwadratowego

Ekstremum jest to *maksimum* lub *minimum*. Zajmiemy się obecnie takimi zadaniami, których rozwiązanie polega na znalezieniu ekstremum trójmianu kwadratowego.

Przykład. Dla jakiej wartości x trójmian $y = 2x^2 + x + 1$ przyjmuje wartość najmniejszą i ile ona wynosi?

Rozwiązanie. Trójmian sprowadzamy do postaci kanonicznej

$$y = 2x^2 + x + 1 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}.$$

Z postaci tej odczytujemy, że dla $x = -\frac{1}{4}$ trójmian przyjmuje najmniejszą wartość, równą $\frac{7}{8}$.

$$\text{Odp. Dla } x = -\frac{1}{4}, y = y_{\min} = \frac{7}{8}.$$

Przykład*. Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $x^3 + y^3$, gdy $x + y = 1$.

Rozwiązanie. Oznaczmy badane wyrażenie literą w . Ponieważ $y = 1 - x$, więc

$$w = x^3 + y^3 = x^3 + (1 - x)^3 = x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 3x^2 - 3x + 1$$

Zadanie sprowadza się zatem do znalezienia najmniejszej wartości trójmianu kwadratowego. Sprowadzamy ten trójmian do postaci kanonicznej

$$w = 3x^2 - 3x + 1 = 3\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) = 3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Z postaci tej odczytujemy, że dla $x = \frac{1}{2}$ trójmian przyjmuje najmniejszą wartość, równą $\frac{1}{4}$.

$$\text{Odp. } w_{\min} = \frac{1}{4}.$$

Przykład. Dla jakiej wartości x ułamek

$$u = \frac{1}{x^2 + x + 2}$$

przyjmuje wartość największą i ile ona wynosi?

Rozwiązanie. Ponieważ $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$, więc ułamek u przyjmuje tylko dodatnie wartości. Dla $x = -\frac{1}{2}$ mianownik jest najmniejszy i ułamek jest największy, równy $\frac{4}{7}$.

Odp. Dla $x = -\frac{1}{2}$, $u = u_{\min} = \frac{4}{7}$.

Przykład*. Rozłożyć daną liczbę dodatnią a na dwa składniki w ten sposób, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

Rozwiązanie. Oznaczmy jeden z nieznanych nam składników przez x . Drugi jest więc równy $a - x$. Oznaczamy następnie sumę kwadratów szukanych składników przez y ; stąd

$$y = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$$

więc

$$y = 2 \left(x^2 - ax + \frac{1}{2} a^2 \right) = 2 \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4} \right]$$

ostatecznie

$$y = 2 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

Z równości tej widać, że y ma wartość najmniejszą, równą $\frac{a^2}{2}$, gdy $x = \frac{a}{2}$.

Odp. Liczbę a należy rozłożyć na dwa równe składniki.

Przykład*. $a\%$ roztworu dwuskładnikowego stanowi roztwór o stężeniu 20% , resztę zaś roztwór o stężeniu $a\%$. Wykreślić zależność stężenia roztworu dwuskładnikowego od a i zbadać, kiedy to stężenie jest największe.

Rozwiązanie. Oznaczmy stężenie roztworu dwuskładnikowego przez s . Na podstawie treści zadania mamy

$$s = a \cdot \frac{20}{100} + (100 - a) \cdot \frac{a}{100}$$

czyli

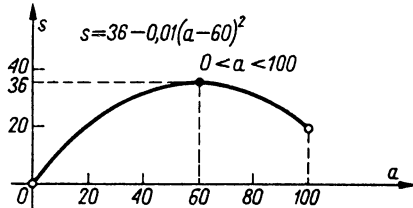
$$s = -0,01 a^2 + 1,2 a$$

więc po sprowadzeniu do postaci kanonicznej

$$s = 36 - 0,01 \cdot (a - 60)^2 \quad (30.1)$$

Z równości tej widać, że stężenie roztworu jest największe i wynosi 36% gdy $a = 60$. Wykres funkcji (30.1) znajduje się na rys. 30-1.

Odp. Rys. 30-1.



Rys. 30-1

Przykład*. Dwa kondensatory połączono szeregowo. Zbadać jak zmienia się pojemność tego układu, gdy pojemność obu kondensatorów zmieniamy tak, żeby ich suma była stała i równa $10 \mu\text{F}$.

Rozwiązanie. Niech x oznacza pojemność jednego z kondensatorów w μF . Pojemność drugiego kondensatora wynosi więc $(10-x) \mu\text{F}$. Oznaczmy następnie przez C pojemność rozpatrywanego układu. Mamy więc

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{x} + \frac{1}{10-x}$$

Stąd

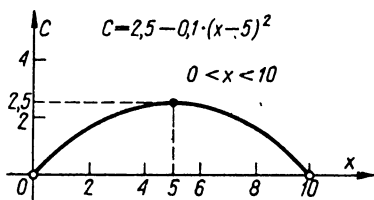
$$C = \frac{1}{10} x(10-x)$$

zaś po sprowadzeniu do postaci kanonicznej

$$C = 2,5 - 0,1 \cdot (x-5)^2$$

Z otrzymanej równości widać, że pojemność C jest największa i wynosi $2,5 \mu\text{F}$ gdy $x = 5 \mu\text{F}$, a więc wówczas, gdy pojemności obu połączonych kondensatorów są jednakowe. Rys. 30-2 ilustruje ten przykład.

Odp. Rys. 30-2.



Rys. 30-2

Przykład*. W dany okrąg o promieniu R wpisano prostokąt. Jakie powinny być długości boków tego prostokąta, aby jego pole było największe?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x długość jednego z boków szukanego prostokąta. Długość drugiego boku wynosi więc na podstawie twierdzenia Pitagorasa $\sqrt{4R^2 - x^2}$. Niech S oznacza pole prostokąta

$$S = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 x^2 - x^4}$$

Ponieważ

$$4R^2x^2 - x^4 = -(x^4 - 4R^2x^2) = -[(x^2 - 2R^2)^2 - 4R^4]$$

więc

$$S = \sqrt{4R^4 - (x^2 - 2R^2)^2} \quad (30.2)$$

Z równości (30.2) widać, że pole S jest największe, równe

$$\sqrt{4R^4} \text{ czyli } 2R^2, \text{ gdy } x^2 - 2R^2 = 0, \text{ czyli gdy } x = \sqrt{2} \cdot R,$$

(x jest z założenia liczbą dodatnią). Drugi bok prostokąta ma wówczas długość

$$\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - (\sqrt{2}R)^2} = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2} \cdot R$$

a więc taką samą jak pierwszy bok.

Odp. Długości boków powinny być równe.

Pytania i zadania

- 1*. Udowodnić, że ze wszystkich prostokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat.
- 2*. Zbadać, który z walców o danym obwodzie p przekroju osiowego ma największe pole powierzchni bocznej.
- 3*. Liczbę 100 przedstawić jako sumę takich dwóch składników, żeby ich iloczyn był największy.
- 4*. Dane są liczby $c_1, c_2, \dots, c_n$. Znaleźć taką liczbę x , żeby suma kwadratów

$$(x - c_1)^2 + (x - c_2)^2 + \dots + (x - c_n)^2$$

była najmniejsza.

- 5*. Na końcach sztywnego pręta o długości l osadzono dwie kuleczki o masach m i M . Zbadać względem jakiej osi, przechodzącej przez pręt prostopadle, moment bezwładności tego układu kuleczek jest najmniejszy; masę pręta oraz rozmiary kuleczek zaniedbujemy.
- 6*. Z kawałka blachy mającej kształt kwadratu o boku a wyciąć na rogach takie równe kwadraciki, aby po zagięciu brzegów można było otrzymać prostopadłościenne pudełeczko o największej pojemności.

31. Równanie kwadratowe

Definicja. Równanie

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (31.1)$$

w którym x jest niewiadomą, zaś $a \neq 0$, b i c są to liczby dane, nazywamy *równaniem kwadratowym* lub *równaniem drugiego stopnia*.

Równanie (31.1) powstaje przez przyrównanie do zera trójmianu kwadratowego

$y = ax^2 + bx + c$. Z przeprowadzonej w p. 29 dyskusji tego trójmianu wynika, że istnienie i liczba pierwiastków równania (31.1) zależy od wyróżnika

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (31.2)$$

Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie (31.1) ma dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (31.3)$$

Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie (31.1) ma jeden pierwiastek (tzw. *podwójny*)

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad (31.4)$$

Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie (31.1) nie ma pierwiastków (por. rys. 29 -4, str. 122).

Przykład. Rozwiązać równanie

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Rozwiązanie. Obliczamy $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$.

Odp. Równanie nie ma pierwiastków.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Rozwiązanie. Obliczamy $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$. Następnie korzystamy ze wzoru (31.4).

Odp. $x = -2$ (pierwiastek podwójny).

Przykład. Rozwiązać równanie

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

Rozwiązanie. Obliczamy $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 > 0$. Następnie korzystamy ze wzorów (31.3). Ponieważ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = +3$, więc

$$x_1 = \frac{-5-3}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$$

Odp. $x_1 = -4$, $x_2 = -1$.

Przykład. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$x^2 - 2x + m - 4 = 0$$

a) ma dwa pierwiastki, b) ma jeden pierwiastek (podwójny), c) nie ma pierwiastków?

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-4) = 4 - 4(m-4) = 20 - 4m = 4(5-m)$$

Równanie ma dwa pierwiastki gdy $\Delta > 0$, czyli gdy $m < 5$, ma jeden pierwiastek gdy $\Delta = 0$, czyli gdy $m = 5$, natomiast nie ma pierwiastków gdy $\Delta < 0$, czyli gdy $m > 5$.

Odp. a) $m < 5$, b) $m = 5$, c) $m > 5$.

Uwaga. Jeżeli $\Delta = 0$, to pierwiastek podwójny x_0 (31.4) równania (31.1) można obliczyć zarówno na podstawie pierwszego, jak i na podstawie drugiego ze wzorów (31.3). W związku z tym wygodnie jest niekiedy mówić, że równanie (31.1) ma w przypadku $\Delta = 0$ dwa *jednakowe* pierwiastki: $x_1 = x_2$ i w tym sensie nie rozróżniać tego przypadku od przypadku gdy $\Delta > 0$, w którym pierwiastki x_1 i x_2 są *różne*.

Przykład*. Ułożyć równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są liczby x_1 i x_2 .

Rozwiązanie. Przypominamy sobie postać iloczynową trójmianu kwadratowego. Szukanym równaniem jest

$$a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \quad (31.5)$$

gdzie a oznacza dowolną liczbę różną od 0. Istotnie, jest to równanie drugiego stopnia

$$ax^2 - a(x_1+x_2)x - ax_1x_2 = 0, \quad a \neq 0 \quad (31.6)$$

a ponadto liczby x_1 i x_2 spełniają to równanie, co jest bezpośrednio widoczne z jego postaci iloczynowej (31.5).

Odp. $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$; a – dowolna liczba różna od 0.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x+13}{x+1} \quad (31.7)$$

Rozwiązanie. Pierwiastków równania (31.7) poszukujemy w zbiorze $Z = R - \{-1, 1, 2\}$, ponieważ poza tym zbiorem równość (31.7) nie ma sensu. Zbiór Z jest tu *dziedziną* równania. Mnożymy równanie obustronnie przez $(x-1)(x-2)(x+1)$. Po wykonaniu łatwych rachunków otrzymamy równanie kwadratowe

$$5x^2 - 31x + 30 = 0 \quad (31.8)$$

które jest równoważne w zbiorze Z równaniu (31.7). Równanie (31.8) rozwiązujemy w znany sposób i dostajemy $x_1 = \frac{6}{5}$ i $x_2 = 5$. Ponieważ $x_1 \in Z$ i $x_2 \in Z$, więc znalezione liczby spełniają równanie (31.7).

Odp. $x_1 = \frac{6}{5}$, $x_2 = 5$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad (31.9)$$

Rozwiązanie. Dziedziną równania jest w tym przypadku zbiór $Z = R - \{-1, 1\}$. Mnożymy równanie obustronnie przez x^2-1 . Stąd dostajemy równanie kwadratowe

$$x^2 - 1 = 0 \quad (31.10)$$

które jest równoważne w zbiorze Z równaniu (31.9). Równanie (31.10) nie ma pierwiastków w zbiorze Z (jego pierwiastkami są liczby -1 i 1 , które nie należą do Z), więc równanie (31.9) także nie ma pierwiastków.

Odp. Równanie nie ma pierwiastków.

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$1 - \frac{2a}{x-a} = \frac{b^2 - a^2}{x^2 + a^2 - 2ax} \quad (31.11)$$

w którym x jest niewiadomą, zaś a i b są parametry. Przeprowadzić dyskusję ze względu na a i b .

Rozwiązanie. Dziedzina równania jest zbiór $Z = R - \{a\}$. Mnożymy równanie obustronnie przez $(x-a)^2$. Po wykonaniu łatwych rachunków dostajemy równanie kwadratowe

$$x^2 - 4ax + 4a^2 - b^2 = 0 \quad (31.12)$$

które jest równoważne w zbiorze Z równaniu (31.11). Rozwiązujemy równanie (31.12). Wyróżnik $\Delta = 4b^2$. Równanie ma dwa pierwiastki

$$x_1 = 2a - |b|, \quad x_2 = 2a + |b| \quad (31.13)$$

gdy $b \neq 0$, natomiast jeden pierwiastek podwójny $x_0 = 2a$, gdy $b = 0$. Należy teraz wykluczyć te rozwiązania równania (31.12), które nie należą do zbioru Z , czyli należy wykluczyć pierwiastek równy a .

Jeżeli $b \neq 0$, to na podstawie wzorów (31.13) mamy

$$x_1 = a \Leftrightarrow 2a - |b| = a \Leftrightarrow a = |b|$$

oraz

$$x_2 = a \Leftrightarrow 2a + |b| = a \Leftrightarrow a = -|b|$$

Dla $a \neq |b|$ i $a \neq -|b|$, czyli dla $a^2 \neq b^2$, równanie (31.12) ma dwa pierwiastki (31.13) różne od a , a więc takie, które są pierwiastkami równania (31.11). Jeżeli $a = |b|$, to tylko drugi z pierwiastków (31.13) należy do zbioru Z , $x_2 = 3a$. Jeżeli zaś $a = -|b|$, to tylko pierwszy z tych pierwiastków należy do zbioru Z , $x_1 = 3a$.

Jeżeli $b = 0$, to równanie (31.12) ma pierwiastek podwójny $x_0 = 2a$ należący do zbioru Z wtedy i tylko wtedy, gdy $2a \neq a$, czyli gdy $a \neq 0$.

Odp. Dwa pierwiastki: $2a - b$ i $2a + b$, gdy $b \neq 0$ i $a^2 \neq b^2$; jeden pierwiastek $3a$ gdy $b \neq 0$ i $a^2 = b^2$; jeden pierwiastek $2a$ gdy $b = 0$ i $a \neq 0$; równanie nie ma pierwiastków gdy $a = b = 0$.

Uwaga: ponieważ $|b| = b$ lub $|b| = -b$, więc zbiór utworzony z liczb $2a - |b|$ i $2a + |b|$ jest równy zbiorowi utworzonemu z liczb $2a - b$ i $2a + b$.

Wzory Viète'a. Niech $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Wiemy, że równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma w tym przypadku dwa pierwiastki (różne albo jednakowe). Obliczmy ich sumę i iloczyn.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Ostatecznie

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (31.14)$$

Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta = 0$, to wzory (31.14) przyjmują postać

$$2x_0 = -\frac{b}{a}, \quad x_0^2 = \frac{c}{a} \quad (31.15)$$

Przykład. Ułożyć równanie kwadratowe, którego suma pierwiastków równa jest 5, a iloczyn równy jest 4.

Rozwiązanie. Na podstawie wzorów Viète'a mamy

$$-\frac{b}{a} = 5 \quad \text{czyli} \quad b = -5a \quad \text{i} \quad \frac{c}{a} = 4 \quad \text{czyli} \quad c = 4a$$

Odp. $ax^2 - 5ax + 4a = 0$, a – dowolna liczba różna od 0.

Przykład. Obliczyć sumę kwadratów pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$.

Rozwiązanie. Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$\text{Odp. } \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Przykład*. Ułożyć równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są odwrotności pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez z_1 i z_2 pierwiastki równania, które mamy ułożyć, natomiast x_1 i x_2 oznaczać będą pierwiastki równania $ax^2 + bx + c = 0$. Z warunków zadania mamy

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} \\ z_1 \cdot z_2 &= \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c} \end{aligned} \quad (31.16)$$

Szukane równanie piszemy w postaci $(x - z_1)(x - z_2) = 0$, czyli $x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 \cdot z_2 = 0$. Korzystając z obliczeń (31.16) mamy więc

$$x^2 - \left(-\frac{b}{c}\right)x + \frac{a}{c} = 0, \quad \text{czyli} \quad cx^2 + bx + a = 0$$

$$\text{Odp. } cx^2 + bx + a = 0.$$

Równanie kwadratowe niepełne, jest to równanie każdej z następujących trzech postaci

$$ax^2 + c = 0, \quad (a \neq 0, b = 0, c \neq 0) \quad (31.17)$$

$$ax^2 = 0, \quad (a \neq 0, b = 0, c = 0) \quad (31.18)$$

$$ax^2 + bx = 0, \quad (a \neq 0, b \neq 0, c = 0) \quad (31.19)$$

Równania (31.17)–(31.19) łatwo jest rozwiązać bezpośrednio, nie korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, a mianowicie:

Równanie $ax^2 + c = 0$ nie ma pierwiastków, gdy a i c są jednakowych znaków, natomiast ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

gdy a i c są różnych znaków, ponieważ wówczas

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right) \vee \left(x = \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) \right]$$

Równanie $ax^2 = 0$ ma jeden pierwiastek (podwójny) $x_0 = 0$.

Równanie $ax^2 + bx = 0$ ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

ponieważ

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[(x = 0) \vee \left(x = -\frac{b}{a}\right) \right]$$

Przykłady

$x^2 + 3 = 0$, równanie nie ma pierwiastków

$$3x^2 - 9 = 0, \quad x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = \sqrt{3}$$

$$x^2 + 6x = 0, \quad x(x + 6) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -6$$

Równanie dwukwadratowe $ax^4 + bx^2 + c = 0$, sprowadza się do równania kwadratowego za pomocą podstawiania $z = x^2$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad (31.20)$$

Rozwiązanie. Podstawiamy $x^2 = z$, zatem $z^2 - 5z + 4 = 0$, skąd $z_1 = 1$, $z_2 = 4$. Równanie (31.20) jest więc równoważne alternatywie dwóch równań kwadratowych niepełnych

$$x^2 = 1 \quad \text{lub} \quad x^2 = 4$$

Odp. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$x^4 + x^2 - 2 = 0 \quad (31.21)$$

Rozwiązanie. Podstawiając $x^2 = z$ dostajemy $z^2 + z - 2 = 0$. Stąd $z_1 = 1$, $z_2 = -2$. Z tych dwóch liczb tylko pierwsza może być kwadratem innej liczby. Równanie (31.21) jest więc równoważne równaniu kwadratowemu $x^2 = 1$.

Odp. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Pytania i zadania

1. Omówić rozwiązywanie równań kwadratowych.
2. Co to są równania kwadratowe *niezupełne*? Omówić rozwiązanie tego rodzaju równań.
3. Co to jest równanie *dwukwadratowe* i jak się je rozwiązuje?
4. Podać wzory *Viète'a*.
5. Rozwiązać równania

- a) $12x^2 + 7x = 0$, b) $x^2 - 49 = 0$, c) $x^2 + 1 = 0$, d) $x^2 + x + 1 = 0$,
 e) $x^2 + 2x + 1 = 0$, f) $x^2 + 3x + 1 = 0$, g) $x^2 + 7x + 10 = 0$,
 h) $x^2 - 135x + 4050 = 0$, i) $6x^2 - 23x + 21 = 0$, j) $x^2 + 2x + 6 = 0$.

Wskazówka do h): podstawić $x = 45z$.

6. Rozwiązać równania

- a) $\frac{1}{2x-1} + \frac{2}{2x+1} = 1$, b) $\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1} = \frac{3}{x+1} + 1$,
 c) $(5x+2)^2 = 16x^2$, d) $\frac{x+8}{x-8} - 2 = \frac{24}{x-4}$,
 e) $\frac{2x}{2x+1} + \frac{2x}{2x+4} = 1$, f) $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$,
 g) $\frac{2x+5}{2x-5} + \frac{2x-5}{2x+5} = \frac{10}{3}$.

7. Rozwiązać równania

- a) $\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x-a} = \frac{8}{3}$, b) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{a(3x+2a)}{x^2-a^2}$,
 c) $\frac{2x}{x+b} - \frac{x}{b-x} = \frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$, d) $\frac{a}{x-a} = \frac{x-a}{2x} \quad (a \neq 0)$.

8*. Rozwiązać równania

- a) $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$,
 b) $\frac{1}{x^3-x^2+x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{x^2+10x}{x^4-1} - \frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$

9*. Rozwiązać równania

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{a+b}{2a-ax+2-x} + \frac{1}{a+1} = \frac{b+1}{2x-x^2}, & \text{b)} \frac{2x}{x-b} + \frac{12x^2}{b^2-x^2} = \frac{b-x}{x+b}, \\ \text{c)} \frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{x-a-b}, & \text{d)} \frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2-a^2}. \end{array}$$

10. Znaleźć równanie kwadratowe $x^2+px+q=0$, którego pierwiastkami są liczby

a) a, b , b) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, c) $8, -9$, d) $a, \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$).

11. Dla jakiej wartości parametru k równanie

$$(k+2)x^2+6kx+4k-1=0$$

ma pierwiastek podwójny?

12*. Suma kwadratów pierwiastków równania $x^2-8x+q=0$ równa jest 34. Znaleźć te pierwiastki.

13*. Rozwiązać równanie $x^2+px+45=0$ wiedząc, że kwadrat różnicy jego pierwiastków równy jest 144.

14. Wykazać, że równanie

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$$

ma rozwiązanie, gdy $a^2+b^2 > 0$.

15*. Ułożyć równanie kwadratowe, którego suma kwadratów pierwiastków równa jest 5, zaś suma odwrotności pierwiastków wynosi $\frac{3}{2}$.

16*. Obliczyć sumę kwadratów pierwiastków równania $x^2+px+q=0$.

17*. Ułożyć równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są sześciang punkty równania $ax^2+bx+c=0$.

18*. Znaleźć taką wartość parametru a , dla której suma kwadratów pierwiastków równania $x^2-ax+a-1=0$ jest najmniejsza.

19. Rozwiązać równania dwukwadratowe

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x^4-41x^2+400=0, & \text{b)} 4x^4-25x^2+6=0, & \text{c)} x^4+5x^2+4=0, \\ \text{d)} x^4-35x^2-36=0, & \text{e)} x^4+2x^2+1=0, & \text{f)} x^4-2x^2+1=0. \end{array}$$

20*. Udowodnić, że jeśli x_1, x_2, x_3 i x_4 są pierwiastkami równania dwukwadratowego $ax^4+bx^2+c=0$, to

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=0$$

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{c}{a}$$

21. Ułożyć równanie dwukwadratowe, jeżeli znane są dwa jego pierwiastki: 3 i 4.

32. Zastosowanie równań kwadratowych

Podamy teraz przykłady zagadnień, których rozwiązanie wiedzie poprzez równania kwadratowe.

Przykład¹⁾. Skoczek spadochronowy wyskakuje z samolotu. Dopiero po pewnym czasie otwiera spadochron, przez co jego prędkość zmniejsza się o połowę (zakładamy że hamowanie odbywa się momentalnie). Odtąd leci ruchem jednostajnym i ląduje po 20 sekundach. Ile czasu trwał cały lot, jeżeli skoczek przeleciał łącznie 1000 m?

Rozwiązanie. Oznaczamy przez t wyrażony w sekundach czas lotu skoczka do chwili otwarcia spadochronu

do chwili otwarcia spadochronu $\frac{gt^2}{2}$ m
skoczek przeleciał

od chwili otwarcia spadochronu do $\frac{gt}{2} \cdot 20$ m
chwili lądowania skoczek przeleciał

Z warunków zadania

$$\frac{gt^2}{2} + \frac{gt}{2} \cdot 20 = 1000$$

Przyjmując $g = 10 \text{ m/s}^2$ i dzieląc obustronnie przez 5, otrzymamy równanie kwadratowe

$$t^2 + 20t - 200 = 0$$

Równanie to ma dwa pierwiastki: $t_1 = 10(\sqrt{3}-1)$, $t_2 = -10(\sqrt{3}+1)$, z których tylko pierwszy odpowiada fizycznej treści zadania. Łączny czas lotu skoczka wynosi więc $t_1 + 20$ s, czyli $10(\sqrt{3}+1)$ s.

Od p. Cały lot trwał $10(\sqrt{3}+1)$ s (w przybliżeniu 27,3 s).

Przykład*. 120 g wody zmieszano z pewną ilością kwasu solnego, stanowiącą $x\%$ danej ilości wody. Do otrzymanej mieszaniny dolano znów pewną ilość kwasu solnego, stanowiącą $x\%$ tej mieszaniny. Wreszcie dolano 27,2 g wody. W ten sposób otrzymano 40% roztwór kwasu solnego. Obliczyć x .

Rozwiązanie. Mieszanina zawiera

$$120 + 120 \cdot \frac{x}{100} + \left(120 + 120 \cdot \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{x}{100} + 27,2 \text{ g}$$

w tym

$$120 \cdot \frac{x}{100} + \left(120 + 120 \cdot \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{x}{100} \text{ g}$$

kwasu solnego. Ponieważ otrzymano roztwór 40%, więc stosunek masy kwasu

¹⁾ 1 s = 1 sekunda (oznaczenie w układzie SI).

solnego zawartego w roztworze do masy całego roztworu wynosi $\frac{40}{100}$ czyli $\frac{2}{5}$.

Stąd

$$\frac{1,2 \cdot x + 1,2(1 + 0,01 \cdot x)x}{147,2 + 1,2x + 1,2(1 + 0,01x)x} = \frac{2}{5}$$

Po wykonaniu łatwych lecz żmudnych rachunków dostajemy

$$0,036x^2 + 7,2x - 294,4 = 0$$

Obliczamy wyróżnik $\Delta = 94,2336$; stąd $\sqrt{\Delta} \approx 9,71$. Równanie ma tylko jeden dodatni pierwiastek $x \approx 34,7$, który odpowiada fizycznej treści zadania.

Odś. $x \approx 34,7$

Przykład*. Przy obracaniu się dwóch kół połączonych pasem napędowym jedno wykonuje o 400 obrotów na minutę mniej niż drugie, ponieważ na wykonanie pięciu obrotów potrzebuje o jedną sekundę więcej niż drugie. Ile obrotów na minutę wykonuje każde koło?

Rozwiązanie. Niech x oznacza liczbę obr/min pierwszego koła; drugie obraca się więc $(400+x)$ razy na minutę.

Na wykonanie jednego obrotu
pierwsze koło potrzebuje $\frac{60}{x}$ s

na wykonanie jednego obrotu
drugie koło potrzebuje $\frac{60}{x+400}$ s

Na wykonanie pięciu obrotów pierwsze koło potrzebuje więc

$$\frac{300}{x} \text{ s, a drugie } \frac{300}{x+400} \text{ s}$$

Z warunku zadania mamy

$$\frac{300}{x} = \frac{300}{x+400} + 1$$

Otrzymane równanie jest równoważne w zbiorze $Z = R - \{0, -400\}$ równaniu kwadratowemu, które rozwiązujemy w znany sposób i dostajemy $x_1 = -600$, $x_2 = 200$. Tylko drugi z tych pierwiastków odpowiada fizycznej treści zadania.

Odś. Pierwsze koło wykonuje 200 obr/min, a drugie 600 obr/min.

Przykład*. W turnieju szachowym każdy z zawodników rozegrał po dwie partie z każdym z pozostałych zawodników. W ten sposób rozegrano ogółem 182 partie. Ilu było zawodników?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x liczbę zawodników biorących udział w turnieju.

Każdy z nich rozegrał $2(x-1)$ partii, więc wszyscy łącznie rozegrali $2 \cdot (x-1) \cdot x \cdot \frac{1}{2}$

partii, ponieważ szachy są grą dwuosobową. Stąd $x(x-1) = 182$, czyli $x^2 - x - 182 = 0$, więc $x_1 = -13$, $x_2 = 14$. Tylko druga z tych liczb odpowiada treści zadania.

Odp. 14.

Przykład*. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 10. Jeżeli tę liczbę pomnożymy przez inną liczbę o tych samych cyfrach napisanych w przeciwnym porządku, to otrzymamy 2701. Co to za liczba?

Rozwiązanie. Oznaczmy pierwszą z szukanych cyfr przez x ; druga jest więc równa $10-x$, czyli liczbami o których mowa w zadaniu są

$$10 \cdot x + (10-x) \text{ oraz } 10 \cdot (10-x) + x$$

Ponieważ iloczynem tych liczb jest 2701, więc mnożąc je i przyrównując do 2701 dostajemy równanie

$$x^2 - 10x + \frac{1701}{81} = 0$$

Stąd $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.

Odp. 37 albo 73.

Przykład*. Łódka motorowa przebyła w ciągu 8 h 20 min 80 km z prądem rzeki i taką samą drogę pod prąd. Jaka jest prędkość prądu, jeżeli prędkość własna łódki wynosi 20 km/h?

Rozwiązanie. Niech x oznacza prędkość prądu w km/h

$$\text{czas jazdy z prądem wynosi } \frac{80}{20+x} \text{ h}$$

$$\text{czas jazdy pod prąd wynosi } \frac{80}{20-x} \text{ h}$$

Ponieważ łączny czas jazdy wynosi $8\frac{1}{3}$ h, więc

$$\frac{80}{20+x} + \frac{80}{20-x} = \frac{25}{3},$$

skąd $5x^2 = 80$, czyli $x = 4$ (pierwiastek ujemny odrzucamy).

Odp. 4 km/h.

Równania pierwiastkowe. Podamy teraz przykłady zastosowania równań kwadratowych do rozwiązywania tzw. *równań pierwiastkowych*, w których niewiadoma znajduje się pod znakiem pierwiastka.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$x + \sqrt{10x+6} = 9 \quad (32.1)$$

Rozwiązanie (analiza starożytnych).

$$\begin{aligned}x + \sqrt{10x+6} &= 9 \Rightarrow \sqrt{10x+6} = 9-x \Rightarrow \\&\Rightarrow 10x+6 = (9-x)^2 \Rightarrow \\&\Rightarrow x^2 - 28x + 75 = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow [(x=3) \vee (x=25)]\end{aligned}$$

Sprawdzenie pierwiastka 3: $3 + \sqrt{10 \cdot 3 + 6} = 3 + 6 = 9$, więc liczba 3 spełnia równanie (32.1).

Sprawdzenie pierwiastka 25: $25 + \sqrt{10 \cdot 25 + 6} = 25 + 16 = 41 \neq 9$, więc liczba 25 nie spełnia równania (32.1).

Odp. 3.

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (32.2)$$

Rozwiązanie. Dwa razy podnosimy obustronnie do kwadratu

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} - \sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 1-x-2\sqrt{x}\sqrt{1-x}+x = \frac{1}{3} \Rightarrow \\&\Rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \\&\Rightarrow x(1-x) = \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{9} = 0\end{aligned}$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Sprawdzenie x_1 :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x_1} - \sqrt{x_1} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}} = \\&= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}) = \\&= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}) = \\&= \frac{1}{2\sqrt{3}} (1+\sqrt{5} - \sqrt{5}+1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

więc x_1 spełnia równanie (32.2).

Sprawdzenie x_2 :

$$\sqrt{1-x_2}-\sqrt{x_2} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}} - \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

więc x_2 nie spełnia równania (32.2).

Odp. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}$.

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=x \quad (32.3)$$

gdzie a jest daną liczbą dodatnią.

Rozwiązanie. Dwa razy podnosimy obustronnie do kwadratu

$$\begin{aligned}\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=x &\Rightarrow a+x+2\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a-x}+a-x=x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a-x}=x^2-2a \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^4-4(a-1)x^2=0\end{aligned}$$

Otrzymane równanie ma pierwiastek $x=0$, a ponadto dwa pierwiastki

$$x_1=-2\sqrt{a-1}, \quad x_2=2\sqrt{a-1} \quad (32.4)$$

gdy $a \geq 1$.

Sprawdzenie. Liczba 0 nie spełnia równania (32.3) dla żadnego dodatniego a . Pierwszy z pierwiastków (32.4) także nie spełnia równania (32.3), ponieważ dla $a=1$ jest równy 0, zaś dla $a>1$ jest ujemny, podczas gdy lewa strona równania (32.3) jest nieujemna. Pozostał do sprawdzenia pierwiastek x_2 . Mamy

$$\begin{aligned}\sqrt{a+x_2} &= \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2} = \sqrt{a-1}+1\end{aligned}$$

oraz

$$\sqrt{a-x_2} = \sqrt{a-1-2\sqrt{a-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2} = |\sqrt{a-1}-1|$$

Podstawiając x_2 do równania (32.3) dostajemy więc równość

$$\sqrt{a-1}+1+|\sqrt{a-1}-1|=2\sqrt{a-1}$$

która jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $|\sqrt{a-1}-1|=\sqrt{a-1}-1$, czyli gdy $a \geq 2$.

Odp. $2\sqrt{a-1}$, gdy $a \geq 2$; nie ma pierwiastków dla $a < 2$.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \sqrt{5-3x+x^2} + \sqrt{5-3y+y^2} = 6 \\ x+y=3 \end{cases} \quad (32.5)$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy z drugiego równania $y = 3 - x$ i podstawiamy do pierwszego równania, a następnie obustronnie dzielimy przez 2; stąd

$$\sqrt{5-3x+x^2} = 3$$

Podnosimy obustronnie do kwadratu i dostajemy równanie kwadratowe $x^2 - 3x - 4 = 0$, którego pierwiastkami są liczby $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Następnie obliczamy $y_1 = 3 - x_1 = 4$, $y_2 = 3 - x_2 = -1$. Otrzymaliśmy dwie pary liczb $(-1, 4)$ i $(4, -1)$, z których każda spełnia układ (32.5), co sprawdzamy łatwym rachunkiem.

Odp. $(-1, 4)$, $(4, -1)$.

Uwaga. Pisząc $(-1, 4)$ mamy na myśli, że $x = -1$, $y = 4$, itp.

Pytania i zadania

- Obwód prostokąta wynosi 160 cm a jego pole 1500 cm². Obliczyć długości boków.
- Ile boków ma wielokąt wypukły, jeżeli liczba jego przekątnych jest o 12 większa od liczby jego boków?
- *. Suma kwadratów trzech kolejnych nieparzystych liczb naturalnych równa jest 371. Znaleźć te liczby.
- Dwa autobusy wyruszyły jednocześnie z miejscowości *A* do miejscowości *B*; odległość między tymi miejscowościami wynosi 36 km. Pierwszy autobus przybył do miejscowości *B* o 20 min wcześniej, ponieważ jechał z prędkością większą o 9 km/h. Obliczyć prędkości obu autobusów.
- Licznik ułamka jest o 3 mniejszy od mianownika. Jeżeli do tego ułamka dodamy jego odwrotność, to otrzymamy 2,9. Znaleźć ten ułamek.
- *. Odgłos upadającego na dno studni kamienia usłyszano w 4 s od chwili swobodnego puszczenia go. Obliczyć głębokość studni przyjmując prędkość głosu 330 m/s i przyspieszenie ziemskie 10 m/s².
- Jedna z dwóch sił przyłożonych w pewnym punkcie i tworzących ze sobą kąt prosty jest o 2 kG większa od drugiej, zaś ich wypadkowa wynosi 10 kG. Obliczyć te siły.
- *. Dwaj robotnicy, z których drugi rozpoczął pracę półtora dnia później od pierwszego, wykonali pewną pracę w ciągu 7 dni, licząc od chwili rozpoczęcia pracy przez pierwszego robotnika. Drugi robotnik pracując sam może wykonać tę pracę w czasie o 3 dni krótszym niż pierwszy. W ciągu jakiego czasu każdy z robotników może wykonać tę pracę?
- Rozwiązać równanie

$$a) \sqrt{5x+10} = 8-x, \quad b) \sqrt{36+x} = 2 + \sqrt{x}, \quad c) \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7.$$

- 10*. Rozwiązać równanie

$$a) x-15 = \sqrt{9+8x-x^2}, \quad b) 3-\sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2},$$

$$c) \sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} = 2, \quad d) \sqrt[3]{2+x} = \sqrt{2-x}.$$

11*. Rozwiązać równanie

$$\text{a) } \sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}, \quad \text{b) } \sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{a+b-2x},$$

$$\text{c) } x + \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

12*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+5} = 5 \end{cases}$$

33. Nierówności kwadratowe

Definicja. *Nierówność kwadratowa* (drugiego stopnia) jest to nierówność

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c > 0, \quad (a \neq 0)$$

przy czym zamiast nierówności mocnych (ostrzych), mogą być także nierówności słabe (nieostre).

Nierówności kwadratowe wygodnie jest rozwiązywać korzystając z wykresów ilustrujących zmienność trójmianu kwadratowego (rys. 29-4, str. 122). Z tych wykresów (należy je pamiętać), można po prostu odczytać rozwiązanie każdej nierówności kwadratowej.

Przykłady (korzystamy z rys. 29-4).

$$x^2 + 2x - 35 > 0; \quad a = 1 > 0, \quad \Delta = 144 > 0, \quad x_1 = -7, \quad x_2 = 5.$$

Odp. $(x < -7) \vee (x > 5)$.

$$x^2 - 8x + 16 > 0; \quad a = 1 > 0, \quad \Delta = 0, \quad x_0 = 4.$$

Odp. $(x < 4) \vee (x > 4)$.

$$6x^2 + x - 1 < 0; \quad a = 6 > 0, \quad \Delta = 25 > 0, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Odp. } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}.$$

$$x^2 + 2x + 5 < 0; \quad a = 1 > 0, \quad \Delta = -16 < 0.$$

Odp. Nierówność jest sprzeczna.

$$-3x^2 + x - 5 < 0; \quad a = -3 < 0, \quad \Delta = -59 < 0.$$

Odp. Nierówność jest tożsamościowa.

$$x^2 + 5x - 6 \geq 0; \quad a = 1 > 0, \quad \Delta = 49 > 0, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 1.$$

Odp. $(x \leq -6) \vee (x \geq 1)$.

$$x^2 + 2x + 1 \leq 0; \quad a = 1 > 0, \quad \Delta = 0, \quad x_0 = -1.$$

Odp. $x = -1$.

Zastosowanie nierówności kwadratowych. Zajmiemy się obecnie zastosowaniem wiadomości o nierównościach kwadratowych do rozwiązywania różnego rodzaju zadań.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 4} < 0 \quad (33.1)$$

Rozwiązanie. Nierówność (33.1) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy trójmian w mianowniku jest ujemny, $x^2 + 5x + 4 < 0$, co ma miejsce jedynie dla $x \in (-4; -1)$.

Odp. $-4 < x < -1$.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$\frac{x+5}{4-x} < 0 \quad (33.2)$$

Rozwiązanie. Iloraz dwóch liczb jest ujemny wtedy i tylko wtedy, gdy te liczby są różnych znaków, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest ujemny. Nierówność (33.2) jest więc równoważna nierówności $(x+5)(4-x) < 0$, czyli $(x+5)(x-4) > 0$. Otrzymaliśmy nierówność kwadratową: $a = 1 > 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = 4$, którą rozwiązujemy w znany sposób

Odp. $(x < -5) \vee (x > 4)$.

U w a g a. Nierówności ułamkowe, do których należy nierówność (33.2), rozwiązywaliśmy już w p. 25 rozdz. IV (str. 97) inną metodą.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$\frac{2x-1}{x+3} \geq 0 \quad (33.3)$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x+3} \geq 0 &\Leftrightarrow \left[\left(\frac{2x-1}{x+3} = 0 \right) \vee \left(\frac{2x-1}{x+3} > 0 \right) \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\left(x = \frac{1}{2} \right) \vee [(2x-1)(x+3) > 0] \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\left(x = \frac{1}{2} \right) \vee (x < -3) \vee \left(x > \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Odp. $x < -3$ lub $x \geq \frac{1}{2}$.

Uwaga. Nierówność (33.3) nie jest równoważna nierówności $(2x-1)(x+3) \geq 0$, ponieważ ta ostatnia jest spełniona dla $x = -3$, natomiast liczba -3 nie spełnia nierówności (33.3).

Przykład*. Rozwiązać układ nierówności

$$\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} > 1 \quad \text{ï} \quad x^2 < 4 \quad (33.4)$$

Rozwiązanie. Przekształcamy pierwszą z nierówności (33.4)

$$\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{x^2-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-3x}{x^2-1} > 0$$

Mamy następnie

$$\frac{2-3x}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2-3x < 0 \\ x^2-1 < 0 \end{cases}$$

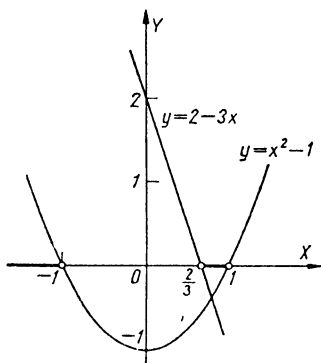
Otrzymaliśmy alternatywę dwóch układów nierówności, które kolejno rozwiązujemy:

$$\begin{cases} 2-3x > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\left(x < \frac{2}{3} \right) \wedge (x^2 > 1) \right] \Leftrightarrow x < -1$$

oraz

$$\begin{cases} 2-3x < 0 \\ x^2-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\left(x > \frac{2}{3} \right) \wedge (x^2 < 1) \right] \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 1$$

Na rys. 33-1 przedstawiona jest interpretacja geometryczna rozwiązania tej alternatywy dwóch układów nierówności: jest ona spełniona wtedy i tylko wtedy,



Rys. 33-1

gdy $x < -1$ lub $\frac{2}{3} < x < 1$. Ten sam zbiór liczb stanowi więc zbiór rozwiązań pierwszej z nierówności (33.4). Druga z tych nierówności jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $-2 < x < 2$. Zbiorem rozwiązań układu (33.4) jest iloczyn zbiorów

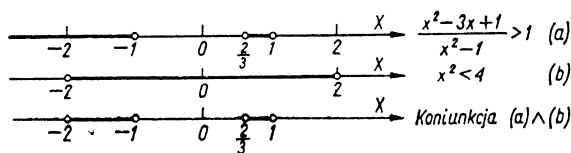
$$\left[(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 1 \right) \right] \cap (-2; 2)$$

czyli zbiór

$$(-2; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \quad (33.5)$$

Odp. Zbiór (33.5).

Rys. 33-2 ilustruje na przykładzie układu (33.4) znajdowanie zbioru rozwiązań koniunkcji nierówności, gdy znane są zbiory rozwiązań każdej nierówności oddzielnie.



Rys. 33-2

Przykład*. Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie układu

$$\begin{cases} 2x + 8(m^2 + 1)y = 5 \\ x + 5m^2y = 2 \end{cases} \quad (33.6)$$

spełnia warunki: $x > 0$ i $y > 0$?

Rozwiązanie. Rozwiązując układ w znany sposób dostajemy

$$x = \frac{16 - 9m^2}{2(4 - m^2)}, \quad y = \frac{1}{2(4 - m^2)}$$

Ponieważ $y > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $4 - m^2 > 0$, zaś $x > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $4 - m^2$ jest tego samego znaku co $16 - 9m^2$, więc

$$[(x > 0) \wedge (y > 0)] \Leftrightarrow [(4 - m^2 > 0) \wedge (16 - 9m^2 > 0)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 < \frac{16}{9} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < m < \frac{4}{3}$$

Odp. $\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Przykład*. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$(m+1)x^2 - 4mx + m+1 = 0 \quad (33.7)$$

ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

Rozwiązanie. Równanie (33.7) ma dwa różne pierwiastki dodatnie x_1, x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m+1 \neq 0, \Delta > 0, \quad x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 > 0 \quad (33.8)$$

Mamy tu $\Delta = (-4m)^2 - 4 \cdot (m+1)^2 = 4(3m^2 - 2m - 1)$, $x_1 \cdot x_2 = 1$ (wartość $m = -1$ wykluczaliśmy, ponieważ równanie ma wówczas jeden pierwiastek 0)

oraz $x_1 + x_2 = \frac{4m}{m+1}$. Układ warunków (33.8) jest więc równoważny układowi dwóch nierówności

$$\begin{cases} 3m^2 - 2m - 1 > 0 \\ m(m+1) > 0 \end{cases}$$

Pierwsza z nich jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $m < -\frac{1}{3}$ lub $m > 1$, natomiast druga – gdy $m < -1$ lub $m > 0$.

Odp. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Przykład*. Dla jakich wartości parametru m liczba 5 leży między pierwiastkami równania

$$x^2 + 4mx + 3m^2 = 0 \quad (33.9)$$

Rozwiązanie. Ponieważ wykres trójmianu $y = x^2 + 4mx + 3m^2$ jest zwrócony wierzchołkiem w dół, więc liczba 5 leży między pierwiastkami równania (33.9) wtedy i tylko wtedy, gdy trójmian przyjmuje dla niej wartość ujemną: $5^2 + 4m \cdot 5 + 3m^2 < 0$. Otrzymaliśmy zatem nierówność kwadratową $3m^2 + 20m + 25 < 0$, którą rozwiązujemy w znany sposób.

Odp. $-5 < m < -\frac{5}{3}$.

Przykład*. Udowodnić, że równanie

$$x^2 + px + q = 0 \quad (33.10)$$

ma dwa różne pierwiastki większe od liczby a wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące trzy warunki

$$p^2 - 4q > 0, \quad p + 2a < 0, \quad q + ap + a^2 > 0 \quad (33.11)$$

Rozwiązanie. Równanie (33.10) ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli gdy spełniony jest pierwszy z warunków (33.11). Na to, żeby te pierwiastki x_1 i x_2 były większe od liczby a potrzeba i wystarczy, żeby $x_1 - a > 0$ i $x_2 - a > 0$, czyli

$$(x_1 - a) + (x_2 - a) > 0 \text{ i } (x_1 - a)(x_2 - a) > 0$$

Stąd

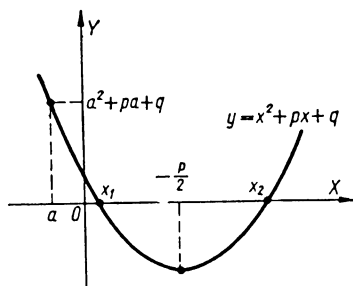
$$x_1 + x_2 - 2a > 0 \text{ i } x_1 x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 > 0 \quad (33.12)$$

Ponieważ na podstawie wzorów Viète'a mamy $x_1 + x_2 = -p$ oraz $x_1 \cdot x_2 = q$, więc warunki (33.12) mają postać

$$p + 2a < 0 \text{ i } q + ap + a^2 > 0, \text{ cnd.}$$

Uwaga. Warunki (33.11) można interpretować geometrycznie na podstawie znajomości wykresów trójmianu kwadratowego. Lewa strona równania (33.10) jest trójmianem kwadratowym, którego wykres jest zwrócony wierzchołkiem w dół. Warunek $p^2 - 4q > 0$ oznacza, że parabola przecina oś OX w dwóch różnych punktach x_1 i x_2 . Warunek $q + ap + a^2 > 0$ oznacza, że punkt a leży na zewnątrz odcinka o końcach x_1 i x_2 . Wreszcie warunek $p + 2a < 0$ oznacza, że odcięta wierz-

chołka paraboli jest większa od a . Te trzy warunki łącznie są konieczne i wystarczające do tego, żeby punkt a leżał na osi OX po lewej stronie odcinka łączącego punkty x_1 i x_2 — zgodnie z treścią zadania. Rys. 33-3 ilustruje tę interpretację.



Rys. 33-3

Przykład*. Dla jakich wartości parametrów p i q równanie

$$x^2 + px + q = 0 \quad (33.13)$$

ma dwa różne pierwiastki większe od liczby a , natomiast mniejsze od liczby b , ($a < b$)?

Rozwiązanie. Na to, żeby równanie (33.13) miało dwa różne pierwiastki potrzeba i wystarcza, żeby

$$p^2 - 4q > 0 \quad (33.14)$$

Pierwiastki te będą większe od liczby a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p + 2a < 0 \text{ i } q + ap + a^2 > 0 \quad (33.15)$$

(por. (33.11)), będą natomiast mniejsze od liczby b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p + 2b > 0 \text{ i } q + bp + b^2 > 0 \quad (33.16)$$

Odp. Koniunkcja warunków: (33.14), (33.15) i (33.16).

Pytania i zadania

- Omówić rozwiązywanie nierówności kwadratowych za pomocą wykresów odpowiednich funkcji kwadratowych.
- Rozwiązać nierówności
 - $x^2 + 2x - 3 < 0$,
 - $-x^2 + 2x - 2 > 0$,
 - $x^2 + x + 5 > 0$,
 - $-x^2 + x - 5 > 0$,
 - $x^2 + 4x < 0$,
 - $x^2 - 9 > 0$.
- Rozwiązać nierówności
 - $\frac{331}{x^2 - 1} > 0$,
 - $\frac{1}{2x^2} > 8$,
 - $\frac{1}{3x^2} \leq 3$,
 - $\frac{1}{x^3} > 27$.

4*. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$x^2 + (2m + 6)x + 4m + 12 = 0$$

- a) ma dwa różne pierwiastki, b) ma jeden pierwiastek podwójny, c) nie ma pierwiastków, d) ma dwa pierwiastki większe od -1 ?
- 5*. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki x_1 i x_2 równania

$$\frac{mx}{m-1} + \frac{m+1}{x} = x+1$$

spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m+1$?

- 6*. Dla jakich wartości parametru m ułamek

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1}$$

jest większy od -3 przy wszelkich wartościach rzeczywistych zmiennej x ?

- 7*. Dla jakich wartości parametru a równanie

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{1}{ax} + 2$$

ma dwa pierwiastki spełniające nierówność

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} > 4?$$

- 8*. Dla jakich wartości a wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ ax + 4y = 6 \end{cases}$$

spełniają nierówności: $x > 1$ i $y > 0$?

- 9*. Dla jakich wartości x spełniona jest nierówność

$$\frac{14}{x^2 - 5x + 6} < \frac{10}{2 - x} - 3$$

- 10*. Dla jakich wartości a układ nierówności

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

jest spełniony dla wszelkich wartości x ?

34. Układ dwóch równań pierwszego lub drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi

W p. 26 rozdz. IV mówiliśmy o równaniu z dwiema niewiadomymi x i y , jego rozwiązaniu i wykresie — stanowiącym obraz geometryczny zbioru rozwiązań. Wiemy, że wykresem równania pierwszego stopnia

$$ax + by + c = 0, \quad (a \neq 0 \text{ lub } b \neq 0) \quad (34.1)$$

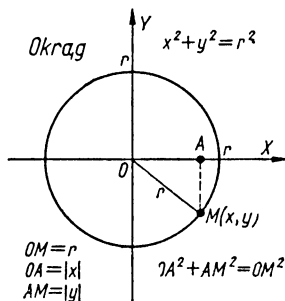
jest linia prosta.

Równanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y jest to równanie

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (34.2)$$

przy czym co najmniej jeden z trzech współczynników: A , B i C , jest różny od zera. Zbiór rozwiązań równania (34.2) może być pusty — tak jest np. w przypadku równania $x^2 + y^2 + 1 = 0$, może być jednoelementowy — np. równanie $x^2 + (y-3)^2 = 0$ jest spełnione tylko przez jedną parę liczb: $(0, 3)$, wreszcie może to być zbiór nieskończony. W tym ostatnim przypadku wykresem równania (34.2) może być pewna krzywa; np. wykresem równania $x^2 + 16x - y - 7 = 0$, które jest równoważne równaniu $y = x^2 + 16x - 7$, jest *parabola*, zaś wykresem równania $xy - 2 = 0$ jest *hiperbola* (por. rys. 22-4 na str. 75).

Wykresem równania $x^2 + y^2 = r^2$, ($r > 0$), jest *okrąg* o środku w początku układu i o promieniu r , ponieważ na podstawie twierdzenia Pitagorasa lewa strona tego równania przedstawia kwadrat odległości punktu $M(x, y)$ od początku układu — rys. 34-1.



Rys. 34-1

Badaniem linii będących wykresami równania (34.2), zajmuje się *geometria analityczna*.

Zajmiemy się teraz układami dwóch równań z dwiema niewiadomymi w przypadku, gdy każde z nich jest pierwszego lub drugiego stopnia. Każdą parę liczb, która jest jednocześnie rozwiązaniem obu równań układu, nazywamy *rozwiązaniem* tego układu. Rozwiązać układ równań — znaczy to znaleźć wszystkie rozwiązania tego układu albo wykazać, że zbiór rozwiązań jest pusty. Układ równań może nie mieć rozwiązań (układ *sprzeczny*), może mieć skończenie wiele — albo nieskończenie wiele rozwiązań.

Rozwiązując układ równań stosujemy zazwyczaj metodę *analizy starożytnych*. Staramy się przy tym tak wnioskować, żeby otrzymać jedno równanie z jedną niewiadomą. W ten sposób dokonujemy *eliminacji* jednej niewiadomej i sprowadzamy rozwiązanie układu równań do rozwiązywania jednego tylko równania. Jeżeli w wyniku eliminacji otrzymamy równanie, które nie ma rozwiązań, to układ równań także nie ma rozwiązań. Inne szczegóły dotyczące układów równań podamy w przykładach.

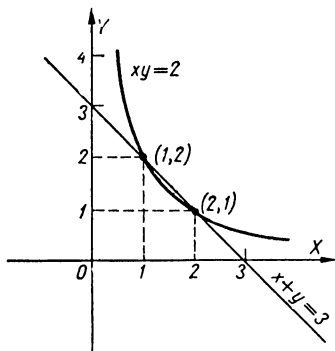
Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad (34.3)$$

Rozwiązanie. Z drugiego równania wyznaczamy $y = 3 - x$ i podstawiamy do pierwszego; stąd dostajemy $x^2 - 3x + 2 = 0$, więc $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Następnie obliczamy $y_1 = 3 - x_1 = 2$ i $y_2 = 3 - x_2 = 1$. Otrzymaliśmy dwie pary liczb: (1, 2) i (2, 1). Łatwo sprawdzić, że każda z tych par spełnia układ (34.3).

Odp. (1, 2), (2, 1).

Rys. 34-2 ilustruje ten przykład: prosta i hiperbola mają dokładnie dwa punkty wspólne.



Rys. 34-2

Uwaga. Układ (34.3) ma tę właściwość, że nie zmienia się gdy x zastąpimy przez y i jednocześnie y zastąpimy przez x . Taki układ równań nazywamy *układem symetrycznym*. Jeżeli para liczb (a, b) spełnia układ symetryczny, to para (b, a) także spełnia ten układ. W przypadku układu (34.3) dany jest iloczyn i suma niewiadomych x, y , więc rozwiązaniem układu jest para pierwiastków pomocniczego równania kwadratowego, $x^2 - 3x + 2 = 0$, które można ułożyć na podstawie wzorów Viète'a.

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + 2y + 6 = 0 \end{cases} \quad (34.4)$$

Rozwiązanie z drugiego równania wyznaczamy $x = -2y - 6$ i podstawiamy do pierwszego równania. Dostajemy $5y^2 + 24y + 32 = 0$. Wyróżnik $\Delta = 576 - 640 = -64 < 0$, więc otrzymane równanie nie ma pierwiastków, a zatem układ (34.4) jest sprzeczny.

Odp. Układ sprzeczny.

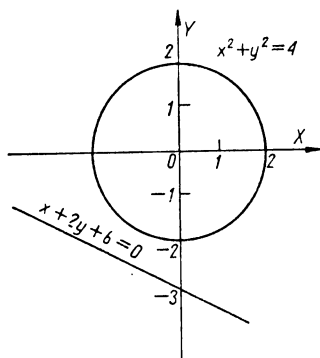
Rys. 34-3 ilustruje ten przykład: prosta i okrąg nie mają wspólnego punktu

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 10 \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad (34.5)$$

Rozwiązanie. Z drugiego równania wyznaczamy jedną z niewiadomych, na przykład $x = \frac{1}{2y}$ i podstawiamy do pierwszego równania. Otrzymamy równanie dwukwadratowe, którego pierwiastkami są liczby

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = -\frac{1}{3}, \quad y_4 = \frac{1}{3}$$



Rys. 34-3

Następnie obliczamy dla każdej z tych czterech liczb odpowiadającą jej wartość x :

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{3}{2}, \quad x_4 = \frac{3}{2}$$

W ten sposób dostaliśmy cztery pary liczb

$$\left(-\frac{1}{2}, -1\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad (34.6)$$

Sprawdzenie każdej z tych par daje wynik pozytywny.

Odp. Cztery rozwiązania (34.6).

Przykład. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases} \quad (34.7)$$

Rozwiązanie. Ponieważ $x^2 + xy = x(x+y)$ oraz $y^2 + xy = y(x+y)$, więc $x(x+y) = 10$ i $y(x+y) = 15$, czyli $y = \frac{3}{2}x$. Założyliśmy przy tym, że $x+y \neq 0$ co nie stanowi w rozpatrywanym przypadku żadnego ograniczenia, ponieważ dla $x+y = 0$, układ (34.7) nie jest spełniony. Podstawiając $\frac{3}{2}x$ na miejsce y do pierwszego z równań (34.7), dostajemy $\frac{5}{2}x^2 = 10$, czyli $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Stąd $y_1 = \frac{3}{2}x_1 = -3$, $y_2 = \frac{3}{2}x_2 = 3$. W ten sposób otrzymaliśmy dwie pary liczb $(-2, -3)$ i $(2, 3)$. Sprawdzenie tych rozwiązań pozostawiamy Czytelnikowi.

Odp. $(2, 3)$, $(-2, -3)$.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3} \\ x^2 + 4ky + (k+1) = 0 \end{cases} \quad (34.8)$$

gdzie k jest to dana liczba. Dla jakich wartości k układ ma rozwiązanie?

Rozwiązanie. Pierwsze z równań przekształcamy do postaci $x^2 = 4y^2$ i podstawiamy do drugiego równania $4y^2$ zamiast x^2 . Stąd

$$4y^2 + 4ky + (k+1) = 0 \quad (34.9)$$

Obliczamy wyróżnik tego równania

$$\Delta = 16k^2 - 16(k+1) = 16(k^2 - k - 1) = 16\left(k - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(k - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na istnienie pierwiastków równania (34.9) jest $\Delta \geq 0$, więc równanie ma pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy

$$k \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad k \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (34.10)$$

Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie (34.9) ma dwa pierwiastki

$$y_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - k - 1}}{2}, \quad y_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - k - 1}}{2}$$

Ponieważ $x^2 = 4y^2$ czyli $x = -2y$ lub $x = 2y$, więc każdemu z tych pierwiastków odpowiadają dwie wartości x

$$x_1 = -2y_1, \quad x_2 = 2y_1, \quad x_3 = -2y_2, \quad x_4 = 2y_2$$

Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie (34.9) ma jeden pierwiastek (podwójny) $y = -\frac{k}{2}$, któremu odpowiadają dwie wartości x , a mianowicie $-k$ oraz k .

W ten sposób znaleźliśmy cztery pary liczb

$$(-2y_1, y_1), \quad (2y_1, y_1), \quad (-2y_2, y_2), \quad (2y_2, y_2) \quad (34.11)$$

w przypadku gdy $\Delta > 0$, oraz dwie pary liczb

$$\left(-k, -\frac{k}{2}\right), \quad \left(k, -\frac{k}{2}\right) \quad (34.12)$$

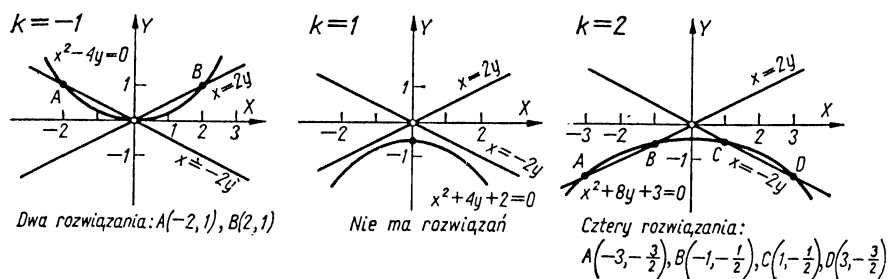
w przypadku gdy $\Delta = 0$.

Sprawdzenie. Przypadek $\Delta > 0$. Każda para liczb (34.11) spełnia drugie z równań (34.8), ponieważ zarówno y_1 jak i y_2 są pierwiastkami równania (34.9). Każda para liczb (34.11) spełnia ponadto pierwsze z równań (34.8) pod warunkiem, że $y_1 \neq 0$ albo odpowiednio $y_2 \neq 0$. Równość $y_1 = 0$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $k = -1$. Równość $y_2 = 0$ nie może być spełniona. Przypadek $\Delta = 0$, czyli $k^2 - k - 1 = 0$. Każda para liczb (34.12) spełnia drugie z równań (34.8), ponie-

waż liczba $-\frac{k}{2}$ jest pierwiastkiem równania (34.9). Ponadto każda liczba (34.12) spełnia pierwsze z równań (34.8) pod warunkiem, że $k \neq 0$. Warunek ten jest w tym przypadku spełniony, gdyż $k^2 - k - 1 = 0$.

Odp. Jeżeli $k^2 - k - 1 > 0$ i $k \neq -1$, to układ ma cztery różne rozwiązania (34.11); jeżeli $k = -1$, to układ ma dwa rozwiązania $(-2, 1)$ i $(2, 1)$; jeżeli $k^2 - k - 1 = 0$, to układ ma dwa rozwiązania (34.12); układ nie ma rozwiązań, gdy $k^2 - k - 1 < 0$.

Rys. 34-4 ilustruje układ (34.8) w trzech przypadkach: gdy $k = -1$ (dwa rozwiązania), $k = 1$ (nie ma rozwiązań), oraz dla $k = 2$ (cztery rozwiązania). Zauważmy przy tym, że pierwsze z równań (34.8) nie jest określone, gdy $x - y = 0$ lub $x + y = 0$ natomiast jest równoważne równaniu $x^2 = 4y^2$, czyli alternatywnie równań: $x = -2y$ lub $x = 2y$, gdy $x - y \neq 0$ i $x + y \neq 0$.



Rys. 34-4

Uwaga. Wiemy, że rozwiązanie układu dwóch równań o dwóch niewiadomych jest to para liczb (x, y) , z których pierwsza jest odcięta, druga zaś jest rzędną punktu należącego do wykresów obu tych równań. Rozwiązać układ równań, znaczy więc: znaleźć wszystkie punkty wspólne wykresów obu tych równań albo wykazać, że punktów takich nie ma. Ta uwaga może stanowić podstawę do przybliżonego rozwiązania układu równań *metodą graficzną*. Metoda ta polega na wykreśleniu obu równań i odczytaniu z rysunku współrzędnych ich wspólnych punktów. Metodę graficzną stosuje się zazwyczaj wtedy, gdy zawodzą metody rachunkowe.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \quad (34.13)$$

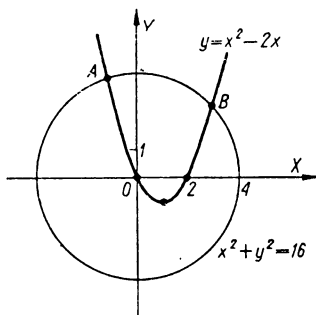
Rozwiązanie. Podstawiając do pierwszego równania $x^2 - 2x$ zamiast y , dostajemy równanie $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 16 = 0$, którego nie potrafimy rozwiązać. Zastosujemy metodę graficzną (rys. 34-5).

Odp. $A(-1, 1; 3, 8)$, $B(2, 8; 2, 8)$ — w przybliżeniu.

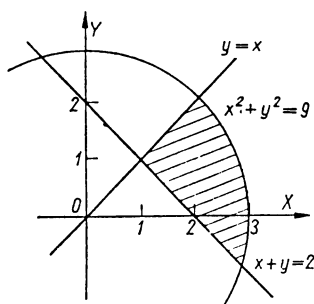
Metody graficzne służą także do rozwiązywania układów nierówności.

Przykład*. Rozwiązać graficznie układ nierówności

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y > 2 \\ y - x < 0 \end{cases} \quad (34.14)$$



Rys. 34-5



Rys. 34-6

Rozwiązanie przedstawione jest na rys. 34-6.

Odp. Figura zakreskowana na rys. 34-6, bez brzegu.

Pytania i zadania

1. Co to jest równanie drugiego stopnia z dwiema zmiennymi?

2. Wykreślić równanie

a) $2x^2 + 2y^2 = 5$, b) $xy - 4 = 0$, c) $x^2 + y + 6 = 0$, d)* $x + y^2 + 6 = 0$.

3. Rozwiązać układ równań

a) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0, \\ x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + x + y = 0 \\ y - 2x + 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2xy - 3y - 3 = 0 \\ y^2 - 4xy + 15 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 26 = 0 \\ xy - 5 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ y^2 - 4xy + 4x^2 - 1 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \\ 2x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

4*. Dla jakiej wartości parametru m układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ mx - y + 4 - 3m = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

5*. Rozwiązać układ równań

$$a) \begin{cases} (x-y)^2 - 4y^2 + x + 2y + 2 = 0 \\ 3x + 5y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (x+y)^2 - x + 5y + 29 = x^2 + y^2 \\ 3xy + 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

6*. Rozwiązać graficznie i rachunkowo układ równań

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y - 12x^2 + 10 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Porównać otrzymane wyniki.

Odpowiedzi do rozdziału V

29.

$$6. a) y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, \quad b) y = 3(x+2)^2 + 8, \quad c) y = -4(x-2)^2 - 4,$$

$$d) y = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}, \quad e) y = -8(x-1)^2 + 8, \quad f) y = (x+6)^2 - 35. \quad 9. a) \text{ tak,}$$

np. $y = x^2 + 1$, b) nie; trójkąt (29.1) przecina OY w punkcie (0, c). 10*. Wykres znajduje się w III i IV ćwiartce, $c < 0$. 11. $\Delta \geq 0$. 12. $\Delta < 0$. 15. a) $y = (x-17)(x+11)$, b) $y = 6(x-9)(x-23)$, c) $y = -2(x-0,01)(x+1)$. 17*. $y = x^2 - 6x + 10$. 18*. $y = 4x^2 - 4x + 1$ lub $y = x^2 + 2x + 1$.

30.

2*. Walec, którego przekrojem osiowym jest kwadrat. 3*. $100 = 50 + 50$. 4*. $x = \frac{1}{n}(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$ – średnia arytmetyczna. 5*. Moment bezwładności jest najmniejszy i wynosi $B_{\min} = \frac{m \cdot M}{m + M} \cdot l^2$, dla osi odległej o $x = \frac{ml}{m + M}$ od masy M .

6*. Bok kwadracika powinien wynosić $\frac{a}{6}$; objętość jest wówczas $\frac{2a^3}{27}$.

31.

5. a) $0, -\frac{7}{12}$, b) $-7, 7$, c), d) nie ma pierwiastków, e) -1 , pierwiastek podwójny, f) $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, g) $-5, -2$, h) $45, 90$, i) $\frac{3}{2}, \frac{7}{3}$, j) nie ma pierwiastków.

6. a) $0, \frac{3}{2}$, b) $-3, 3$, c) $-2, -\frac{2}{9}$, d) $-8, 12$, e) $-1, 1$, f) $-10, +10$, g) $-5, +5$.

7. $-2a, 2a$ dla $a \neq 0$; sprzeczne dla $a = 0$, b) $0, \frac{3a}{2}$ dla $a \neq 0$; sprzeczne dla $a = 0$.

c) $-\frac{b}{6}, \frac{b}{2}$ dla $b \neq 0$; sprzeczne dla $b = 0$, d) $a(1 - \sqrt{2}), a(1 + \sqrt{2})$. 8*. a) -2 ,

$-\frac{17}{2}$, b) 4. 9*. a) $a+1, b+1$ gdy $a^2 \neq 1$ i $b \neq 1$; $a+1$ gdy $a^2 \neq 1$ i $b = 1$; $b+1$ gdy $a = 1$ i $b \neq 1$; nie ma pierwiastków w innych przypadkach, b) $-\frac{b}{3}, \frac{b}{3}$ gdy $b \neq 0$; sprzeczne gdy $b = 0$, c) a, b gdy $a+b \neq 0$; dowolne $x \neq 0$ (tożsamość) gdy $a+b = 0, a \neq 0$; d) $3a, -2a$ gdy $a \neq 0$; sprzeczne gdy $a = 0$. 10. a) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$, b) $x^2 - 2 = 0$, c) $x^2 - x - 72 = 0$, d) $x^2 - \frac{a^2+1}{a}x + 1 = 0$. 11. $k = \frac{2}{5}$ albo $k = 1$. 12*. 3, 5. 13*. 15 i 3 albo -15 i -3 . 15*. $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{10}{9} = 0$ albo $x^2 - 3x + 2 = 0$. 16*. $p^2 - 2q$. 17*. $a^3x^2 + b(b^2 - 3ac)x + c^3 = 0$. 18*. $a = 1$. 19. a) $-4, 4, -5, 5$, b) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{6}, \sqrt{6}$, c) e) nie ma pierwiastków, d) $-6, 6$, f) $-1, 1$ (podwójne). 21. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

32.

1. 30 cm, 50 cm. 2. 8. 3*. 9, 11, 13. 4. 36 km/h, 27 km/h. 5. $\frac{2}{5}$. 6*. Około 72 m. 7. 6 kG i 8 kG. 8*. 11 dni i 14 dni. 9. a) 3, b) 64, c) 4. 10*. a) nie ma pierwiastków, b) 2, c) $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$, d) $-1, -2$. 11*. a) $-a, a$, b) b gdy $a \geq b, a$ gdy $a < b$, c) $\frac{4}{3}|a|$ gdy $a \neq 0$; dowolna liczba $x < 0$ gdy $a = 0$. 12*. $x = 3,6225, y = 3,1225$.

33.

2. a) $(-3; 1)$, b), d) sprzeczna, c) tożsamościowa, e) $(-4; 0)$, f) $x < -3$ lub $x > 3$. 3. a) $x < -1$ lub $x > 1$, b) $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$, c) $x \leq -\frac{1}{3}$ lub $x \geq \frac{1}{3}$, d) $0 < x < \frac{1}{3}$. 4*. a) $m < -3$ lub $m > 1$, b) $m = -3$ lub $m = 1$, c) $-3 < m < 1$, d) $-\frac{7}{2} < m < -3$. 5*. $m = 0$ 6*. $-5 < m < 11$. 7*. $1 < a < \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ lub $-1 < a < \frac{1-\sqrt{17}}{4}$. 8*. $-2 < a < 2$ lub $2 < a < 4$. 9*. $\frac{2}{3} < x < 1$ lub $2 < x < 3$. 10*. $-1 < a < .$

34.

3. a) układ sprzeczny, b) $(0, -1), (\frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$, c) $(2, 3)$, d) $(-1, -5), (1, 5), (-5, -1), (5, 1)$, e) $(x, 2x+1)$, x - dowolne, f) $(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$. 4*. $m = -0,75$. 5*. a) $(-\frac{19}{28}, -\frac{11}{28})$, $(2, -2)$, b) $(8, -1), (2, -3)$.

Rozdział VI

WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE

35. Wielomian jednej zmiennej

Potęga o wykładniku 0. Określamy:

$$a^0 = 1 \quad (35.1)$$

dla każdego $a \neq 0$. Na przykład

$$1^0 = 1, \quad 3^0 = 1, \quad (\sqrt[3]{5})^0 = 1, \quad (-4)^0 = 1, \quad \pi^0 = 1$$

Symbolu 0^0 nie określamy.

Dla potęgi o całkowitym i nieujemnym wykładniku prawdziwe są wzory (16.11) – (16.15). W szczególności, prawdziwy jest z uwagi na definicję (35.1) wzór $a^m : a^n = a^{m-n}$, gdy $a \neq 0$ i $m = n$.

Jednomian stopnia n jednej zmiennej $x \in \mathbf{R}$, jest to funkcja

$$y = ax^n \quad (35.2)$$

przy czym $n \geq 0$ oznacza liczbę całkowitą, zaś $a \neq 0$. Dla $n = 0$ jednomian (35.2) jest postaci ax^0 , więc dla każdego $x \neq 0$ ma wartość a , natomiast dla $x = 0$ nie jest określony. Dziedzinę funkcji $y = ax^0$ rozszerzamy, nadając jej w punkcie $x = 0$ wartość $y = a$. W ten sposób jednomian ax^0 jest określony dla $x \in \mathbf{R}$ i ma stałą wartość a .

Liczbę a nazywamy *współczynnikiem* jednomianu (35.2).

Funkcję stałą $y = 0$ nazywamy *jednomianem zerowym*; ten jednomian nie ma określonego stopnia;

Dwa jednomiany tej samej zmiennej nazywamy *podobnymi*, jeżeli są tego samego stopnia; jednomian zerowy uważamy za podobny do każdego jednomianu.

Na przykład jednomiany $-5x^2$ i $2x^2$ są podobne.

Jednomiany podobne można *redukować* zastępując ich sumę jednym jednomianem, np. $4x^3 + 7x^3 = 11x^3$, $x^2 + (-3)x^2 = -2x^2$.

Suma jednomianów podobnych jest jednomianem do nich podobnym (być może - jednomianem zerowym).

Wielomian stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej x jest to funkcja

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (35.3)$$

przy czym $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbf{R}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, oraz $a_n \neq 0$.

Liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazywamy *współczynnikami* wielomianu (35.3). Liczbę a_0 nazywamy też *wyrazem wolnym*.

Przykład. Wyznaczyć współczynniki a, b i c wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, jeżeli wiadomo, że

$$W(-1) = 1, \quad W(2) = 13, \quad W\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{43}{8}$$

Rozwiązanie. Na podstawie treści przykładu mamy

$$(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = 1$$

$$2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 13$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} + c = -\frac{43}{8}$$

więc

$$\left. \begin{aligned} a - b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ a + 2b + 4c &= -22 \end{aligned} \right\}$$

Otrzymany układ trzech równań rozwiązujemy w znany sposób.

Odp. $a = 4, b = -3, c = -5$.

Funkcję $y = 0$ nazywamy *wielomianem zerowym*; ten wielomian nie ma określonego stopnia.

Liczbę n nazywamy *stopniem* wielomianu (35.2).

Na przykład funkcja stała $y = 3$ jest wielomianem stopnia zero, funkcja liniowa $y = -2x + 3$ jest wielomianem stopnia pierwszego, trójmian kwadratowy $y = x^2 + x + 1$ jest wielomianem stopnia drugiego, itp.

Wielomian jest sumą jednomianów.

Jednomiany $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x + a_0$ nazywamy *wyrazami* wielomianu (35.3).

Wielomiany oznaczamy krótko $W(x), A(x), B(x)$ itd.

Stopień wielomianu $W(x)$ oznaczamy symbolem *st.* $W(x)$. Na przykład jeżeli $W(x) = -4x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, to *st.* $W(x) = 5$.

Jeżeli $W(x)$ jest wielomianem zerowym, to piszemy $W(x) \equiv 0$.

Wielomian (35.3) jest *zredukowany* (tzn. po prawej stronie równości nie ma dwóch jednomianów tego samego stopnia) oraz jest *uporządkowany* według malejących stopni wyrazów. W dalszym ciągu mówiąc krótko *wielomian*, będziemy mieć na myśli *wielomian zredukowany i uporządkowany*.

Definicja. *Pierwiastek wielomianu* $W(x)$ jest to każda liczba a taka, że $W(a) = 0$.

Na przykład liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 3x - 2$, ponieważ $2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$. Zamiast *pierwiastek* wielomianu mówimy też *punkt zerowy* (miejsce zerowe) wielomianu.

Przykład. Dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x) = 4mx^4 + 3m^2 x^3 - x + 2$ ma pierwiastek równy 1?

Rozwiązanie. Ponieważ

$$W(1) = 0 \Leftrightarrow 4m + 3m^2 + 1 = 0$$

więc rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe dostajemy odpowiedź na postawione pytanie.

$$\text{Odp. } m = -1 \text{ lub } m = -\frac{1}{3}.$$

Równość wielomianów. Wielomiany $A(x)$ i $B(x)$ są równe, jeżeli dla każdej liczby a mamy $A(a) = B(a)$; piszemy wówczas $A(x) = B(x)$. Dwa wielomiany zredukowane i równe różnią się co najwyżej porządkiem wyrazów. Na przykład

$$2x^3 - x^2 + 3x - 4 = -4 + 3x - x^2 + 2x^3$$

Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są zerowe lub, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej.

Na przykład

$$x^3 - px^2 + qx - r = x^3 + x^2 + 53$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $p = -1$, $q = 0$ i $r = -53$.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów. Do wielomianu $A(x)$ można *dodać* wielomian $B(x)$, tzn. można utworzyć *sumę* $A(x) + B(x)$. Jeżeli wielomiany $A(x)$, $B(x)$ i $A(x) + B(x)$ nie są zerowe, to stopień sumy jest nie większy od stopni składników:

$$\text{st. } (A(x) + B(x)) \leq \text{st. } A(x) \quad \text{ i } \quad \text{st. } (A(x) + B(x)) \leq \text{st. } B(x)$$

Od wielomianu $A(x)$ można *odjąć* wielomian $B(x)$, tzn. można utworzyć *różnicę* $A(x) - B(x)$. Jeżeli wielomiany $A(x)$, $B(x)$ oraz $A(x) - B(x)$ nie są zerowe, to

$$\text{st. } (A(x) - B(x)) \leq \text{st. } A(x) \quad \text{ i } \quad \text{st. } (A(x) - B(x)) \leq \text{st. } B(x)$$

Przykłady

$$A(x) = x^3 + x, \quad B(x) = x - x^3, \quad A(x) + B(x) = 2x, \quad A(x) - B(x) = 2x^3$$

$$\text{st. } A(x) = 3, \quad \text{st. } B(x) = 3, \quad \text{st. } (A(x) + B(x)) = 1, \quad \text{st. } (A(x) - B(x)) = 3$$

$A(x) - A(x) \equiv 0$; ta różnica nie ma określonego stopnia.

Mnożenie wielomianów. Wielomian $A(x)$ można *pomnożyć* przez wielomian $B(x)$, tzn. można utworzyć *iloczyn* $A(x) \cdot B(x)$. Jeżeli $A(x) \neq 0$ i $B(x) \neq 0$, to stopień iloczynu równa się sumie stopni składników:

$$\text{st. } (A(x) \cdot B(x)) = \text{st. } A(x) + \text{st. } B(x)$$

Przy dodawaniu, odejmowaniu lub mnożeniu wielomianów należy redukować jednomiany podobne, a następnie otrzymany wielomian uporządkować według malejących stopni jego wyrazów.

Iloczyn czynników liniowych. Ważnym przypadkiem mnożenia wielomianów jest mnożenie n dwumianów pierwszego stopnia

$$x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_n$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n$ są to liczby dane, zaś x jest zmienną. Iloczyn

$$W(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

jest wielomianem stopnia n . Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$, są pierwiastkami tego wielomianu, ponieważ

$$W(x_1) = W(x_2) = \dots = W(x_n) = 0$$

Przykład. Znaleźć wielomian czwartego stopnia, którego pierwiastkami są liczby 1, 2, 3, 4 i który dla $x = 0$ ma wartość 24.

Rozwiązanie. Wielomian

$$W(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

gdzie a jest dowolną liczbą różną od zera, jest wielomianem czwartego stopnia o pierwiastkach 1, 2, 3 i 4. Liczbę a dobierzemy na podstawie warunku $W(0) = 24$:

$$24 = a(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$$

stąd $24 = a \cdot 24$, więc $a = 1$.

Odp. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, czyli $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$.

Dzielenie wielomianów. Niech $W(x)$ i $P(x)$ będą danymi wielomianami. Jeżeli istnieje dokładnie jeden taki wielomian $Q(x)$, że spełniona jest równość

$$W(x) = Q(x) \cdot P(x) \quad (35.4)$$

to wielomian $Q(x)$ nazywamy *ilorazem* wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$. Piszemy przy tym

$$W(x) : P(x) = Q(x) \quad \text{lub} \quad \frac{W(x)}{P(x)} = Q(x)$$

Na przykład

$$(x^2 - 1) : (x - 1) = x + 1, \quad \text{ponieważ} \quad x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Wielomian $P(x)$ spełniający warunek (35.4) nazywamy *podzielnikiem* wielomianu $W(x)$. Ponieważ żądamy, żeby iloraz $Q(x)$ był określony jednoznacznie, więc podzielnik nie może być wielomianem zerowym.

Uwaga. Zamiast *podzielnik*, mówimy także *dzielnik*.

Jeżeli $W(x) \equiv 0$, to każdy wielomian $P(x) \neq 0$ jest podzielnikiem wielomianu $W(x)$, przy czym iloraz $Q(x) \equiv 0$.

Jeżeli $W(x) \neq 0$, to warunkiem koniecznym (lecz nie wystarczającym) podzielności $W(x)$ przez $P(x)$ jest nierówność

$$\text{st. } P(x) \leq \text{st. } W(x)$$

gdyż w przypadku przeciwnym nie istnieje wielomian $Q(x)$ spełniający warunek (35.4).

Dzielenie wielomianów nie zawsze jest więc wykonalne.

Pierścień wielomianów.** Rozważmy zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x . W zbiorze tym określone są dwa działania: *dodawanie* (+) i *mnożenie* ($\cdot$), które są *przemienne*

$$A(x) + B(x) = B(x) + A(x), \quad A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$$

oraz *łączne*

$$(A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x))$$

$$(A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x) = A(x) \cdot (B(x) \cdot C(x)).$$

przy czym *mnożenie jest rozdzielne względem dodawania*

$$(A(x) + B(x)) \cdot C(x) = A(x) \cdot C(x) + B(x) \cdot C(x)$$

W zbiorze wielomianów określone jest ponadto działanie odwrotne do dodawania — *odejmowanie* ($-$). Jeżeli spełnione są wszystkie wymienione warunki, to rozpatrywany zbiór nazywamy *pierścieniem*. Zbiór wielomianów $W(x)$ jest więc pierścieniem *funkcyjnym*, podobnie jak zbiór $\mathbf{C}$ liczb całkowitych jest pierścieniem *liczbowym* (por. str. 68)**

Sposób dzielenia wielomianów przypomnimy na przykładach.

Przykład. Podzielić wielomian $2x^3 - x^2 + 2x - 3$ przez dwumian $x - 1$.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 + 2x - 3) : (x - 1) = 2x^2 + x + 3 \\ \underline{2x^3 - 2x^2} \\ x^2 + 2x \\ \underline{x^2 - x} \\ 3x - 3 \\ \underline{3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

Odp. $2x^2 + x + 3$.

Objaśnienie przykładu. Najwyższy stopniem wyraz dzielnej, a więc $2x^3$ dzielimy przez najwyższy stopniem wyraz dzielnika, to znaczy przez x , $2x^3 : x = 2x^2$. Otrzymany jednomian $2x^2$ jest pierwszym składnikiem szukanego ilorazu. Mnożymy następnie $2x^2$ przez dzielnik $(x - 1)$, a więc $2x^2 \cdot (x - 1)$. Otrzymany iloczyn $2x^3 - 2x^2$ zapisujemy pod dzielną i odejmujemy od niej. Otrzymamy $x^2 + 2x - 3$; wielomian ten nazywamy *pierwszą resztą*. Najwyższy stopniem wyraz pierwszej reszty, czyli x^2 , dzielimy przez najwyższy stopniem wyraz dzielnika, a więc przez x , $x^2 : x = x$. Otrzymany iloraz x jest drugim składnikiem szukanego w przykładzie ilorazu. Mnożymy następnie ten drugi składnik przez dzielnik, $x \cdot (x - 1)$. Otrzymany iloczyn $x^2 - x$ zapisujemy pod pierwszą resztą i odejmujemy od niej. Otrzymamy $3x - 3$, tak zwaną *drugą resztę*. Najwyższy stopniem wyraz drugiej reszty, a więc $3x$, dzielimy przez najwyższy stopniem wyraz dzielnika, $3x : x = 3$. Liczba 3 jest trzecim składnikiem szukanego ilorazu. Mnożymy następnie ten trzeci składnik przez dzielnik,

$3 \cdot (x-1) = 3x-3$ i odejmujemy od drugiej reszty. Ponieważ trzecia reszta jest 0, więc dzielenie zostało zakończone.

Uzasadnimy, że otrzymany wielomian $2x^2 + x + 3$ jest istotnie szukany ilorazem. Od dzielnej $2x^3 - x^2 + 2x - 3$ odjęliśmy kolejno: $2x^2(x-1)$, a następnie $x(x-1)$, wreszcie $3(x-1)$ i otrzymaliśmy 0, więc

$$2x^3 - x^2 + 2x - 3 - 2x^2(x-1) - x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

zatem

$$2x^3 - x^2 + 2x - 3 - (x-1)(2x^2 + x + 3) = 0$$

czyli

$$2x^3 - x^2 + 2x - 3 = (x-1)(2x^2 + x + 3), \text{ cnd.}$$

Przykład. Wykonać dzielenie

$$(3x^5 - x^4 + x^3 + 7x^2 - 6x + 8) : (x^3 - x + 2)$$

Rozwiązanie

$$(3x^5 - x^4 + x^3 + 7x^2 - 6x + 8) : (x^3 - x + 2) = 3x^2 - x + 4$$

$$\begin{array}{r} 3x^5 \quad -3x^3 + 6x^2 \\ \hline -x^4 + 4x^3 + \quad x^2 - 6x \\ \hline -x^4 \quad \quad + \quad x^2 - 2x \\ \hline \quad 4x^3 \quad -4x + 8 \\ \quad 4x^3 \quad -4x + 8 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Odp. $3x^2 - x + 4$.

Przykład. Wykonać dzielenie

Rozwiązanie

$$(x^3 + 2x + 1) : (x^2 + 1) = x + \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\frac{x^3 + x}{x+1} \quad \text{pierwsza reszta}$$

Ponieważ pierwsza reszta jest wielomianem niższego stopnia niż dzielnik, więc $x^2 + 1$ nie jest podzielnikiem wielomianu $x^3 + 2x + 1$. Do otrzymanego jednomianu x (tzw. *iloraz niezupełny*) należy więc dodać ułamek $\frac{x+1}{x^2+1}$

Odp. $x + \frac{x+1}{x^2+1}$.

Twierdzenie (o rozkładzie wielomianu). Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami oraz $P(x) \neq 0$, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że

$$W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x) \quad (35.5)$$

przy czym $R(x) \equiv 0$ albo $\text{st. } R(x) < \text{st. } P(x)$.

Dowód tego twierdzenia pomijamy; będzie ono w pełni zrozumiałe, gdy odwołamy się do przykładów.

$$W(x) \dots\dots\dots P(x) \dots\dots\dots \text{dane}$$

$$Q(x) \dots\dots\dots R(x) \dots\dots \text{dobrane}$$

$$\begin{aligned} x^3 + x + 1 &= (x^2 + x + 2) \cdot (x - 1) + 3 \\ x^3 + 1 &= (x^2 - x + 1) \cdot (x + 1) + 0 \\ x - 1 &= 0 \cdot (x^2 - 1) + x - 1 \\ x^2 + 1 &= 1 \cdot (x^2 - 1) + 2 \\ 0 &= 0 \cdot (2x + 5) + 0 \end{aligned}$$

Wielomian $R(x)$ nazywamy *resztą* dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$, natomiast $Q(x)$ — *ilorazem* (zupelnym, gdy $R(x) \equiv 0$, *niezupelnym* w przypadku przeciwnym). Z określenia podzielnika $P(x)$ wielomianu $W(x)$ wynika, że

$$P(x) \text{ jest podzielnikiem } W(x) \Leftrightarrow R(x) \equiv 0 \quad (35.6)$$

Przykład. Zbadać, dla jakiej wartości a wielomian $A(x) = x^2 + x - 1$ jest podzielnikiem wielomianu $B(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + ax + 1$ i obliczyć w tym przypadku iloraz.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{r} (x^4 + 4x^3 + x^2 + ax + 1) : (x^2 + x - 1) = x^2 + 3x - 1 \\ \underline{x^4 + x^3 - x^2} \\ 3x^3 + 2x^2 + ax \\ \underline{3x^3 + 3x^2 - 3x} \\ -x^2 + (a+3)x + 1 \\ \underline{-x^2 - x + 1} \\ (a+4)x \text{ reszta} \end{array}$$

Aby wielomian $A(x)$ był podzielnikiem wielomianu $B(x)$ potrzeba i wystarcza, aby otrzymana reszta $R(x) = (a+4)x$ była równa 0; stąd $a+4 = 0$, czyli $a = -4$.

Odp. $a = -4$; iloraz $x^2 + 3x - 1$.

Twierdzenie Bézouta. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Dowód. Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$, to istnieje taki wielomian $Q(x)$, że

$$W(x) = Q(x) \cdot (x - a)$$

Stąd $W(a) = Q(a) \cdot (a - a) = Q(a) \cdot 0 = 0$, więc liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Na odwrót, jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to $W(a) = 0$, przy czym na podstawie twierdzenia o rozkładzie wielomianu istnieje taki wielomian $Q(x)$ i taka stała R , że

$$W(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R \quad (35.7)$$

(por. równość (35.5)). Stąd $0 = W(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R$, czyli $R = 0$.

Z uwagi na (35.7) mamy więc $W(x) = Q(x) \cdot (x-a)$; równość ta oznacza, że dwumian $x-a$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$, cnd.

Podzielność wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$ jest więc warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby liczba a była pierwiastkiem $W(x)$.

Przykład. Zbadać, czy wielomian $W(x) = 29x^5 - 16x^3 + 3x^2 - 16$ jest podzielny przez dwumian $x-1$.

Rozwiązanie. Podstawiamy do danego wielomianu $x=1$. Okazuje się, że $W(1) = 29 - 16 + 3 - 16 = 0$. Wobec twierdzenia Bézouta dwumian $x-1$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Odp. Tak.

Twierdzenie (o iloczynie dzielników). *Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów*

$$x-x_1, \quad x-x_2, \quad \dots, \quad x-x_n$$

przy czym liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są różne, to jest także podzielny przez iloczyn

$$(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$$

Dowód pomijamy.

Przykład. Wielomian $W(x) = x^4 - 12x^2 - 13x - 12$ jest podzielny przez $x-4$ i przez $x+3$, ponieważ $W(4) = 0$ i $W(-3) = 0$. Wynika stąd, że ten wielomian jest podzielny przez iloczyn $(x-4)(x+3)$; czyli przez trójmian kwadratowy $x^2 - x - 12$. Sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi.

Pytania i zadania

1. Podać określenie potęgi o wykładniku 0.
2. Podać określenie jednomianu stopnia n .
3. Co to jest jednomian zerowy?
4. Co to są jednomiany podobne? Podać przykłady.
5. Podać określenie wielomianu stopnia n .
6. Wyjaśnić znaczenie terminów a) współczynnik wielomianu, b) wielomian zerowy, c) wyraz wielomianu.
7. Co to jest pierwiastek wielomianu?
8. Podać określenie równości wielomianów.
9. Podać, warunek konieczny i wystarczający równości dwóch wielomianów.
10. Wyjaśnić jak się dodaje i jak się odejmuje wielomiany.
11. Podać przykład dwóch wielomianów stopnia czwartego, których suma a) jest wielomianem drugiego stopnia, b) nie ma określonego stopnia.
12. Wyjaśnić, jak się mnoży wielomiany.
13. Podać i objaśnić nierówności między stopniami wielomianów $A(x)$ i $B(x)$, oraz stopniem ich sumy, różnicy i iloczynu.
14. Co to znaczy, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$?

15. Wyjaśnić, dlaczego wielomian zerowy nie może być dzielnikiem.
16. Wypowiedzieć warunek konieczny na to, żeby wielomian $P(x)$ był dzielnikiem wielomianu $W(x)$.
17. Wypowiedzieć twierdzenie o rozkładzie wielomianu.
18. Co to jest iloraz (zupełny albo niezupełny) i co to jest reszta dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$?
19. Wypowiedzieć twierdzenie Bézouta.
20. Podać twierdzenie o iloczynie podzielników.
21. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3$. Obliczyć:
 - a) $W(0)$, b) $W(1)$, c) $W(2)$ d) $W(\sqrt{2})$, e) $W(-\sqrt{2})$.
22. Sprawdzić, że liczby 4 i 5 są pierwiastkami wielomianu $x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 9x + 20$.
23. Wykonać mnożenia wielomianów:
 - a) $(x-3)(2x^2+x+5)$, b) $(x^2-2x+3)(x^3-x^2+6x+1)$.
 - c) $(x^3-x+2)(3x^2-x+4)$, d) $(x^2-8)(x^2+8x+8)$.
24. Wykonać dzielenia wielomianów:
 - a) $(x^4-3x^3+3x^2-4x+3):(x-1)$,
 - b) $(x^4+3x^3-12x^2-13x-15):(x-3)$
 - c) $(x^3+6x^2+6x+5):(x+5)$,
 - d) $\left(-4x^3+2x^2-x-\frac{3}{2}\right):(2x+1)$,
 - e) $(x^3-6x^2+11x-6):(x^2-5x+6)$,
 - f) $(x^4+3x^3-12x^2-13x-15):(x^2+x+1)$.
- 25*. Dany jest wielomian $W(x) = ax^2 + bx + c$, przy czym $W(1) = m+2$, $W\left(\frac{1}{3}\right) = m$, $W\left(-\frac{1}{3}\right) = m-2$, gdzie m jest pewną liczbą. Dowieść, że $W(x)$ jest wielomianem stopnia pierwszego.
26. Dowieść, że wielomian $x^4 + x^2 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
- 27*. Dla jakich wartości liczbowych a , b i c wielomian $x^3 + 5x^2 + 6x + 2$ jest dzielnikiem wielomianu $x^4 + 8x^3 + ax^2 + bx + c$?
- 28*. Jaki warunek muszą spełniać liczby a , b i c , aby wielomian $x^3 + ax^2 + bx + c$ dzielił się przez wielomian $3x^2 + 2ax + b$?
- 29*. Udowodnić twierdzenie: jeżeli wielomian $A(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $B(x)$ i wielomian $B(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $C(x)$, to wielomian $A(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $C(x)$.
- 30*. Udowodnić twierdzenie: jeżeli wielomian $A(x)$ jest dzielnikiem każdego z wielomianów $B(x)$ i $C(x)$, to jest także dzielnikiem ich sumy, różnicy i iloczynu.
31. Wykazać, że wielomian $px^6 + qx^5 + rx^4 - rx^2 - qx - p$ jest podzielny przez $(x+1)$.

- 32*. Pewien wielomian daje przy dzieleniu przez $(x-1)$ resztę 2, natomiast przy dzieleniu przez $(x-2)$ — resztę 5. Jaką resztę otrzymamy przy dzieleniu tego wielomianu przez $(x-1)(x-2)$?
- 33**. Przy jakich wartościach a i b trójmian $ax^{20} + bx^{19} + 1$ dzieli się przez trójmian $x^2 + x + 1$?

36. Równania algebraiczne

Niech $W(x)$ oznacza wielomian stopnia $n \geq 1$ zmiennej x . Równanie

$$W(x) = 0$$

nazywamy *równaniem algebraicznym stopnia n* lub krótko — *równaniem n -tego stopnia*.

Na przykład równanie $2x^2 + 7 = 0$ jest drugiego stopnia, zaś równanie $x^3 - 6x + 5 = 0$ jest trzeciego stopnia.

Równania pierwszego i drugiego stopnia rozwiązywano już w starożytności. W wieku XVI wyprowadzono ogólne wzory na pierwiastki równań trzeciego i czwartego stopnia. Liczne usiłowania żeby wyprowadzić podobne wzory dla równań piątego i wyższych stopni zakończyły się niepowodzeniem. W wieku XIX udowodniono, że wzory takie w ogóle nie istnieją.

Obecnie podamy kilka informacji o równaniach algebraicznych i metodach ich rozwiązywania.

Twierdzenie (o liczbie pierwiastków). *Równanie algebraiczne n -tego stopnia ma co najwyżej n różnych pierwiastków.*

Dowód. Przypuśćmy, że wielomian n -tego stopnia $W(x)$ ma p różnych pierwiastków $x_1, x_2, \dots, x_p$. Na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian ten jest podzielny przez każdy z dwumianów

$$x - x_1, \quad x - x_2, \quad \dots, \quad x - x_p$$

Na podstawie twierdzenia o iloczynie podzielników (p. 35) wynika stąd, że wielomian $W(x)$ dzieli się przez iloczyn

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_p)$$

więc istnieje taki wielomian $Q(x)$, że

$$W(x) = Q(x) \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_p)$$

Z równości tej wynika, że $\text{st. } W(x) = \text{st. } Q(x) + p$. Ponieważ $\text{st. } W(x) = n$, zaś $\text{st. } Q(x) \geq 0$, więc $n - p \geq 0$, czyli $p \leq n$, cnd.

Przykłady

$x^2 - 1 = 0,$	$x_1 = -1, \quad x_2 = 1,$	$n = 2, \quad p = 2, \quad p = n$
$x^2 + 1 = 0,$	nie ma pierwiastków,	$n = 2, \quad p = 0, \quad p < n$
$x^2 - 2x + 1 = 0,$	$x_0 = 1,$	$n = 2, \quad p = 1, \quad p < n$

Twierdzenie (o postaci iloczynowej wielomianu). *Jeżeli wielomian n -tego stopnia $W(x)$ ma n różnych pierwiastków: $x_1, x_2, \dots, x_n$,*

to

$$W(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n) \quad (36.1)$$

gdzie a_n jest współczynnikiem przy x^n .

Dowód. Z założeń wynika, że iloczyn

$$(x-x_1)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n) \quad (36.2)$$

jest podzielnikiem wielomianu $W(x)$. Ponieważ iloczyn ten jest wielomianem stopnia n , więc iloraz $W(x)$ przez iloczyn (36.2) jest stopnia 0, czyli stałą

$$W(x) = c(x-x_1)(x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$$

Współczynnik przy x^n po lewej stronie tej równości wynosi a_n , zaś po prawej c . Stąd $a_n = c$, więc ostatecznie dostajemy równość (36.1), cnd.

W przypadku gdy $n = 2$, równość (36.1) przedstawia rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe.

Przykład. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad (36.3)$$

Rozłożyć ten wielomian na czynniki liniowe.

Rozwiązanie. Na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x-1$. Wykonujemy to dzielenie i dostajemy iloraz x^2-4 . Mamy więc $W(x) = (x^2-4) \cdot (x-1)$. Różnicę kwadratów x^2-4 rozkładamy na iloczyn $(x-2)(x+2)$.

Odp. $(x-1)(x-2)(x+2)$.

Uwaga. Rozkładanie wielomianu na czynniki jest przydatne do rozwiązywania równań algebraicznych. Na przykład znając rozkład

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x-2)(x+2)$$

łatwo jest zauważyć, że równanie $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ ma trzy pierwiastki: 1, 2 i -2.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$x^4 - 1 = 0$$

Rozwiązanie. $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$. Ponieważ $x^2 + 1 > 0$, więc

$$x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x=1) \vee (x=-1)$$

Odp. $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad (36.4)$$

Rozwiązanie (pierwszy sposób). Spostrzegamy, że liczba 1 spełnia dane równanie, a następnie dzielimy jego lewą stronę przez $x-1$. Dostajemy $x^4 + x^2 + 1$. Po-

nieważ $x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, więc liczba 1 jest jedynym pierwiastkiem równania (36.4).

Rozwiązanie (drugi sposób). Przekształcamy lewą stronę równania (36.4)

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = x^4(x-1) + x^2(x-1) + x - 1 = (x-1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Ponieważ $x^4 + x^2 + 1 > 0$, więc jedynym pierwiastkiem równania (36.4) jest 1.

Odp. $x = 1$.

Twierdzenie (o rozkładzie wielomianu na czynniki). *Każdy wielomian $W(x) \not\equiv 0$ jest iloczynem czynników stopnia co najwyżej drugiego.*

Dowód jest trudny i pominiemy go. Z tego twierdzenia wynika, że dla każdego wielomianu $W(x) \not\equiv 0$ istnieją takie wielomiany $A(x)$, $B(x)$, ..., $P(x)$, z których każdy jest co najwyżej stopnia drugiego i których iloczynem jest $W(x)$.

Uwaga. Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki zapewnia istnienie odpowiedniego rozkładu, lecz nie podaje metody znalezienia jego czynników. Tylko w niektórych przypadkach umiemy taki rozkład efektywnie napisać.

Przykłady

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= (x+1)(x^2 - x + 1) \\ x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2} \cdot x)^2 = \\ &= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\ x^6 - 1 &= (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x^2 - 1)[(x^2 + 1)^2 - x^2] = \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Z twierdzenia o rozkładzie wielomianu na czynniki wynika następujący ważny wniosek:

Wniosek. *Każde równanie algebraiczne nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek.*

Istotnie, przypuśćmy, że rozłożyliśmy wielomian stopnia nieparzystego na czynniki pierwszego lub drugiego stopnia. Ponieważ iloczyn czynników stopnia drugiego jest wielomianem parzystego stopnia, więc w rozkładzie znajduje się czynnik stopnia pierwszego. Pierwiastek tego czynnika jest pierwiastkiem całego wielomianu.

Zwracamy uwagę, że równanie algebraiczne stopnia parzystego może nie mieć pierwiastków w ogóle.

Definicja. Liczbę a nazywamy *pierwiastkiem r -krotnym* wielomianu $W(x)$, jeżeli ten wielomian jest podzielny przez $(x-a)^r$, natomiast nie jest podzielny przez $(x-a)^{r+1}$.

Jeżeli $r = 1$, to pierwiastek nazywamy *pojedynczym*, jeżeli $r = 2$ — to podwójnym, jeżeli $r = 3$ — to potrójnym, itd.

Liczbę r nazywamy *krotnością* pierwiastka a .

Na przykład liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 2x^2 + x$, ponieważ

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$$

Przykład. Znając pierwiastek $x_1 = 2$ równania

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$$

rozwiązać to równanie.

Rozwiązanie. Lewą stronę równania dzielimy przez $x-2$. Dostajemy iloraz $x^2 - 5x + 6$, którego pierwiastkami są liczby 2 i 3. Stąd $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, więc

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x-2)^2 \cdot (x-3)$$

Odp. $x_1 = 2$ (podwójny), $x_2 = 3$.

Jeżeli znamy (na przykład odgadniemy) jeden pierwiastek x_1 , równania algebraicznego $W(x) = 0$, to dzieląc $W(x)$ przez $x - x_1$ otrzymamy pewien wielomian $A(x)$. Ponieważ $W(x) = A(x)(x - x_1)$, więc w celu wyznaczenia następnych pierwiastków (jeżeli istnieją) równania $W(x) = 0$, czyli równania $A(x)(x - x_1) = 0$, należy rozwiązać równanie algebraiczne $A(x) = 0$, które jest stopnia o jeden niższego niż równanie $W(x) = 0$.

Podamy pewne twierdzenia, z których korzystamy przy odgadywaniu pierwiastków równań algebraicznych o współczynnikach całkowitych. Zwracamy uwagę, że równanie algebraiczne o współczynnikach wymiernych, można sprowadzić do równania o współczynnikach całkowitych, mnożąc obustronnie przez NWW mianowników wszystkich niecałkowitych współczynników. Na przykład równanie

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{7}x + \frac{1}{6} = 0$$

jest równoważne równaniu

$$14x^3 + 105x^2 + 12x + 7 = 0$$

powstałemu z poprzedniego przez pomnożenie obu jego stron przez liczbę 42, a więc NWW liczb 3, 2, 7 i 6.

Twierdzenie. Jeżeli liczba całkowita $x_1 \neq 0$ jest pierwiastkiem równania

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (36.5)$$

o całkowitych współczynnikach $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, to x_1 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Dowód. Jeżeli x_1 jest pierwiastkiem równania (36.5), czyli

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

to

$$\begin{aligned} a_0 &= -a_n x_1^n - a_{n-1} x_1^{n-1} - \dots - a_1 x_1 = \\ &= -x_1 (a_n x_1^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-2} + \dots + a_1) \end{aligned}$$

Wynika stąd, wobec $x_1 \neq 0$, że

$$\frac{a_0}{x_1} = -(a_n x_1^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-2} + \dots + a_1) \quad (36.6)$$

Ponieważ wszystkie współczynniki $a_1, a_2, \dots, a_n$ i pierwiastek x_1 są z założenia liczbami całkowitymi, więc prawa strona równości (36.6) jest liczbą całkowitą. Taką

jest więc i lewa strona równości (36.6) co oznacza właśnie, że x_1 jest podzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , cnd.

Pierwiastków całkowitych równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych wystarczy więc szukać wyłącznie wśród podzielników wyrazu wolnego a_0 .

Zauważmy, że liczba 0 jest pierwiastkiem równania (36.5) wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = 0$.

Przykład. Rozwiązać równanie $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$.

Rozwiązanie. Pierwiastkami całkowitymi danego równania mogą być jedynie podzielniki liczby 8, a więc

$$-1, \quad +1, \quad -2, \quad +2, \quad -4, \quad +4, \quad -8, \quad +8, \quad (36.7)$$

Oznaczamy lewą stronę danego równania przez $W(x)$ i obliczamy kolejno

$$W(-1) = (-1)^4 - 7(-1)^3 + 18(-1)^2 - 20(-1) + 8 = 54$$

$$W(+1) = 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 + 8 = 0$$

a więc liczba $x_1 = 1$ jest pierwiastkiem danego równania. Znając pierwiastek x_1 możemy następnie obniżyć stopień równania, to znaczy możemy obliczać pierwiastki równania o jeden stopień niższego. W tym celu dzielimy $W(x)$ przez $x-1$. Otrzymujemy iloraz $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, więc równanie $W(x) = 0$ można zastąpić równaniem $(x-1)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 0$. Ponieważ pierwszy czynnik $x-1$ odpowiada pierwiastkowi $x_1 = 1$ już znalezionemu, więc szukając pozostałych możemy go pominąć.

Zajmiemy się zatem równaniem

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \quad (36.8)$$

Równanie to może mieć pierwiastki całkowite wyłącznie wśród liczb (36.7), gdyż tylko one są podzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = -8$. Oznaczamy lewą stronę równania (36.8) przez $A(x)$ i obliczamy kolejno

$$A(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 12(-1) - 8 = -27$$

$$A(+1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 8 = -1$$

$$A(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 12(-2) - 8 = -64$$

$$A(+2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 0$$

a więc liczba $x_2 = 2$ jest pierwiastkiem równania (36.8). Dzieliąc następnie $A(x)$ przez $x-2$ otrzymamy $x^2 - 4x + 4$, więc równanie $A(x) = 0$ jest równoważne równaniu $(x-2)(x^2 - 4x + 4) = 0$. Rozumując jak wyżej ograniczamy się dalej do rozwiązywania równania $x^2 - 4x + 4 = 0$, którego pierwiastkiem podwójnym jest liczba 2.

Odp. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (potrójny).

Twierdzenie.** Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ (ułamek nieskracalny), różna od zera jest pierwiastkiem równania

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

o współczynnikach całkowitych, przy czym $a_0 \cdot a_n \neq 0$, to p jest podzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , natomiast q jest podzielnikiem współczynnika a_n .

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Ostatnie twierdzenie wskazuje, że za pomocą skończonej liczby prób możemy znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych. Prób tych może być jednak bardzo dużo, a każda z nich może być rachunkowo uciążliwa. Ponadto równanie może mieć pierwiastki niewymierne, których w powyższy sposób nie wyznaczymy. Z tego względu przy rozwiązywaniu równań wyższych stopni używa się zwykle *metod przybliżonych*, o których będzie mowa w rozdz. X.

Podamy teraz kilka przykładów, na których objaśnimy niektóre specjalne sposoby rozwiązywania równań algebraicznych.

Przykład **. Rozwiązać równanie

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad (36.9)$$

gdzie a i b są to liczby dane.

Rozwiązanie. Zwracamy uwagę, że współczynnik przy x^4 jest równy 1 — czyli wyrazowi a_0 , zaś współczynnik przy x^3 jest równy a — czyli współczynnikowi przy x . Mamy więc

$$a_{4-k} = a_k, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Równanie (36.9) jest tzw. równaniem *zwrotnym* czwartego stopnia. Można je sprowadzić do równania kwadratowego względem pomocniczej niewiadomej

$$z = x + \frac{1}{x} \quad (36.10)$$

W tym celu dzielimy równanie (36.9) obustronnie przez x^2 . Ponieważ liczba 0 nie spełnia równania (36.9), więc dostajemy równanie

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

które jest mu równoważne. Przekształcamy to równanie do postaci

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$$

a następnie korzystamy z podstawienia (36.10). Stąd

$$z^2 + az + b - 2 = 0 \quad (36.11)$$

Równanie (36.11) rozwiązujemy w znany sposób. Jeżeli nie ma ono pierwiastków, to równanie (36.9) także ich nie ma. Jeżeli równanie (36.11) ma pierwiastek podwójny albo dwa różne pierwiastki, to odpowiadające im rozwiązania równania (36.9) znajdujemy z zależności (36.10), czyli z równania $x^2 - zx + 1 = 0$, w którym niewiadomą jest x .

Przykład **. Rozwiązać równanie $2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 14x^2 + 11x + 5 = 0$.

Rozwiązanie. Spostrzegamy, że suma współczynników przy parzystych po-

tęgach x oraz wyrazu wolnego równa jest sumie współczynników przy potęgach nieparzystych:

$$2+11+11=5+14+5$$

Wynika stąd, że jednym z pierwiastków równania jest liczba $x_1 = -1$. Dzieląc lewą stronę danego równania przez $(x+1)$ otrzymamy $2x^4+3x^3+8x^2+6x+5$. Wielomian ten rozłożymy na czynniki drugiego stopnia

$$\begin{aligned} 2x^4+3x^3+8x^2+6x+5 &= x^2(2x^2+x+5)+x(2x^2+x+5)+ \\ &+ (2x^2+x+5) = (2x^2+x+5)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

Trójmiany $2x^2+x+5$ oraz x^2+x+1 nie mają pierwiastków.

Odp. $x_1 = -1$.

Pytania i zadania

1. Jakie równanie nazywamy równaniem algebraicznym stopnia n ?
2. Podać twierdzenie a) o liczbie pierwiastków, b) o rozkładzie na czynniki liniowe, c) o rozkładzie wielomianu na czynniki.
3. Czy równanie trzeciego stopnia może mieć pięć pierwiastków?
4. Czy równanie piątego stopnia może mieć trzy pierwiastki?
5. Czy równanie trzeciego stopnia może nie mieć pierwiastków?
6. Czy równanie czwartego stopnia może nie mieć pierwiastków?
7. Co to jest r -krotny pierwiastek równania?
8. Podać przykład równania, które ma dwa pierwiastki podwójne i jeden pierwiastek potrójny.
- 9**. Podać twierdzenie ułatwiające znajdowanie pierwiastków wymiernych równania o współczynnikach całkowitych.
10. Rozwiązać równania:
a) $x^4-5x^3+x^2+11x+4=0$, b) $x^3-2x^2+3x-6=0$,
c) $x^4-2x^3+2x-1=0$, d) $x^3-2x^2-5x+6=0$,
e) $x^5+3x^4-8x^2-9x-3=0$.
- 11*. Dla jakich wartości a i b równanie $x^3+4x^2+ax+b=0$ ma podwójny pierwiastek $x_1=2$?
- 12*. Dowieść, że jeżeli równanie $x^3+px+q=0$ ma pierwiastek podwójny, to $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$.
- 13**. Dowieść, że równanie $2x^3-x^2-4x+2=0$ nie ma pierwiastków całkowitych, a następnie znaleźć jego pierwiastek wymierny i rozwiązać równanie.
- 14**. Rozwiązać równanie $68x^8-257x^6-257x^2+68=0$.
- 15*. Rozwiązać równanie $(x^2-x)^2=x^2-x+132$.
- 16*. Rozwiązać równanie $x^6-9x^3+20=0$.
- 17*. Rozwiązać równanie $\frac{2+x^3}{x^4-2x}=\frac{x^2}{3}$.
- 18*. Rozwiązać równanie $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$.

37. Nierówności algebraiczne

Jeżeli $W(x)$ oznacza wielomian stopnia n , to nierówności

$$W(x) > 0, \quad W(x) < 0, \quad W(x) \geq 0, \quad W(x) \leq 0 \quad (37.1)$$

nazywamy *nierównościami algebraicznymi stopnia n* . Na przykład $x^3 + 3x - 4 < 0$ jest nierównością algebraiczną trzeciego stopnia (krótko: nierównością trzeciego stopnia), $x^4 - 1 \geq 0$ jest nierównością algebraiczną czwartego stopnia, $x^6 - 3x + 2 \leq 0$ jest nierównością szóstego stopnia itd.

Dotychczas rozwiązywaliśmy nierówności stopnia pierwszego (rozdz. IV, p. 25), oraz nierówności stopnia drugiego (rozdz. V, p. 33). Obecnie podamy przykłady rozwiązywania nierówności wyższych stopni. Będziemy przy tym korzystać z wiadomości o wielomianach, które podaliśmy w punktach 35 i 36.

Przykład. Rozwiązać nierówność $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 > 0$.

Rozwiązanie. Oznaczamy lewą stronę nierówności przez $W(x)$. Ponieważ $W(1) = 0$, więc $W(x)$ dzieli się przez $x - 1$. Przeprowadzamy to dzielenie i dostajemy iloraz $x^2 - x + 3$, stąd

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x^2 - x + 3)$$

Nierówność daną w przykładzie można więc zapisać w następujący sposób:

$$(x - 1)(x^2 - x + 3) > 0 \quad (37.2)$$

Trójmian $x^2 - x + 3$ jest dodatni dla każdej wartości x . Znak lewej strony nierówności (37.2) jest więc taki, jak znak czynnika $(x - 1)$.

Odp. $x > 1$.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$(x + 2)(x - 1)(x - 5) > 0 \quad (37.3)$$

Rozwiązanie. Po lewej stronie nierówności znajduje się wielomian trzeciego stopnia rozłożony na czynniki stopnia pierwszego. W celu rozwiązania nierówności (37.3) badamy znaki czynników $(x + 2)$, $(x - 1)$ i $(x - 5)$ dla różnych wartości zmiennej x i stąd wyznaczamy znak iloczynu. Uzyskane wyniki zapisujemy w tabelce (tzw. *siatka znaków*). Z najniższej rubryki siatki znaków odczytujemy, że nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $-2 < x < 1$ lub $x > 5$.

Tabl. 37-1

x		$x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$1 < x < 5$	5	$5 < x$
czynniki	$x + 2$	—	0	+	+	+	+	+
	$x - 1$	—	—	—	0	+	+	+
	$x - 5$	—	—	—	—	—	0	+
	iloczyn	—	0	+	0	—	0	+

Odp. $-2 < x < 1$ lub $x > 5$.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \leq 0 \quad (37.4)$$

Rozwiązanie. Wielomian znajdujący się po lewej stronie tej nierówności ma cztery pierwiastki: 1, 2, 3 i 4, które znajdujemy metodami podanymi w p.p. 35 i 36 tego rozdziału. Nierówność (37.4) można więc zapisać tak:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \leq 0$$

Następnie układamy siatkę znaków, z której odczytujemy odpowiedź.

Tabl. 37-2

x	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$3 < x < 4$	4	$4 < x$
$x-1$	—	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-2$	—	—	—	0	+	+	+	+	+
$x-3$	—	—	—	—	—	0	+	+	+
$x-4$	—	—	—	—	—	—	—	0	+
iloczyn	+	0	—	0	+	0	—	0	+

Odp. $1 \leq x \leq 2$ lub $3 \leq x \leq 4$.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$x(x^2+1)(x-1)(x-x^2-1) > 0 \quad (37.5)$$

Rozwiązanie. Czynniki kwadratowy x^2+1 jest dodatni dla każdego x , natomiast czynnik kwadratowy $x-x^2-1$ jest ujemny dla każdego x . Nierówność (37.5) jest więc spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x(x-1) < 0$, a więc gdy $0 < x < 1$.

Odp. $0 < x < 1$.

Podamy teraz przykłady takich nierówności, które można sprowadzić do równoważnych nierówności algebraicznych.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$x+1 < \frac{1}{x-1} \quad (37.6)$$

Rozwiązanie

$$x+1 < \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x+1 - \frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x-1} < 0$$

Ponieważ $x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, więc ostatecznie nierówność (37.6) jest równoważna nierówności algebraicznej trzeciego stopnia

$$(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2}) < 0$$

którą rozwiązujemy za pomocą siatki znaków.

Tabl. 37-3

x	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < 1$	1	$1 < x < \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} < x$
$x + \sqrt{2}$	—	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	—	—	—	0	+	+	+
$x - \sqrt{2}$	—	—	—	—	—	0	+
iloczyn	—	0	+	0	—	0	+

Odp. $x < -\sqrt{2}$ lub $1 < x < \sqrt{2}$.

Przykład*. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1+x^3}{x^2-4} < x \quad (37.7)$$

Rozwiązanie

$$\frac{1+x^3}{x^2-4} < x \Leftrightarrow \frac{1+x^3}{x^2-4} - x < 0 \Leftrightarrow \frac{1+4x}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2-4} < 0$$

Nierówność (37.7) jest więc równoważna nierówności

$$(x+2)\left(x + \frac{1}{4}\right)(x-2) < 0$$

którą rozwiązujemy za pomocą siatki znaków.

Tabl. 37-4

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4} < x < 2$	2	$2 < x$
$x+2$	—	0	+	+	+	+	+
$x + \frac{1}{4}$	—	—	—	0	+	+	+
$x-2$	—	—	—	—	—	0	+
iloczyn	—	0	+	0	—	0	+

Odp. $x < -2$ lub $-\frac{1}{4} < x < 2$.

Przykład*. Rozwiązać układ nierówności

$$\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} > 1 \quad \text{ i } \quad x^2 \leq 4 \quad (37.8)$$

Rozwiązanie. Przekształcamy pierwszą nierówność

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3x+1}{x^2-1} > 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{x^2-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-3x}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x-\frac{2}{3}}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1) < 0 \end{aligned}$$

Układ (37.8) jest więc równoważny takiemu układowi

$$\left. \begin{aligned} (x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1) < 0 \\ x^2 \leq 4 \end{aligned} \right\} \quad (37.9)$$

Pierwszą z nierówności tego układu rozwiązujemy za pomocą siatki znaków; zbiorem jej rozwiązań jest suma przedziałów $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right)$. Druga z nierówności

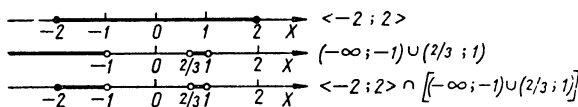
Tabl. 37-5

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 1$	1	$1 < x$
$x+1$	—	0	+	+	+	+	+
$x-\frac{2}{3}$	—	—	—	0	+	+	+
$x-1$	—	—	—	—	—	0	+
iloczyn	—	0	+	0	—	0	+

układu (37.9) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \langle -2; 2 \rangle$. Zbiorem rozwiązań układu (37.9) jest iloczyn tych dwóch zbiorów:

$$\left[(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \right] \cap \langle -2; 2 \rangle$$

Na rys. 37-1 przedstawiona jest interpretacja geometryczna otrzymanego zbioru rozwiązań.



Rys. 37-1

$$\text{Odp. } -2 \leq x < -1 \text{ lub } \frac{2}{3} < x < 1.$$

Przykład*. Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności pierwiastków równania

$$x^2 - 2(m-5)x + (m^2 + 3m + 2) = 0 \quad (37.10)$$

ma wartość dodatnią?

Rozwiązanie. Równanie (37.10) ma w ogóle pierwiastki (różne albo równe) wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest nieujemny, więc

$$\Delta = 4(m-5)^2 - 4(m^2 + 3m + 2) \geq 0$$

Stąd $-13m + 23 \geq 0$ czyli

$$m \leq \frac{23}{13} \quad (37.11)$$

Następnie wyrazimy sumę odwrotności pierwiastków równania (37.10) za pomocą parametru m . Korzystając ze wzorów Viète'a, dostajemy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2(m-5)}{m^2 + 3m + 2}$$

pod warunkiem, że $m^2 + 3m + 2 \neq 0$, czyli

$$m \neq -1 \quad \text{i} \quad m \neq -2 \quad (37.12)$$

Z warunków przykładu mamy

$$\frac{2(m-5)}{m^2 + 3m + 2} > 0$$

Ta ostatnia nierówność jest równoważna nierówności

$$(m+2)(m+1)(m-5) > 0$$

którą rozwiązujemy w znany sposób; dostajemy

$$-2 < m < -1 \quad \text{lub} \quad m > 5 \quad (37.13)$$

Suma odwrotności pierwiastków równania (37.10) jest więc dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie warunki (37.11) i (37.13), czyli gdy $-2 < m < -1$. Warunek (37.12) nie wnosi tu dodatkowych ograniczeń.

Odp. $-2 < m < -1$.

Pytania i zadania

1. Co to jest nierówność algebraiczna stopnia n ?
2. Czy nierówność stopnia trzeciego może nie mieć rozwiązań?
3. Czy nierówność stopnia czwartego może nie mieć rozwiązań?
4. Rozwiązać nierówności:

a) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 < 0$,

b) $(x-2)(x^2+5)(x-3)(x-4)(x-5) < 0$,

c) $(4x+1)(x^2+1) > 0$, d) $(x^2-x+3)(x^2-11) > 0$,

e) $\frac{x(x-5)}{2-x} < 0$, f) $(x^4+x^2+1)(x^2-1) \leq 0$.

5. Rozwiązać nierówności:

a) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0$, b) $2 - \frac{x-3}{x-2} > \frac{x-2}{x-1}$.

6. Dla jakich wartości parametru m następujące nierówności są spełnione dla każdego x ?

- a) $x^2 + 2x + m > 0$, b) $x^2 + 2x + m > 10$, c) $mx^2 + 12x - 5 < 0$,
 d) $x^2 + (m+2)x + 8m + 1 > 0$,
 e) $(5-m)x^2 - 2(1-m)x + 2(1-m) < 0$,
 f) $(4-m)x^2 - 3x + m + 4 > 0$.

7*. Niech x_1 i x_2 będą pierwiastkami równania $x^2 + kx + 1 = 0$. Znaleźć wszystkie wartości k , dla których

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 1$$

8*. Znaleźć wszystkie liczby całkowite, które spełniają nierówność

$$3 - x > \frac{1}{x+1}$$

9*. Udowodnić, że żadna liczba całkowita nie spełnia nierówności

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x+2}$$

10*. Jakie warunki powinna spełniać liczba m , aby pierwiastki x_1 i x_2 równania

$$\frac{mx}{m-1} + \frac{m+1}{x} = x+1$$

czyniły zadość nierówności

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2m + 1?$$

38. Wielomian wielu zmiennych

Niech A i B będą dwoma zbiorami. Wprowadzamy następujące oznaczenie

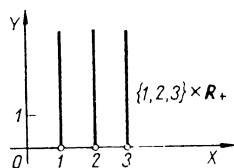
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ i } y \in B\} \quad (38.1)$$

Zbiór $A \times B$ nazywamy *iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B ; jest to zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$.

Przykłady. Iloczyn kartezjański $\mathbf{R} \times \{1\}$ jest zbiorem wszystkich par $(x, 1)$ gdzie $x \in \mathbf{R}$. Obrazem tego zbioru na płaszczyźnie układu współrzędnych OXY jest prosta o równaniu $y = 1$. Iloczyn $\{1, 2, 3\} \times \mathbf{R}_+$ jest zbiorem wszystkich par $(1, y)$, $(2, y)$, oraz $(3, y)$, gdzie $y \in \mathbf{R}_+$. Obrazem geometrycznym są tu trzy półproste (rys. 38-1). Iloczyn $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ jest zbiorem wszystkich par liczb rzeczywistych, więc obrazem geometrycznym tego zbioru jest cała płaszczyzna układu OXY .

Podobnie określamy iloczyn kartezjański trzech albo większej liczby zbiorów. Na przykład

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) : x \in A, y \in B, z \in C\}$$



Rys. 38-1

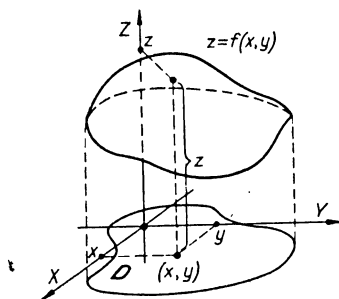
Niech D oznacza zbiór par uporządkowanych (x, y) , zaś Z — zbiór elementów z . Jeżeli istnieje odwzorowanie f zbioru D na zbiór Z , to nazywamy je *funkcją dwóch zmiennych* x i y . Piszemy przy tym

$$z = f(x, y) \quad (38.2)$$

dla $(x, y) \in D$. Zbiór D jest tu dziedziną, zaś zbiór Z — przeciwdziedziną (lub zbiorem wartości) funkcji f .

Funkcja (38.2) przyporządkowuje więc każdej parze $(x, y) \in D$ dokładnie jeden element $z \in Z$.

Jeżeli x, y i z są to zmienne liczbowe, wówczas obrazem geometrycznym funkcji (38.2) jest zbiór punktów, który może tworzyć powierzchnię (rys. 38-2).



Rys. 38-2

Na przykład funkcja

$$z = x + y$$

gdzie $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ przyporządkowuje każdej parze liczb rzeczywistych ich sumę.

A oto przykład z fizyki. Wiadomo, że ciśnienie p , objętość V , oraz temperatura bezwzględna T jednego mola gazu doskonałego związane są zależnością $pV = RT$, gdzie R jest tzw. *stałą gazową*. Ciśnienie p

$$p = R \cdot \frac{T}{V}$$

można więc traktować jako wartość funkcji dwóch zmiennych, a mianowicie temperatury T i objętości V .

Pole S prostokąta jest wartością funkcji dwóch zmiennych, a i b, którymi są długości boków tego prostokąta

$$S = a \cdot b$$

Definicja. *Jednomian dwóch zmiennych* x i y jest to funkcja

$$z = ax^n \cdot y^m, \quad (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad (38.3)$$

przy czym $n \geq 0$ i $m \geq 0$ są to liczby całkowite, zaś $a \neq 0$. Prawa strona równości (38.3) jest iloczynem dwóch jednomianów: ax^n i y^m . W przypadku, gdy $n = 0$ lub $m = 0$, zachowujemy tu umowę dotyczącą rozszerzenia dziedziny jednomianu jednej zmiennej na punkt 0. Dla $n = 0$ i $x = 0$ mamy więc $z = ay^m$, dla $m = 0$ i $y = 0$ mamy $z = ax^n$, zaś dla $n = m = 0$ i $x = y = 0$ mamy $z = a$.

Liczbę a nazywamy *współczynnikiem* jednomianu (38.3). Liczbę $n + m$ nazywamy *stopniem* tego jednomianu, przy czym n jest to stopień ze względu na x , zaś m — ze względu na y .

Funkcję stałą $z = 0$ nazywamy *jednomianem zerowym*.

Jednomian zerowy nie ma określonego stopnia.

Dwa jednomiany różniące się co najwyżej współczynnikami nazywamy *podobnymi*. Na przykład jednomiany $43x^2y^3$ oraz $17x^2y^3$ są podobne, natomiast jednomiany $4xy$ oraz $2x^2y$ nie są podobne.

Jednomian zerowy uważamy za podobny do każdego jednomianu.

Definicja. Funkcję

$$z = W(x, y) \quad (38.4)$$

gdzie $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, przy czym $W(x, y)$ oznacza sumę jednomianów dwóch zmiennych x i y , nazywamy *wielomianem* tych *dwóch zmiennych*.

Jednomiany, których suma stanowi wielomian (38.4) nazywamy *wyrazami* tego wielomianu.

W dalszym ciągu zakładamy, że wielomian (38.4) został zredukowany, tzn. że nie ma w nim dwóch wyrazów podobnych.

Stopień wielomianu jest to najwyższy ze stopni jego wyrazów. Podobnie, stopień wielomianu ze względu na jedną ze zmiennych jest to najwyższy ze stopni jego wyrazów ze względu na tę zmienną.

Na przykład wielomian

$$z = -3x^2y^3 + 4x^2y - xy + 2$$

jest piątego stopnia, a mianowicie drugiego stopnia ze względu na x i trzeciego stopnia ze względu na y .

Wielomian $W(x, y)$ nazywamy *symetrycznym*, gdy

$$W(x, y) = W(y, x)$$

dla $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Na przykład wielomian $W(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy + 8$ jest symetryczny, ponieważ zastępując x przez y i y przez x , dostajemy $W(y, x) = y^2 + x^2 - 4yx + 8 = W(x, y)$.

Rozważamy także wielomiany, trzech lub większej liczby zmiennych. Na przykład wielomian trzech zmiennych

$$u = 13x^2yz + 5xy^2 + xyz + 6$$

jest stopnia czwartego: drugiego ze względu na x i na y , zaś pierwszego ze względu na z .

Wielomian nazywamy *jednorodnym*, gdy wszystkie jego wyrazy są tego samego stopnia. Na przykład

$$z = x^2y + x^3 + 3xy^2, \quad w = x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2$$

są to wielomiany jednorodne.

Wielomiany n zmiennych można dodawać, odejmować i mnożyć; w wyniku każdego z tych działań dostajemy także wielomian. Iloraz wielomianu przez wielomian może nie być wielomianem.

Pytania i zadania

1. Co to jest iloczyn kartezjański dwóch zbiorów?
2. Podać określenie funkcji dwóch zmiennych, oraz jej interpretację geometryczną.
3. Co to jest a) jednomian, b) wielomian, dwóch zmiennych?
4. Co to jest stopień a) jednomianu, b) wielomianu?
5. Co to jest stopień ze względu na jedną ze zmiennych a) jednomianu, b) wielomianu? Podać przykłady.
6. Kiedy wielomian $W(x, y)$ nazywamy a) symetrycznym, b) jednorodnym? Podać przykłady.
7. Podać przykład wielomianu symetrycznego $W(x, y)$ stopnia czwartego.
8. Wielomiany symetryczne: a) $x^2 + y^2 - xy$, b) $x^3 + y^3$, c) $x^4 + y^4$ przekształcić tak, żeby zmienne x i y występowały tylko w sumie $x + y$ lub w iloczynie $x \cdot y$, a następnie oznaczyć tę sumę przez u i ten iloczyn przez v .
9. Zapisać w najprostszej postaci iloczyn

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)$$

10. Znaleźć obraz geometryczny iloczynu kartezjańskiego a) $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, b) $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ c) $\{1\} \times \{2, 3, 4\}$, d) $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$.
11. Podać przykład funkcji a) dwóch zmiennych, b) trzech zmiennych, z zakresu geometrii lub fizyki. Jaka jest dziedzina tej funkcji?

39. Układy równań algebraicznych

Jeżeli $A(x, y)$ i $B(x, y)$ są wielomianami dwóch zmiennych, to układ równań

$$\begin{cases} A(x, y) = 0 \\ B(x, y) = 0 \end{cases} \quad (39.1)$$

nazywamy układem dwóch równań *algebraicznych* o dwóch *niewiadomych* x i y . Każdą parę liczb (a, b) , która spełnia układ (39.1) nazywamy *rozwiązaniem* tego układu. Rozwiązać układ równań, tzn. znaleźć jego *zbiór rozwiązań*. Może to być zbiór skończony, nieskończony albo pusty.

Podobnie określa się układ równań algebraicznych w przypadku większej liczby niewiadomych lub równań.

Omówimy obecnie na przykładach niektóre metody rozwiązywania układów równań algebraicznych.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\left. \begin{aligned} x^3 + x^3 y^3 + y^3 &= \frac{3}{4} \\ x + xy + y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39.2)$$

Rozwiązanie (I sposób: pod względem *logicznym* – analiza starożytnych pod względem *rachunkowym* – eliminacja jednej niewiadomej). Przypuśćmy, że para liczb (x, y) spełnia układ (39.2). Z drugiego równania wyznaczamy

$$x = \frac{-y}{1+y} \quad (39.3)$$

i podstawiamy do pierwszego równania. Po wykonaniu łatwych rachunków dostajemy równanie z jedną niewiadomą

$$4y^5 + 4y^4 - y^3 - 3y^2 - 3y - 1 = 0 \quad (39.4)$$

Jeżeli więc para (x, y) spełnia układ (39.2), to liczba y spełnia równanie (39.4). W tej fazie rozwiązywania niewiadoma x została wyeliminowana. Rozwiążemy równanie (39.4). Na podstawie twierdzenia podanego na str. 169 pierwiastkami całkowitymi tego równania mogą być tylko liczby

$$-1 \quad \text{ i } \quad +1.$$

Sprawdzamy, że liczba $y_1 = -1$ spełnia równanie (39.4). Dzielimy więc lewą stronę tego równania przez $y + 1$. Dostajemy $4y^4 - y^2 - 2y - 1$. W celu znalezienia następnych pierwiastków równania (39.4), należy rozwiązać równanie $4y^4 - y^2 - 2y - 1 = 0$, które można zapisać w postaci

$$(2y^2)^2 - (y+1)^2 = 0, \quad \text{czyli} \quad (2y^2 + y + 1)(2y^2 - y - 1) = 0$$

Ponieważ trójmian $2y^2 + y + 1$ nie ma pierwiastków, zaś trójmian $2y^2 - y - 1$ ma dwa pierwiastki: $y_2 = 1$ oraz $y_3 = -\frac{1}{2}$, więc ostatecznie równanie (39.4) ma 3 pierwiastki

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = -\frac{1}{2}$$

Powracamy teraz do równania (39.3). Liczbie $y_1 = -1$ nie odpowiada żadna wartość x , natomiast liczbom $y_2 = 1$, oraz $y_3 = -\frac{1}{2}$ odpowiadają odpowiednio $x_2 = -\frac{1}{2}$, oraz $x_3 = 1$. Układ (39.2) może więc mieć co najwyżej dwa rozwiązania: $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ oraz $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$. Każdą z tych par liczb sprawdzamy (analiza starożytnych) podstawiając do układu (39.2). W obu przypadkach sprawdzenie daje wynik pozytywny.

Rozwiązanie (II sposób: pod względem *logicznym* — metoda równań równoważnych, pod względem *rachunkowym* — eliminacja jednej niewiadomej).

Układ (39.2) jest równoważny układowi

$$\left. \begin{aligned} x^3 + x^3 y^3 + y^3 &= \frac{3}{4} \\ x &= \frac{-y}{1+y} \end{aligned} \right\} . \quad (39.5)$$

Istotnie, każda para liczb spełniająca układ (39.2) spełnia także układ (39.5) i na odwrót, gdyż zastąpienie równania $x + xy + y = 0$ równaniem $x = \frac{-y}{1+y}$ wyklucza tylko wartość $y = -1$, czyli wyklucza pary $(x, -1)$, $x \in \mathbf{R}$, zaś żadna z takich par nie spełnia układu (39.2). Układ (39.5) jest z kolei równoważny układowi

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-y}{1+y} \\ 4y^5 + 4y^4 - y^3 - 3y^2 - 3y - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39.6)$$

przy czym drugie z równań tego układu jest takie same jak równanie (39.4) i dostajemy je w ten sam sposób. Układ (39.6) rozwiązujemy tak samo jak poprzednim sposobem. Dostajemy dwie pary liczb $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ oraz $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, które z uwagi na równoważność układów (39.6) i (39.2), są szukanymi rozwiązaniami tego drugiego układu.

Rozwiązanie (III sposób: pod względem *logicznym* — metoda równań równoważnych, pod względem *rachunkowym* — metoda pomocniczych niewiadomych).

Wprowadzamy pomocnicze niewiadome u i v

$$\left. \begin{aligned} x + y &= u \\ x \cdot y &= v \end{aligned} \right\} \quad (39.7)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} x^3 + x^3 y^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) + x^3 y^3 = \\ &= (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] + (xy)^3 = \\ &= u(u^2 - 3v) + v^3 \end{aligned}$$

oraz $x + xy + y = u + v$, więc układ (39.2) można zapisać tak:

$$\left. \begin{aligned} u^3 + v^3 - 3uv &= \frac{3}{4} \\ u + v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39.8)$$

Układ (39.8) rozwiązujemy metodą eliminacji; z drugiego równania wyznaczamy $u = -v$ i podstawiamy do pierwszego równania. Stąd $3v^2 = \frac{3}{4}$, czyli $v_1 = -\frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{2}$. Następnie obliczamy $u_1 = \frac{1}{2}$ i $u_2 = -\frac{1}{2}$. W ten sposób otrzymaliśmy dwa rozwiązania

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

układu (39.8). Każdej z tych dwóch par liczb odpowiada inny układ równań (39.7). Układ (39.2) jest zatem równoważny alternatywie dwóch układów

$$\left. \begin{aligned} x+y &= -\frac{1}{2} \\ x \cdot y &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x_1+y &= -\frac{1}{2} \\ x \cdot y &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

Pierwszy z tych układów nie ma rozwiązania, natomiast drugi ma dwa rozwiązania: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ oraz $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, które są jednocześnie jedynymi rozwiązaniami układu (39.2).

Odp. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

U w a g a. Jeżeli wielomiany $A(x, y)$ i $B(x, y)$ są symetryczne (str. 180) to układ (39.1) nazywamy *układem symetrycznym*. Takim jest na przykład układ (39.2). Układ symetryczny można rozwiązywać wprowadzając pomocnicze niewiadome $u = x + y$ i $v = x \cdot y$, ponieważ każdy wielomian symetryczny $W(x, y)$ daje się przedstawić w postaci wielomianu zmiennych u i v . Dowód tego faktu pomijamy.

$$\left. \begin{aligned} x^4 + y^4 &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (39.9)$$

Rozwiązanie. Jeżeli układ ma rozwiązanie (x, y) , to $(x+y)^4 = 1$, czyli $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 1$. Biorąc pod uwagę pierwsze z równań (39.9) otrzymamy $4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = 0$. Ostatnie równanie dzielimy obustronnie przez 2, skąd

$$2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 = 0 \quad (39.10)$$

czyli

$$xy(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0 \quad (39.11)$$

Biorąc pod uwagę $x = 0$ stwierdzamy, że para $(0, 1)$ spełnia układ (39.9). Dla $y = 0$ otrzymujemy drugie rozwiązanie układu, a mianowicie $(1, 0)$. Jeżeli $xy \neq 0$, to dzieląc równanie (39.11) przez xy^3 otrzymamy

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\frac{x}{y} + 2 = 0 \quad (39.12)$$

Lewa strona tego równania jest dodatnia dla wszystkich wartości x i $y \neq 0$. Sprawdzenie par $(0, 1)$ i $(1, 0)$ wykonałszy już w trakcie rozwiązywania.

Odp. $(0, 1), (1, 0)$.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\left. \begin{aligned} (x-y)(x^2-y^2) &= 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) &= 15 \end{aligned} \right\} \quad (39.13)$$

Rozwiązanie. Jeżeli $x = 0$, to z pierwszego równania otrzymamy warunek $y^3 = 3$, natomiast z drugiego warunek $y^3 = 15$. Warunki te są sprzeczne. Nie istnieje

je więc para $(0, y)$, która byłaby rozwiązaniem układu (39.13). Możemy więc w dal-
szym ciągu poszukiwać rozwiązań tego układu wśród takich par (x, y) , dla których
 $x \neq 0$.

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą t :

$$t = \frac{y}{x} \quad (39.14)$$

Podstawiamy do każdego z równań układu (39.13) $y = tx$ i wyłączamy x przed
nawias

$$\begin{cases} x^3(1-t)(1-t^2) = 3 \\ x^3(1+t)(1+t^2) = 15 \end{cases} \quad (39.15)$$

Mnożymy obie strony pierwszego z otrzymanych równań przez 5, porównujemy
lewe strony i dzielimy obustronnie przez x^3 , skąd

$$5(1-t)(1-t^2) = (1+t)(1+t^2) \quad (39.16)$$

Otrzymane równanie ma pierwiastek $t_1 = -1$. Aby wyznaczyć pozostałe pier-
wiastki (jeżeli istnieją), dzielimy równanie obustronnie przez $1+t$. Otrzymamy
 $5(1-t)^2 = 1+t^2$, czyli równanie kwadratowe $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Stąd $t_2 = 2, t_3 = \frac{1}{2}$.

Podstawiając do pierwszego z równań (39.15) $t = t_1 = -1$ otrzymamy $0 = 3$,
a więc sprzeczność.

Podstawiając $t = t_2 = 2$ dostajemy $x^3 \cdot 3 = 3$, czyli $x_1 = 1$. Ponieważ $y = tx$,
więc $y_1 = t_2 x_1 = 2 \cdot 1 = 2$. Otrzymaliśmy więc parę liczb $(1, 2)$, która spełnia
układ (39.13), co sprawdzamy bezpośrednio.

Podstawiając do pierwszego z równań (39.15) $t = t_3 = \frac{1}{2}$ otrzymamy $x^3 \cdot \frac{3}{8} =$
 $= 3$, czyli $x_2 = 2$. Obliczamy $y_2 = t_3 \cdot x_2 = 1$. Sprawdzamy, że para $(2, 1)$ spełnia
układ (39.13).

Odp. $(2, 1), (1, 2)$.

Uwaga. Podstawienie (39.14) jest korzystne wówczas, gdy wszystkie wyrazy
zawierające niewiadome są w obu równaniach jednomianami tego samego stopnia.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases} \quad (39.17)$$

Rozwiązanie. Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $u = \sqrt[6]{xy}$. Pierwsze
z równań układu przyjmie więc postać

$$3u^3 - 7u^2 + 4 = 0 \quad (39.18)$$

Równanie (39.18) ma pierwiastek $u_1 = 1$. Dzieląc lewą stronę tego równania przez
 $u-1$ otrzymamy $3u^2 - 4u - 4 = 0$. Równanie $3u^2 - 4u - 4 = 0$ ma dwa pierwiastki: $u_2 =$
 $= 2, u_3 = -\frac{2}{3}$. Pierwiastek u_3 pomijamy, ponieważ $\sqrt[6]{xy} \geq 0$. Stąd $\sqrt[6]{xy} = 1$

czyli $xy = 1$, albo $\sqrt[6]{xy} = 2$, czyli $xy = 64$. Układ (39.17) jest więc równoważny alternatywie układów

$$\left. \begin{array}{l} xy = 1 \\ x + y = 20 \end{array} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{array}{l} xy = 64 \\ x + y = 20 \end{array} \right\} \text{(II)}$$

Układy (I) i (II) rozwiązujemy w znany sposób.

Odp. $(10 - 3\sqrt{11}, 10 + 3\sqrt{11})$, $(10 + 3\sqrt{11}, 10 - 3\sqrt{11})$, $(4, 16)$, $(16, 4)$.

Podamy teraz przykłady rozwiązywania układów trzech równań algebraicznych o trzech niewiadomych. Układy takie powstają na skutek przyrównania do zera trzech wielomianów trzech zmiennych.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ xy = 108 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{array} \right\} \quad (39.19)$$

Rozwiązanie. Traktujemy trójkę uporządkowaną (x, y, z) za trójkę liczb stanowiącą rozwiązanie układu. Zakładamy więc, że dany układ ma rozwiązanie. Wyznaczamy z pierwszego równania $z = 36 - x - y$ i podstawiamy do trzeciego równania. Po redukcji otrzymamy $xy - 36x - 36y + 648 = 0$. Liczby x i y spełniają więc następujący układ dwóch równań:

$$\left. \begin{array}{l} xy = 108 \\ xy - 36x - 36y + 648 = 0 \end{array} \right\} \quad (39.20)$$

Każda para (x, y) spełniająca układ (39.20) spełnia także układ

$$\left. \begin{array}{l} xy = 108 \\ x + y = 21 \end{array} \right\}$$

powstały przez zastąpienie iloczynu xy w drugim z równań (39.20) przez 108. Otrzymany układ równań rozwiązujemy w znany sposób. Ma on dwa rozwiązania: $(9, 12)$ i $(12, 9)$. Z zależności $z = 36 - x - y$ obliczamy odpowiadające tym parom wartości z . Otrzymamy w ten sposób dwie trójki liczb; $(9, 12, 15)$ i $(12, 9, 15)$, które mogą być rozwiązaniami układu (39.19). Sprawdzamy, że każda z tych trójek jest istotnie rozwiązaniem tego układu.

Odp. $(9, 12, 15)$, $(12, 9, 15)$.

Uwaga. Układ (39.19) jest *symetryczny ze względu na x i y* . Wprowadzając nowe niewiadome $u = x + y$ oraz $v = x \cdot y$ dostajemy łatwy do rozwiązania układ równań

$$\left. \begin{array}{l} u + z = 36 \\ v = 108 \\ u^2 - 2v = z^2 \end{array} \right\}$$

Pozostawiamy czytelnikowi rozwiązanie układu (39.19) tą metodą.

Przykład*. Rozwiązać układ równań

$$\left. \begin{aligned} \frac{10}{3x} + \frac{5}{y} - \frac{3}{2z} &= \frac{13}{3} \\ 3y - 4z - 4yz &= 0 \\ xy + 10yz - 5xyz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39.21)$$

Rozwiązanie. Rozwiązań poszukujemy wśród trójek liczb (x, y, z) różnych od zera. Układ (39.21) przepiszemy następująco:

$$\left. \begin{aligned} \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot \frac{1}{y} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z} &= \frac{13}{3} \\ -4 \cdot \frac{1}{y} + 3 \cdot \frac{1}{z} &= 4 \\ 10 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= 5 \end{aligned} \right\} \quad (39.22)$$

Wprowadzamy pomocnicze niewiadome

$$u = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{y}, \quad w = \frac{1}{z} \quad (39.23)$$

które pozwalają sprowadzić układ (39.22) do układu trzech równań pierwszego stopnia o trzech niewiadomych

$$\left. \begin{aligned} \frac{10}{3} \cdot u + 5v - \frac{3}{2}w &= \frac{13}{3} \\ -4v + 3w &= 4 \\ 10u + w &= 5 \end{aligned} \right\} \quad (39.24)$$

Wyznaczamy z trzeciego równania $w = 5 - 10u$ i podstawiamy do pierwszego i drugiego równania. Po redukcji otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} 110u + 30v &= 71 \\ 30u + 4v &= 11 \end{aligned} \right\} \quad (39.25)$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie $\left(\frac{1}{10}, 2\right)$. Stąd $w = 4$. Sprawdzamy że trójka liczb $\left(\frac{1}{10}, 2, 4\right)$ spełnia układ (39.24). Wartości x, y i z obliczamy z zależności (39.23).

$$\text{Odp. } \left(10, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Pytania i zadania

1. Co to jest układ równań algebraicznych? Podać przykłady.
2. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} y^4 - x^4 = 15 \\ y - x = 1 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x \cdot y = 27 \end{array} \right\} \\ \text{d) } \left. \begin{array}{l} x^3 - y^3 = 19(x - y) \\ x^3 + y^3 = 7(x + y) \end{array} \right\} & \text{e) } \left. \begin{array}{l} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{array} \right\} \end{array}$$

3*. Rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ xy + yz - xz = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 14 \\ xyz = 70 \\ y^2 - xz = 11 \end{array} \right.$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{array} \right. \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 66 \\ xy + xz = 11 \\ x + y + z = 12 \end{array} \right.$$

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ x^2 + z^2 + xz = 28 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \end{array} \right. \quad \text{f) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{array} \right.$$

4**. Rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x = 2(x + y + z) \sqrt[3]{xyz} \\ y = 3(x + y + z) \sqrt[3]{xyz} \\ z = 4(x + y + z) \sqrt[3]{xyz} \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 \end{array} \right.$$

5. Obliczyć długości boków trójkąta prostokątnego, jeżeli jego obwód wynosi 70 cm, a pole 210 cm²

40. Funkcje wymierne

Niech $L(x)$ i $M(x)$ oznaczają dwa wielomiany ($M(x) \neq 0$) zmiennej rzeczywistej x , zaś $\mathbf{Z}$ — zbiór punktów zerowych wielomianu $M(x)$.

Funkcję

$$x \mapsto y = \frac{L(x)}{M(x)} \quad (40.1)$$

określoną w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, nazywamy *funkcją wymierną* zmiennej x . Na przykład

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

są to funkcje wymierne; dziedziną pierwszej z nich jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-1, +1\}$, drugiej i trzeciej natomiast — zbiór $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Każdy wielomian jest funkcją wymierną, gdyż

$$W(x) = \frac{W(x)}{1}; \quad (L(x) = W(x), \quad M(x) = 1)$$

Ciało funkcji wymiernych.** W zbiorze funkcji wymiernych zmiennej x określone są cztery działania arytmetyczne: *dodawanie* i *mnożenie*, oraz odwrotne do nich — *odejmowanie* i *dzielenie* (z wyjątkiem dzielenia przez funkcję równą tożsamościowo zero). Dodawanie oraz mnożenie są przy tym *przemienne* i *łączne*, a ponadto *mnożenie* jest *rozdzielne* względem *dodawania*. W zbiorze funkcji wymiernych istnieje *moduł dodawania* $f(x) \equiv 0$ oraz *moduł mnożenia* $f(x) \equiv 1$. Zbiór spełniający wymienione tu warunki, nazywamy *ciałem*. Zbiór funkcji wymiernych jednej zmiennej x tworzy więc ciało.**

Zwracamy uwagę na głęboką analogię między zbiorami liczbowymi $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{W}$ z jednej strony, a zbiorami: **wielomianów** oraz **funkcji wymiernych** z drugiej strony. W zbiorze wielomianów, podobnie jak w zbiorze $\mathbf{C}$, wykonalne są: *dodawanie*, *odejmowanie* i *mnożenie*, natomiast *dzielenie* nie zawsze jest wykonalne. W zbiorze funkcji wymiernych, podobnie jak w zbiorze $\mathbf{W}$, wykonalne są natomiast *wszystkie cztery działania arytmetyczne*, (z wyjątkiem dzielenia przez 0). Ponieważ w zbiorze funkcji wymiernych wykonujemy działania analogiczne do działań w zbiorze $\mathbf{W}$, przyjęto tu posługiwać się terminami zaczerpniętymi z arytmetyki liczb wymiernych, w szczególności zaś — z nauki o ułamkach. Iloraz po prawej stronie równości (40.1) nazywamy więc ułamkiem, wielomian $L(x)$ — licznikiem, zaś wielomian $M(x)$ — mianownikiem tego ułamka. Przekształcając funkcję wymierną używamy terminów *skracanie* ułamka, np.

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1$$

oraz *rozszerzanie* ułamka i *sprowadzanie do wspólnego mianownika*, np.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{x(x+2)} + \frac{x}{x(x+2)} = \frac{2x+2}{x(x+2)}$$

Funkcja homograficzna jest to funkcja wymierna zmiennej x określona wzorem

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (40.2)$$

gdy współczynniki a , b , c i d spełniają warunek

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (40.3)$$

Jeżeli $c = 0$, to funkcja (40.2) jest *liniowa*, określona w zbiorze $\mathbf{R}$. Jeżeli $c \neq 0$, to dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\mathbf{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Na przykład

$$\begin{aligned} y &= 2x, & y &= \frac{1}{x}, & y &= \frac{x+1}{x+2}, & y &= \frac{-5x}{2x-1} \\ \begin{pmatrix} a=2, & d=1 \\ b=c=0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b=c=1 \\ a=d=0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a=b=c=1 \\ d=2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a=-5, & c=2 \\ d=-1, & b=0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

są to funkcje homograficzne, zaś funkcja

$$y = \frac{2x+3}{4x+6} \quad (40.4)$$

nie jest homograficzna, gdyż nie jest spełniony warunek (40.3). Funkcja (40.4) jest określona w dziedzinie $\mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ i ma stałą wartość $y = \frac{1}{2}$.

Wykresem funkcji homograficznej jest *hiperbola* lub *prosta*.

Przykład. Wykreślić funkcję

$$y = \frac{x-1}{x+1} \quad (40.5)$$

Rozwiązanie. Równość (40.5) przekształcamy do postaci

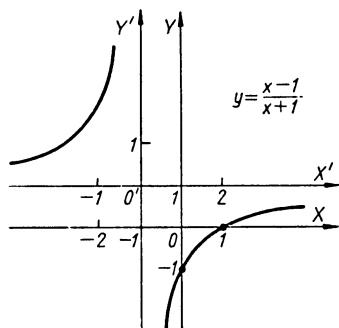
$$y-1 = \frac{-2}{x+1}$$

a następnie wprowadzamy nowe zmienne: $x' = x+1$, $y' = y-1$. Mamy więc

$$y' = \frac{-2}{x'} \quad (40.6)$$

Ponieważ wykres funkcji (40.6) potrafimy sporządzić (cz. 1, str. 75), więc umieszczając na płaszczyźnie dwa układy współrzędnych: $OX Y$ i $O' X' Y'$ oraz rysując w drugim z nich hiperbolę o równaniu (40.6), otrzymamy szukany wykres funkcji (40.5).

Odp. Rys. 40-1.



Rys. 40-1

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja wymierna?
2. Omówić analogie między zbiorem $\mathbf{W}$ oraz zbiorem funkcji wymiernych.
3. Co to jest funkcja homograficzna i jaki jest jej wykres?
4. Wykreślić funkcję:

$$\text{a) } y = \frac{x+2}{x}, \quad \text{b) } y = \frac{3x-8}{2x-5}, \quad \text{c) } y = \frac{-x+2}{2x+1}.$$

Odpowiedzi do rozdziału VI

35.

21. a) -3 , b) -5 , c) -5 , d) $\sqrt{2}-7$, e) $-\sqrt{2}-7$.

23. a) $2x^3-5x^2+2x-15$, b) $x^5-3x^4+11x^3-14x^2+16x+3$, c) $3x^3-x^4+x^3+7x^2-6x+8$, d) $x^4+8x^3-64x-64$.

24. a) x^3-2x^2+x-3 , b) x^3+6x^2+6x+5 , c) x^2+x+1 , d) $-2x^2+2x-\frac{3}{2}$,

e) $x-1$, f) $x^2+2x-15$. 27*. $a=21$, $b=20$, $c=6$. 28*. $3b=a^2$ i $27c=a^3$. 32*. $3x-1$. 33**. $a=b=1$.

36.

3. nie. 4. tak. 5. nie. 6. tak. 10. a) $x_1=-1$, $x_2=4$,

$x_3=1-\sqrt{2}$, $x_4=1+\sqrt{2}$, b) $x_1=2$, c) $x_1=-1$, $x_2=1$ (potrójny),

d) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$, e) $x_1=-1$ (potrójny), $x_2=-\sqrt{3}$,

$x_3=\sqrt{3}$. 11*. $a=-28$, $b=32$. 13*. $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{2}$.

14**. $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-2$, $x_4=2$. 15*. $x_1=-3$, $x_2=4$.

16*. $x_1=\sqrt[3]{4}$, $x_2=\sqrt[3]{5}$. 17*. $x_1=-1$, $x_2=\sqrt[3]{6}$. 18*. $x_1=2-\sqrt{3}$, $x_2=2+\sqrt{3}$.

37.

2. nie. 3. tak. 4. a) $x < 2$ lub $3 < x < 4$, b) $2 < x < 3$ lub $4 < x < 5$,

c) $x > \frac{1}{4}$, d) $x < -\sqrt{11}$ lub $x > \sqrt{11}$, e) $0 < x < 2$ lub $x > 5$, f) $-1 \leq x \leq 1$.

5. a) $x < -3$ lub $x > 1$, b) $1 < x < \frac{3}{2}$ lub $x > 2$. 6. a) $m > 1$, b) $m > 11$,

c) $m < -7,2$, d) $0 < m < 28$, e) $m > 9$, f) $-\frac{\sqrt{55}}{2} < m < \frac{\sqrt{55}}{2}$.

7*. $k \leq -2$ lub $k \geq 2$. 8*. wszystkie liczby całkowite $n \leq 2$, z wyjątkiem minus jedności. 10*. $-\frac{3}{2} < m < -1$ lub $0 < m < 1$.

38.

8. a) u^2-3v , b) u^3-3uv , c) $u^4-4u^2v+2v^2$. 9. $x^{16}-y^{16}$.

39.

2. a) $(1, 2)$, b) $(2, 1)$, $(1, 2)$, c) $(27, 1)$, $(1, 27)$, d) $(0, 0)$ $(\sqrt{7}, \sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$, $(\sqrt{19}, -\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19}, \sqrt{19})$, $(3, 2)$, $(-3, -2)$, $(2, 3)$, $(-2, -3)$, e) $(3, 1)$, $(-3, -1)$.

3*. a) $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, b) $(2, 5, 7)$, $(7, 5, 2)$, c) $(4, -3, -1)$, $(-3, 4, -1)$, $(-1, 4, -3)$, $(4, -1, -3)$, $(-1, -3, 4)$, $(-3, -1, 4)$, d) $(1, 7, 4)$, $(1, 4, 7)$, e) $(4, 3, 2)$, $(4, -3, -2)$,

$(\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{8\sqrt{3}}{3})$, $(-\frac{10\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{3})$, f) $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$,

$(1, 0, 0)$. 4**. a) $(\frac{1}{9\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{6\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{9\sqrt[3]{3}})$, b) $(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$,

$(4, 1, 1)$. 5. 20 cm, 21 cm, 29 cm.

Rozdział VII

CIĄGI LICZBOWE

41. Pojęcie ciągu

Definicja. Ciąg nieskończony (krótko: ciąg) jest to funkcja f , która odwzorowuje zbiór N liczb naturalnych w pewien niepusty zbiór Y .

Wartość $f(n)$ funkcji f dla argumentu n nazywamy n -tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez a_n , zaś sam ciąg przez (a_n) lub $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Na przykład (n) oznacza ciąg liczb naturalnych:

$$(1, 2, 3, \dots) \quad (41.1)$$

Ciąg ten odwzorowuje tożsamościowo zbiór N na zbiór $Y = N$.

Niech K_n oznacza kulę o promieniu n i o środku w ustalonym punkcie P . Ciąg (K_n) odwzorowuje zbiór N w zbiór Y kul o wspólnym środku P i o promieniach będących liczbami naturalnymi.

Definicja. Ciąg skończony k — wyrazowy jest to funkcja f , która odwzorowuje zbiór $\{1, 2, \dots, k\}$ w pewien niepusty zbiór Y .

Ciąg skończony oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, przy czym a_n oznacza $f(n)$, dla $n = 1, 2, \dots, k$.

Na przykład para współrzędnych (x, y) punktu na płaszczyźnie jest ciągiem 2—wyrazowym, przy czym $a_1 = x$, $a_2 = y$.

W pojęciu ciągu istotne są nie tylko jego wyrazy, lecz także kolejność tych wyrazów.

Każdy ciąg skończony ma wyraz pierwszy i ma wyraz ostatni, natomiast ciąg nieskończony ma wyraz pierwszy, lecz nie ma wyrazu ostatniego.

Ciąg nazywamy liczbowym, jeżeli jego wyrazy są liczbami.

Na przykład ciąg (41.1) jest ciągiem liczbowym.

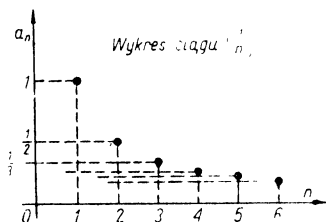
Ciąg liczbowy może być określony za pomocą wzoru wyrażającego a_n w zależności od n . Na przykład wó:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

określa ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$, czyli

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \quad (41.2)$$

Na rys. 41-1 znajduje się wykres tego ciągu; składa się on z pojedynczych punktów.



Rys. 41-1

Wzór na n -ty wyraz ciągu może wyrażać a_n w zależności od jednego lub większej liczby wyrazów o numerach mniejszych niż n ; jest to tzw. wzór rekurencyjny.

Ciąg liczbowy może być określony za pomocą wzoru rekurencyjnego na a_n , oraz odpowiedniej liczby wyrazów początkowych. Na przykład wzór

$$a_n = \frac{1}{2} (a_{n-2} + a_{n-1}), \quad \text{dla } n \geq 3$$

oraz wyrazy $a_1 = 1$ i $a_2 = 5$, określają ciąg

$$(1, 5, 3, \dots)$$

Ciągi monotoniczne. Ciągiem *rosnącym* nazywamy taki ciąg (a_n) , w którym każdy wyraz następny jest większy od poprzedniego, tzn.

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad (41.3)$$

dla każdego n , gdy ciąg jest nieskończony, zaś dla każdego $n \leq k-1$, gdy ciąg jest k — wyrazowy.

Na przykład ciąg $(1, 3, 5)$ jest rosnący; ponieważ $3-1 > 0$ i $5-3 > 0$. Ciąg nieskończony $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ także jest rosnący; ponieważ dla każdego naturalnego n

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

Ciągiem *malejącym* nazywamy taki ciąg (a_n) , w którym każdy wyraz następny jest mniejszy od poprzedniego; tzn.

$$a_{n+1} - a_n < 0 \quad (41.4)$$

dla każdego n , gdy ciąg jest nieskończony, zaś dla każdego $n \leq k-1$, gdy ciąg jest k — wyrazowy.

Na przykład ciąg (41.2) jest malejący, bo dla każdego n mamy:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0$$

Jeżeli zamiast nierówności mocnej (41.3) spełniona jest nierówność słaba $a_{n+1} - a_n \geq 0$, to ciąg (a_n) nazywamy *niemalejącym*. Na przykład ciąg $\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$, czyli

$$(1, 2, 2, 3, 3, \dots) \quad (41.5)$$

jest niemalejący. Podobnie, jeżeli zamiast nierówności mocnej (41.4) spełniona jest nierówność słaba $a_{n+1} - a_n \leq 0$, to ciąg (a_n) nazywamy *nierosnącym*. Na przykład ciąg $\left(1 - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$, czyli

$$(1, 0, 0, -1, -1, \dots) \quad (41.6)$$

jest nierosnący.

Każdy ciąg rosnący jest niemalejącym i każdy ciąg malejący jest nierosnącym.

Ciąg monotoniczny jest to ciąg niemalejący lub nierosnący.

Ciągi (41.2), (41.5) i (41.6) są monotoniczne. Przykładem ciągu, który nie jest monotoniczny jest ciąg

$$((-1)^n), \quad \text{czyli} \quad (-1, +1, -1, \dots)$$

Jeżeli dla każdego n mamy $a_n = \text{const} = a$, to ciąg (a_n) , czyli

$$(a, a, a, \dots)$$

nazywamy *ciągami stałymi*. Ten ciąg jest niemalejący i jednocześnie nierosnący

Pytania i zadania

1. Co to jest ciąg nieskończony? Podać przykład.
2. Co to jest ciąg skończony? Podać przykład.
3. Co to jest ciąg liczbowy? Podać przykład.
4. Napisać kilka początkowych wyrazów ciągu, jeżeli:

$$\text{a) } a_n = \frac{2n}{n^2 + 1}, \quad \text{b) } b_n = n - \frac{1}{n}, \quad \text{c) } c_n = n[1 - (-1)^n],$$

$$\text{d) } a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 3$$

a następnie sporządzić wykres tego ciągu.

5. Co to jest ciąg a) rosnący, b) malejący, c) niemalejący, d) nierosnący, e) monotoniczny? Podać przykłady.
6. Udowodnić, że ciąg $\left(\frac{2n-1}{n}\right)$ jest rosnący. Czy ciąg ten jest niemalejący?
- 7*. Podać przykład ciągu nieskończonego, który jest rosnący i którego wszystkie wyrazy są ujemne.
- 8*. Podać przykład ciągu nieskończonego, który jest malejący i którego każdy wyraz a_n spełnia warunek $1 < a_n < 2$.

42. Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna (zwana też indukcją *zupelną*) jest to metoda dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych.

Niech $T(n)$ oznacza formę zdaniową zmiennej n , określoną w dziedzinie N . Jeżeli w miejsce n podstawimy dowolną liczbę naturalną, to $T(n)$ stanie się zdaniem prawdziwym albo fałszywym, zależnie od wartości n . Jeżeli, na przykład $T(n)$ oznacza wypowiedź: „ n jest podzielne przez 3”, to $T(6)$ jest zdaniem prawdziwym, natomiast $T(7)$ jest zdaniem fałszywym. Jeżeli $T(n)$ oznacza nierówność $n < n^2$, to $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej większej od 1, natomiast zdanie $T(1)$ jest fałszywe.

Metoda indukcji matematycznej opiera się na następującej zasadzie:

Zasada indukcji matematycznej. Jeżeli

1° istnieje taka liczba naturalna n_0 , że $T(n_0)$ jest zdaniem prawdziwym,

2° dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$,
to $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

Przykład. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ spełniona jest nierówność

$$2^n > 2n \quad (42.1)$$

Rozwiązanie. Nierówność (42.1) jest tu formą zdaniową $T(n)$, $n_0 = 3$.

1° Dla $n = 3$ nierówność (42.1) jest prawdziwa, ponieważ $2^3 = 8 > 2 \cdot 3 = 6$.
 $T(3)$ jest więc zdaniem prawdziwym.

2° Załóżmy, że nierówność (42.1) jest prawdziwa dla liczby naturalnej $n \geq 3$.
Mnożąc tę nierówność obustronnie przez 2 dostajemy $2 \cdot 2^n > 2 \cdot 2n$, czyli $2^{n+1} > 2n + 2n$.
Ponieważ dla każdego $n \geq 3$ mamy $2n > 2$, więc $2n + 2n > 2n + 2 = 2(n+1)$.
Stąd ostatecznie

$$2^{n+1} > 2(n+1) \quad (42.2)$$

Nierówność ta oznacza prawdziwość zdania $T(n+1)$. Wykazaliśmy zatem, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdyż z prawdziwości jej poprzednika wynika prawdziwość następnika.

Ponieważ założenia 1° i 2° zasady indukcji matematycznej są dla nierówności (42.1) spełnione ($n_0 = 3$), więc ta nierówność jest prawdziwa dla każdego $n \geq 3$, cnd.

Dowód przeprowadzony metodą indukcji matematycznej nazywamy *dowodem indukcyjnym*; składa się on z dwóch etapów:

1° sprawdzenia, że $T(n_0)$ jest prawdziwe,

2° dowodu, że dla każdego $n \geq n_0$ jeżeli $T(n)$ jest prawdziwe, to $T(n+1)$ jest prawdziwe.

Ten drugi etap nazywamy *crokiem indukcyjnym*; zakładamy w nim, że dla liczby naturalnej $n \geq n_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe (tzw. *hipoteza indukcyjna*) i na tej podstawie dowodzimy prawdziwości zdania $T(n+1)$.

A oto dalsze przykłady.

Przykład. Udowodnić, że dla każdego naturalnego n

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n+1) (2n+1) \quad (42.3)$$

Rozwiązanie. Dowód indukcyjny, $n_0 = 1$.

1° Sprawdzamy, że równość (42.3) jest prawdziwa dla $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2 \cdot 1+1) = 1$$

2° Załóżmy, że równość (42.3) jest prawdziwa dla liczby naturalnej n . Do obu stron tej równości dodajemy $(n+1)^2$, więc

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

a następnie przekształcamy prawą stronę

$$\begin{aligned} \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 &= \frac{n+1}{6}[n(2n+1) + 6(n+1)] = \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

Stąd

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}[(n+1)+1] \cdot [2(n+1)+1]$$

Ta równość różni się od równości (42.3) tylko tym, że mamy w niej $n+1$ zamiast n . Dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest więc implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ oznacza równość (42.3). Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (42.3) jest więc prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n , cnd.

Przykład. Udowodnić, że dla każdego naturalnego n liczba

$$10^n - 4 \tag{42.4}$$

jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie. Dowód indukcyjny, $n_0 = 1$.

1° Dla $n = 1$ liczba $10^n - 4$ jest podzielna przez 6, ponieważ $10^1 - 4 = 6$ jest podzielne przez 6.

2° Załóżmy, że liczba $10^n - 4$ jest podzielna przez 6. Ponieważ

$$10^{n+1} - 4 = 10^{n+1} - 40 + 36 = 10 \cdot (10^n - 4) + 6 \cdot 6$$

więc liczba $10^{n+1} - 4$ jest także podzielna przez 6. Na podstawie zasady indukcji matematycznej liczba $10^n - 4$ jest zatem podzielna przez 6 dla każdego naturalnego n , cnd.

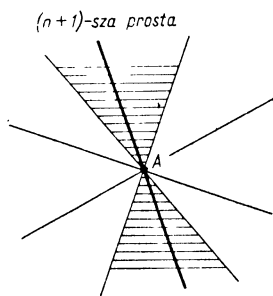
Przykład. Udowodnić, że n różnych prostych leżących na płaszczyźnie i przechodzących przez dany punkt P dzieli tę płaszczyznę na $2n$ części.

Rozwiązanie. Dowód indukcyjny, $n_0 = 1$.

1° Dla $n = 1$ twierdzenie jest prawdziwe, gdyż jedna prosta leżąca na płaszczyźnie i przechodząca przez punkt P dzieli tę płaszczyznę na 2 części, zaś $2 = 2 \cdot 1$.

2° Załóżmy, że przez punkt P przechodzi n różnych prostych leżących w jednej płaszczyźnie i że dzielą one tę płaszczyznę na $2n$ części. Poprowadźmy przez punkt P jeszcze jedną prostą leżącą w tej samej płaszczyźnie co poprzednie i różną od każdej

z nich. Ta $(n+1)$ -sza prosta dzieli tylko dwie spośród $2n$ części płaszczyzny, przy czym każdą z nich na 2 części. Liczba części, na które podzielona jest płaszczyzna wzrosła zatem o dwie (rys. 42-1) i wynosi $2n+2 = 2(n+1)$. Wynika stąd, że twier-



Rys. 42-1

dzenie jest prawdziwe dla liczby $n+1$. Na podstawie zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

Pytania i zadania

1. Podać zasadę indukcji matematycznej.
2. Co to jest krok indukcyjny?
- 3*. Udowodnić że dla każdej liczby naturalnej

a) $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$,

c) $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2 = \frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)$,

d) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n\cdot(n+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$,

e) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

f) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$,

g) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$,

h) $1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3 = n^3(2n^2-1)$.

4. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

- a) liczba 3 jest dzielnikiem liczby 7^n-1 ,
- b) liczba 9 jest dzielnikiem liczby $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$,
- c) liczba 9 jest dzielnikiem liczby 10^n-1 .

5. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N} - \{2, 3, 4\}$ prawdziwa jest nierówność $2^n > n^2$.

6*. Udowodnić indukcyjnie, że równanie algebraiczne n -tego stopnia ma co najwyżej n pierwiastków.

43. Permutacje

Silnia. Niech n oznacza liczbę naturalną lub zero.

Symbol $n!$ (czytamy: n silnia) oznacza liczbę 1, gdy $n = 0$ lub $n = 1$, natomiast oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n włącznie, gdy $n \geq 2$. Mamy zatem

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad 1! \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \text{oraz} \quad n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad \text{gdy} \quad n \geq 2 \quad (43.1)$$

Na przykład

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$$

$$10! = 3\,628\,800,$$

$$\frac{5!}{2! \, 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10,$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} = n(n+1), \quad (n \geq 2)$$

Permutacje. Niech będzie dany zbiór n różnych elementów. Jeżeli te elementy *uporządkujemy* nadając im określoną kolejność, czyli ustawimy je w *ciąg*, to powiemy, że utworzyliśmy *permutację* tego zbioru.

Definicja. *Permutacja zbioru n -elementowego*, jest to każdy ciąg n -wyrazowy utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Na przykład można utworzyć dwie permutacje zbioru $\{a, b\}$, a mianowicie

$$(a, b) \quad \text{oraz} \quad (b, a)$$

sześć permutacji zbioru $\{a, b, c\}$

$$(a, b, c); \quad (a, c, b); \quad (c, a, b)$$

$$(b, a, c); \quad (b, c, a); \quad (c, b, a)$$

itd.

Liczbę permutacji zbioru n -elementowego oznaczamy P_n . Udowodnimy indukcyjnie, że dla każdego naturalnego n

$$P_n = n! \quad (43.2)$$

Dla $n = 1$ mamy tylko jedną permutację, a ponieważ $1! = 1$, więc $P_1 = 1$ i wzór (43.2) jest w tym przypadku prawdziwy. Załóżmy, że wzór (43.2) jest prawdziwy dla liczby n . Zauważmy, że $(n+1)$ -szy element można dołączyć do każdej z rozpatrywanych $n!$ permutacji na $(n+1)$ różnych sposobów: przed pierwszym elementem,

między pierwszym a drugim, ..., wreszcie — po n -tym elemencie. Liczba P_{n+1} jest więc $(n+1)$ razy większą od liczby P_n . Stąd

$$P_{n+1} = P_n \cdot (n+1) = n!(n+1) = (n+1)!, \quad \text{cnd.}$$

Przykład. W biegu bierze udział 8 zawodników. W ilu różnych kolejnościach mogą oni przybyć na metę?

Rozwiązanie. Różnych kolejności na mecie może być tyle, ile jest permutacji zbioru 8-elementowego, czyli

$$P_8 = 8! = 40\,320$$

Odp. 40 320.

Przykład*. Iloa sposobami można rozmieścić 8 osób przy okrągłym stole? Dwa rozmieszczenia, w których każdy ma tych samych sąsiadów, uważamy za jednakowe.

Rozwiązanie. Oznaczamy przez Q_n liczbę różnych rozmieszczeń n osób przy okrągłym stole. Mamy oczywiście $Q_1 = 1$ i $Q_2 = 1$. Udowodnimy indukcyjnie, że $Q_n = P_{n-1}$, dla $n \geq 2$. Dla $n = 2$ równość jest prawdziwa, gdyż $Q_2 = 1$ i $P_1 = 1$. Z kolei założmy, że dla pewnego $n \geq 2$ mamy $Q_n = P_{n-1}$. Jeżeli przy stole rozmieszczonych jest n osób, to $(n+1)$ -szą osobę można do nich dosadzić na n różnych sposobów, gdyż tyle jest miejsc między sąsiadującymi przy stole. Stąd

$$Q_{n+1} = n \cdot Q_n = n \cdot P_{n-1} = P_n$$

co kończy dowód indukcyjny. Ostatecznie $Q_8 = P_7 = 7! = 5040$.

Odp. 5040.

Przykład. Liczba permutacji zbioru $(n+1)$ -elementowego jest 20 razy większa od liczby permutacji zbioru $(n-1)$ -elementowego. Obliczyć liczbę permutacji zbioru $(n+2)$ -elementowego.

Rozwiązanie. Z warunków zadania mamy

$$P_{n+1} = 20 \cdot P_{n-1}$$

więc $(n+1)! = 20(n-1)!$ czyli $(n+1)n(n-1)! = 20(n-1)!$. Dzieląc obie strony równania przez $(n-1)!$ otrzymujemy równanie kwadratowe $n^2 + n - 20 = 0$. Stąd $n = 4$ (pierwiastek ujemny -5 odrzucamy), więc $n+2 = 6$ i ostatecznie $P_6 = 720$.

Odp. 720.

Pytania i zadania

1. Podać określenie symbolu $n!$ dla $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.
2. Co to jest *permutacja* zbioru n -elementowego?
3. Obliczyć $n!$ dla n od 1 do 10 włącznie.
4. Obliczyć

$$\text{a) } \frac{5!6!}{7!}, \quad \text{b) } \frac{8!}{5!3!}, \quad \text{c) } \frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}, \quad \text{d) } \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}.$$

5*. Udowodnić indukcyjnie, że

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

6. Ile liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć z cyfr 3, 5, 6 i 8?

7. Iloma sposobami można ustawić w szeregu 12-tu żołnierzy?

8. Wiadomo, że $P_{n+2} = 30 \cdot P_n$. Obliczyć n

44. Kombinacje

Symbol Newtona. Niech n oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, zaś k — liczbę naturalną lub zero. *Symbol Newtona* $\binom{n}{k}$ — czytamy „ n po k ” lub „ n nad k ” — oznacza liczbę określoną wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \quad (44.1)$$

gdy $k \geq 1$, zaś liczbę 1 gdy $k = 0$.

Na przykład

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} = -\frac{5}{16}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Symbole Newtona spełniają następujący warunek

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (44.2)$$

Istotnie, korzystając z określenia (44.1) dostajemy

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} + \\ &+ \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n+1)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

dla $k \geq 1$, zaś dla $k = 0$ po obu stronach równości (44.2) mamy $1+n$.

Jeżeli n jest liczbą całkowitą nie mniejszą od k , to mnożąc licznik i mianownik po prawej stronie wzoru (44.1) przez $(n-k)!$, dostajemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (44.3)$$

Ten wzór jest prawdziwy także dla $k = 0$.

Przykłady

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1, \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10, \quad \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1,$$

$$\binom{10}{0} = \frac{10!}{0!10!} = 1$$

Jeżeli $n \in \mathbb{C}$ i $n \geq k$, to

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (44.4)$$

ponieważ na podstawie wzoru (44.3) mamy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}$$

Trójkąt Pascala. Ustawmy wartości symbolu Newtona w tabelę mającą kształt trójkąta

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ & & & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \dots & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \end{array} \quad (44.5)$$

zwaną *trójkątem Pascala* i zauważmy, że każdy element stojący wewnątrz tej tabeli jest sumą najbliższych dwóch elementów znajdujących się nad nim. Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{n} = 1$$

więc każdy wyraz skrajny w trójkącie Pascala jest równy 1. Zamiast (44.5) można zatem napisać

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \dots & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \end{array} \quad (44.6)$$

Dzięki równości (44.2) łatwo jest odtworzyć trójkąt Pascala z pamięci.

Kombinacje. Niech będzie dany zbiór n różnych elementów i niech $k \in \mathbf{N}$ oraz $k \leq n$.

Definicja. *Kombinacja k -elementowa* zbioru n elementów jest to każdy k -elementowy podzbiór zbioru n elementów.

Dwie kombinacje są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym elementem.

Na przykład ze zbioru o trzech elementach $\{a, b, c\}$ można utworzyć trzy kombinacje jednoelementowe: $\{a\}$, $\{b\}$, oraz $\{c\}$, trzy kombinacje dwuelementowe: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, oraz $\{b, c\}$, oraz jedną kombinację trójelementową $\{a, b, c\}$, która jest identyczna z danym zbiorem.

Liczbę kombinacji k -elementowych zbioru n elementów oznaczamy symbolem C_n^k .

Udowodnimy, że

$$C_n^k = \binom{n}{k} \quad (44.7)$$

Dowód (indukcyjny ze względu na k , przy ustalonym n).

Dla $k = 1$ wzór (44.7) jest prawdziwy, ponieważ

$$C_n^1 = n \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

Krok indukcyjny. Załóżmy, że dla pewnej liczby naturalnej $k < n$ wzór (44.7) jest prawdziwy. Rozważmy zbiór kombinacji $(k+1)$ -elementowych, który powstaje przez dołączenie do każdej z istniejących kombinacji k -elementowych jednego z pozostałych $n-k$ elementów. Kombinacji takich będzie

$$(n-k) \cdot C_n^k$$

lecz nie wszystkie z nich będą różne. Istotnie, każda kombinacja $(k+1)$ -elementowa powtarza się $(k+1)$ razy, ponieważ każdy jej element był dołączany do kombinacji k pozostałych elementów. Stąd

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!}$$

więc ostatecznie

$$C_n^{k+1} = \binom{n}{k+1}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Przykład. Na ile sposobów można wybrać 6 liczb spośród 49 różnych liczb? (Toto — lotek).

Rozwiązanie. Należy obliczyć liczbę kombinacji 6-o elementowych zbioru 49 liczb

$$C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

· Odp. 13 983 816.

Przykład. Obliczyć liczbę potrzebnych linii lotniczych, jeżeli 15 miast ma mieć bezpośrednie połączenie.

Rozwiązanie. Należy obliczyć liczbę kombinacji 2-elementowych zbioru 15 elementów

$$C_{15}^2 = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2! 13!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$$

Odp. 105.

Przykład*. Ile jest czterocyfrowych numerów telefonicznych, w których wszystkie cyfry są różne?

Rozwiązanie. Obliczamy, na ile sposobów można wybrać 4 cyfry ze zbioru 10-ciu cyfr arabskich

$$C_{10}^4 = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! 6!} = 210$$

Zauważmy następnie, że każda z tych 210-ciu czterocyfrowych kombinacji dostarcza nam tyle różnych numerów telefonicznych, ile jest permutacji zbioru 4 elementów, a więc $4!$ czyli 24. Mnożąc $210 \cdot 24$ dostajemy odpowiedź na postawione pytanie.

Odp. 5040.

Pytania i zadania

1. Podać określenie symbolu Newtona.
2. Wymienić właściwości symbolu Newtona.
3. Co to jest trójkąt Pascala i jak się go buduje?
4. Podać określenie kombinacji k -elementowej zbioru n elementów. Ile jest takich kombinacji?
5. Obliczyć

$$\text{a) } \binom{8}{3}, \quad \text{b) } \binom{121}{120}, \quad \text{c) } \binom{n+3}{n}, \quad \text{d) } \binom{n+2}{n-2}.$$

6. Napisać trójkąt Pascala z elementami $\binom{n}{k}$, dla $0 \leq n \leq 8$.
7. Na ile sposobów można wybrać 3-osobową delegację spośród 10 osób?
- 8*. Rozwiązać równania:

$$\text{a) } C_{x-3}^2 = 21, \quad \text{b) } C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1).$$

- 9*. Wiadomo, że $C_n^{12} = C_n^8$. Obliczyć C_n^{19} .
- 10*. Iloma sposobami można wyznaczyć wartość składającą się z oficera i trzech żołnierzy spośród trzech oficerów i 80-ciu żołnierzy?
- 11*. Rozwiązać układ równań

$$\left. \begin{aligned} C_{x+1}^y &= \frac{5}{2}x \\ C_{x-1}^y &= 10 \end{aligned} \right\}$$

45. Wzór dwumianowy Newtona

Każdą naturalną potęgę dwumianu $(a+b)$ można wyrazić tzw. wzorem dwumianowym Newtona:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n \quad (45.1)$$

Dowód (za pomocą indukcji) pomijamy.

Sumę po prawej stronie równości (45.1) nazywamy *rozwinięciem* potęgi $(a+b)^n$ według wzoru Newtona.

Dla $n = 2$ oraz dla $n = 3$, otrzymujemy z równości (45.1) znane wzory

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

oraz

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Przykład.

$$\begin{aligned} (1-2x)^4 &= \binom{4}{0} \cdot 1 + \binom{4}{1} (-2x) + \binom{4}{2} (-2x)^2 + \binom{4}{3} (-2x)^3 + \\ &+ \binom{4}{4} (-2x)^4 = 1 + 4 \cdot (-2x) + 6 \cdot 4x^2 + \\ &+ 4 \cdot (-8x^3) + 1 \cdot 16x^4 = \\ &= 1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4 \end{aligned}$$

Przykład*. W rozwinięciu potęgi

$$\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^7 \quad (45.2)$$

znaleźć wyraz wprost proporcjonalny do x .

Rozwiązanie. Wyraz $(k+1)$ -szy w rozwinięciu potęgi (45.2) jest postaci

$$\binom{7}{k} (\sqrt[3]{x})^{7-k} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^k, \quad \text{czyli} \quad (-1)^k \binom{7}{k} \cdot \frac{1}{x^{7-2k}}$$

Na to, żeby ten wyraz był wprost proporcjonalny do x potrzeba i wystarcza, żeby $7-2k = 3$; stąd $k = 2$. Szukanym wyrazem rozwinięcia potęgi (45.2) jest więc

$$(-1)^2 \cdot \binom{7}{2} x, \quad \text{czyli} \quad 21x$$

Odp. $21x$.

Przykład*. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (45.3)$$

Rozwiązanie. Bierzemy pod uwagę wzór Newtona (45.1) i podstawiamy w nim $a = b = 1$. Stąd dostajemy równość (45.3).

1. Napisać wzór dwumianowy Newtona.
2. Napisać rozwinięcie potęgi
a) $(x-y)^4$, b) $(x+y)^5$, c) $(\sqrt{x}-1)^6$, d) $(x-3y)^5$.
3. Napisać trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia potęgi
a) $(1+x)^{14}$, b) $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5$.
- 4*. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

- 5*. W rozwinięciu $(1+\sqrt{x})^5$ znaleźć wyraz wprost proporcjonalny do x^2 .

46. Ciąg arytmetyczny

Definicja. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy *ciągiem arytmetycznym*, jeżeli istnieje taka liczba r , że dla każdego n (gdy ciąg jest nieskończony), zaś dla każdego $n \leq k-1$ (gdy ciąg jest skończony, k -wyrazowy, $k \geq 3$) spełniony jest warunek

$$a_{n+1} - a_n = r \quad (46.1)$$

Liczbę r nazywamy *różnicą* ciągu arytmetycznego.

Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy $r > 0$, natomiast malejący, gdy $r < 0$.

Przykłady ciągu arytmetycznego:

$$(1, 2, 3, 4) \quad a_1 = 1, \quad r = 1, \quad (k = 4)$$

$$(2, 5, 8, \dots) \quad a_1 = 2, \quad r = 3$$

$$(7, 5, 3, \dots) \quad a_1 = 7, \quad r = -2$$

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (46.2)$$

Dowód (indukcyjny) wzoru (46.2). Dla $n = 1$ wzór jest prawdziwy, gdyż po obu jego stronach mamy wówczas a_1 . Załóżmy, że wzór (46.2) jest prawdziwy dla pewnej liczby n ($n \leq k-1$, gdy ciąg jest k -wyrazowy). Zgodnie z warunkiem (46.1) mamy $a_{n+1} = a_n + r$, więc

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + [(n+1)-1]r, \quad \text{cnd.}$$

Liczyby a_1 i r określają ciąg arytmetyczny w zupełności.

Przykład. Wiadomo, że $a_1 = 3$ i $r = 2$. Obliczyć a_{1971} .

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (46.2)

$$a_{1971} = 3 + (1971-1) \cdot 2 = 3943$$

Odp. 3943.

Każdy wyraz ciągu arytmetycznego z wyjątkiem pierwszego (i gdy ciąg jest skończony — ostatniego) jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i wyrazu następnego:

$$a_n = \frac{1}{2} (a_{n-1} + a_{n+1}) \quad (46.3)$$

Istotnie, mamy

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)r, \quad a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$$

więc

$$\frac{1}{2} (a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{1}{2} [2a_1 + (2n-2)r] = a_1 + (n-1)r = a_n$$

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest następujący

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (46.4)$$

Dowód (indukcyjny). Dla $n = 2$ wzór jest prawdziwy, ponieważ

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot 2$$

Założmy, że wzór (46.4) jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej n ($n \leq k-1$ gdy ciąg jest k -wyrazowy) i rozważmy sumę S_{n+1}

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n + a_{n+1} = \\ &= \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n + 2(a_1 + nr)}{2} = \\ &= \frac{2a_1(n+1) + n(n+1)r}{2} = \frac{a_1 + (a_1 + nr)}{2} (n+1) = \\ &= \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} (n+1), \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

Wzory: (46.2), (46.3) oraz (46.4) stanowią podstawę do rozwiązywania wszelkich zagadnień związanych z ciągiem arytmetycznym.

Przykład. Obliczyć sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000.

Rozwiązanie. Liczby 1, 2, 3, ..., 1000 tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $a_1 = 1$, $n = 1000$, $a_{1000} = 1000$. Na podstawie wzoru (46.4) mamy

$$S_{1000} = \frac{1 + 1000}{2} \cdot 1000 = 500\,500$$

Odp. 500 500.

Przykład. Obliczyć sumę wszystkich liczb nieparzystych od 1 do 99.

Rozwiązanie. Liczby 1, 3, ..., 99 tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $a_1 = 1$, $n = 50$, $a_n = 99$, zatem

$$1 + 3 + \dots + 99 = S_{50} = \frac{1+99}{2} \cdot 50 = 2500$$

Odp. 2500.

Przykład*. Koszt robót przy drążeniu studni przedstawia się następująco: pierwszy metr głębokości kosztuje a zł, każdy następny o b zł drożej niż poprzedni. Obliczyć koszt budowy studni o głębokości 40 m.

Rozwiązanie. Koszty drążenia kolejnych metrów głębokości studni tworzą ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym $a_1 = a$ oraz różnicy ciągu $r = b$. Koszt całkowity wynosi więc

$$S_{40} = \frac{a + a + 39b}{2} \cdot 40 = 40a + 780b$$

Odp. $(40a + 780b)$ zł.

Przykład. Ósmy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 37, zaś wyraz jedenasty wynosi 52. Obliczyć wyraz dwudziesty.

Rozwiązanie. Z warunków przykładu mamy $a_8 = a_1 + 7r = 37$ oraz $a_{11} = a_1 + 10r = 52$. Traktując a_1 i r jako niewiadome, dostajemy układ równań

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 7r = 37 \\ a_1 + 10r = 52 \end{array} \right\}$$

Stąd $a_1 = 2$, $r = 5$, $a_{20} = 2 + 19 \cdot 5 = 97$.

Odp. 97.

Przykład. Między liczby 28 i 52 wstawić dwie liczby x i y takie, aby ciąg (28, x , y , 52) był ciągiem arytmetycznym.

Rozwiązanie. Ciąg (28, x , y , 52) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy różnice: $x - 28$, $y - x$ oraz $52 - y$ są równe. Należy więc rozwiązać układ dwóch równań

$$\left. \begin{array}{l} x - 28 = y - x \\ y - x = 52 - y \end{array} \right\} \quad \text{czyli} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y - 28 = 0 \\ x - 2y + 52 = 0 \end{array} \right\}$$

Odp. $x = 36$, $y = 44$.

Przykład*. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Przeciwnprostokątna wynosi 30 cm. Obliczyć długości przyprostokątnych.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez a długość krótszej przyprostokątnej. Długość dłuższej przyprostokątnej wynosi więc $a + r$, natomiast długość przeciwprostokątnej $a + 2r$. Z warunków przykładu mamy $a + 2r = 30$, natomiast z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + (a + r)^2 = (a + 2r)^2$, czyli $3r^2 + 2ar - a^2 = 0$. Niewiadome liczby a i r spełniają zatem następujący układ równań:

$$\left. \begin{array}{l} 3r^2 + 2ar - a^2 = 0 \\ a + 2r = 30 \end{array} \right\} \quad (46.5)$$

Wyznaczając z drugiego równania $a = 30 - 2r$ i podstawiając do pierwszego równania otrzymamy równanie kwadratowe $r^2 - 36r + 180 = 0$, którego pierwiastkami są liczby $r_1 = 6$, $r_2 = 30$. Stąd $a_1 = 18$, $a_2 = -30$. Układ (46.5) ma więc dwa rozwiązania: $a = 18$, $r = 6$, oraz $a = -30$, $r = 30$, z których drugie odrzucamy, gdyż długość boku nie może być ujemna.

Odp. 18 cm, 24 cm.

Przykład. W pewnym ciągu arytmetycznym $a_1 = 8$, $a_n = 83$, $S_n = 728$. Obliczyć n i różnicę r tego ciągu.

Rozwiązanie. Liczbę n obliczamy biorąc pod uwagę wzór (46.4)

$$n = \frac{2S_n}{a_1 + a_n} = \frac{2 \cdot 728}{8 + 83} = \frac{1456}{91} = 16$$

natomiast liczbę r obliczamy korzystając ze wzoru (46.2)

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{83 - 8}{16 - 1} = \frac{75}{15} = 5$$

Odp. $n = 16$, $r = 5$.

Przykład*. Udowodnić, że jeżeli liczby dodatnie a , b i c tworzą ciąg arytmetyczny, to liczby

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (46.6)$$

tworzą także ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie. Jeżeli ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny, to

$$b - a = c - b \quad (46.7)$$

Mamy następnie

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} &= \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \\ &= \frac{b - a}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} \end{aligned} \quad (46.8)$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} &= \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})} = \\ &= \frac{c - b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{b})} \end{aligned} \quad (46.9)$$

Z uwagi na warunek (46.7) różnice (46.8) i (46.9) są jednakowe, a zatem liczby (46.6) tworzą ciąg arytmetyczny, cnd.

Przykład. Obliczyć jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego, jeżeli suma jego n początkowych wyrazów $S_n = 3n^2 + 4n$.

Rozwiązanie. $a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 7$, $a_2 = S_2 - a_1 = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 7 = 13$.
Ponieważ $a_2 = a_1 + r$, więc $r = a_2 - a_1 = 13 - 7 = 6$. Stąd $a_{11} = a_1 + 10r = 7 + 10 \cdot 6 = 67$.

Odp. 67.

Przykład*. W pewnym ciągu arytmetycznym $a_m = n$, $a_n = m$ ($n \neq m$). Obliczyć a_p .

Rozwiązanie. Oznaczmy przez r niewiadomą różnicę ciągu. Z warunków przykładu $a_m - a_n = n - m$. Wobec (46.2) mamy

$$a_m - a_n = [a_1 + (m-1)r] - [a_1 + (n-1)r] = (m-n)r$$

stąd

$$n - m = (m - n)r$$

więc $r = -1$. Mamy następnie

$$a_p - a_n = (p - n)r = (p - n)(-1) = n - p$$

skąd ostatecznie $a_p = a_n + n - p = m + n - p$.

Odp. $m + n - p$.

Przykład.** Utworzyć ciąg arytmetyczny o następujących własnościach:

1° pierwszy wyraz ciągu jest 1, ostatni 31.

2° suma wszystkich wyrazów od drugiego do przedostatniego włącznie jest czterokrotnie większa od sumy dwóch największych spośród nich.

Rozwiązanie. Niech $x+2$ będzie liczbą wszystkich wyrazów szukanego ciągu. Mamy więc $31 = 1 + (x+1)r$, gdzie r jest różnicą ciągu. Stąd

$$r = \frac{30}{x+1} \quad (46.10)$$

Drugi wyraz ciągu

$$a_2 = 1 + \frac{30}{x+1} = \frac{x+31}{x+1}$$

natomiast przedostatni

$$a_{x+1} = 1 + \frac{30}{x+1} \cdot x = \frac{31x+1}{x+1}$$

Suma wszystkich wyrazów ciągu, poczynając od a_2 , a kończąc na a_{x+1} , równa jest

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x+31}{x+1} + \frac{31x+1}{x+1} \right) \cdot x = 16x$$

Ponieważ każdy następny wyraz szukanego ciągu jest większy od poprzedniego, co wynika ze wzoru (46.10), gdyż $r > 0$, więc dwoma największymi wyrazami spośród $a_2, a_3, \dots, a_x, a_{x+1}$ są a_x oraz a_{x+1} . Obliczamy sumę tych wyrazów

$$a_x + a_{x+1} = 1 + \frac{30}{x+1} (x-1) + 1 + \frac{30}{x+1} x = 2 + \frac{60x-30}{x+1} = \frac{62x-28}{x+1}$$

$$4 \frac{62x-28}{x+1} = 16x$$

stąd

$$2x^2 - 29x + 14 = 0$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{1}{2}$ oraz $x_2 = 14$. Pierwsze z nich odrzucamy, ponieważ liczba wyrazów ciągu jest z natury rzeczy całkowita. Jest zatem $x = 14$, a więc ciąg ma $x+2 = 16$ wyrazów. Wobec (46.10) różnica ciągu wynosi 2.

Odp. $a_1 = 1$, $r = 2$.

Pytania i zadania

1. Co to jest ciąg arytmetyczny? Podać przykłady.
2. Podać wzór na n -ty wyraz, oraz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
3. Obliczyć sumę 60 kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3, poczynając od liczby 12.
4. Wyraz ciągu arytmetycznego $a_3 = 7$, zaś $a_6 = 13$. Obliczyć a_1 i a_5 .
5. Obliczyć sumę dwustu początkowych wyrazów ciągu liczb nieparzystych.
6. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 10, piąty wyraz 28, a ostatni wyraz 58. Obliczyć wyraz pierwszy oraz liczbę wszystkich wyrazów tego ciągu.
7. Napisać trzy pierwsze wyrazy ciągu arytmetycznego, którego n -ty wyraz dany jest wzorem

$$\text{a) } a_n = \frac{3n-1}{6}, \quad \text{b) } a_n = \frac{5n+7}{3}, \quad \text{c) } a_n = \frac{8n-3}{5}.$$

8. Napisać trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, dla którego suma n początkowych wyrazów wynosi

$$\text{a) } S_n = 5n^2 + 3n, \quad \text{b) } S_n = 7n^2 - 5n, \quad \text{c) } S_n = 3n^2.$$

- 9*. Obliczyć liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego, jeżeli

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = 126$$

$$a_2 + a_{2n} = 42$$

- 10*. Wiadomo, że w pewnym ciągu arytmetycznym

$$\frac{S_m}{S_n} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Udowodnić, że

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

- 11*. Obliczyć sumę pierwszych stu liczb naturalnych, które dzielone przez 5 dają resztę 1.
- 12*. Znaleźć ciąg arytmetyczny, dla którego suma pierwszych trzech wyrazów wynosi 27, natomiast suma kwadratów tych trzech wyrazów wynosi 275.
- 13*. Udowodnić, że między sumami S_n , S_{2n} i S_{3n} odpowiednio n , $2n$ i $3n$ początkowych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego zachodzi związek

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$$

- 14*. Rozwiązać równanie

$$1 + 4 + 7 + \dots + x = 117$$

- 15*. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Obliczyć obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że jego pole wynosi 150 cm^2 .

47. Ciąg geometryczny

Definicja. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy *ciągiem geometrycznym*, jeżeli istnieje taka liczba $q \neq 0$, że dla każdego n (gdy ciąg jest nieskończony), zaś dla każdego $n \leq k-1$ (gdy ciąg jest k -wyrazowy, $k \geq 3$) spełniony jest warunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (47.1)$$

Liczbę q nazywamy *ilorazem* ciągu geometrycznego.

Z tej definicji wynika, że żaden wyraz ciągu geometrycznego nie może być równy zeru.

Przykłady

$$(1, 2, 4, 8, 16) \quad a_1 = 1, \quad q = 2, \quad (k = 5)$$

$$(1, 10, 100, 1000, \dots) \quad a_1 = 1, \quad q = 10$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right) \quad a_1 = 1, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$(-2, 4, -8, 16, \dots) \quad a_1 = -2, \quad q = -2$$

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (47.2)$$

Dowód (indukcyjny) wzoru (47.2). Dla $n = 1$ wzór jest prawdziwy, gdyż po obu jego stronach mamy wówczas a_1 (ponieważ $q \neq 0$, więc $q^0 = 1$). Załóżmy, że wzór (47.2) jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej n ($n \leq k-1$, gdyż ciąg jest k -wyrazowy). Zgodnie z warunkiem (47.1) mamy więc

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{(n+1)-1}, \quad \text{cnd.}$$

Liczby a_1 i q określają ciąg geometryczny w zupełności.

Przykład. Wiadomo, że pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wynosi 2, zaś iloraz równy jest 3. Obliczyć piąty i siódmy wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie. Wystarczy skorzystać ze wzoru (47.2):

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 162, \quad a_7 = 2 \cdot 3^6 = 1458.$$

Odp. $a_5 = 162$, $a_7 = 1458$.

Przykład. Dane są trzeci i piąty wyraz ciągu geometrycznego, $a_3 = \frac{20}{9}$, $a_5 = \frac{80}{81}$. Obliczyć pierwszy wyraz oraz iloraz tego ciągu.

Rozwiązanie. Ponieważ $a_3 = a_1 q^2$, $a_5 = a_1 q^4$, więc $\frac{a_5}{a_3} = q^2$, skąd

$$q^2 = \frac{80}{81} \cdot \frac{9}{20} = \frac{4}{9}, \quad q_1 = \frac{2}{3}, \quad q_2 = -\frac{2}{3}$$

Znając q obliczamy a_1 , mianowicie

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{a_5}{q^4} = \frac{20}{9} \cdot \frac{9}{4} = 5$$

$$\text{Odp. } a_1 = 5, \quad q = -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad a_1 = 5, \quad q = \frac{2}{3}$$

Przykład. Basen ma kształt prostopadłościanu. Długości krawędzi tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 3. Objętość basenu wynosi 729 m^3 . Obliczyć długości krawędzi basenu.

Rozwiązanie. Oznaczmy długość najkrótszej krawędzi przez x . Długości pozostałych są więc $3x$ i $9x$. Z warunków przykładu

$$x \cdot 3x \cdot 9x = 729$$

ponieważ objętość prostopadłościanu równa jest iloczynowi długości jego krawędzi; stąd $27x^3 = 729$, czyli $x^3 = 27$, a więc $x = 3$.

Odp. 3 m, 9 m, 27 m.

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest następujący

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{gdy } q \neq 1 \quad (47.3)$$

zaś

$$S_n = n \cdot a_1, \quad \text{gdy } q = 1 \quad (47.4)$$

Wzór (47.4) jest oczywisty, gdyż jeżeli $q = 1$, to $a_n = a_1$ dla każdego n , więc

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ składników}} = n \cdot a_1$$

Dowód (indukcyjny) wzoru (47.3). Dla $n = 2$ wzór jest prawdziwy, ponieważ

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q = a_1(1+q) = a_1 \frac{1-q^2}{1-q}$$

Założmy, że wzór (47.3) jest prawdziwy dla liczby naturalnej n ($n \leq k-1$, gdy ciąg jest k -wyrazowy) i rozważmy sumę S_{n+1} :

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} + a_1 q^n = a_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{cnd.}$$

Przykład. W ciągu geometrycznym $a_1 = 2$ i $a = 2$. Obliczyć sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (47.3)

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2 \frac{1-1024}{-1} = 2046$$

Odp. 2046.

Każdy wyraz ciągu geometrycznego (z wyjątkiem pierwszego i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) spełnia warunek

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad (47.5)$$

Istotnie, ponieważ

$$a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}, \quad a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

więc

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1^2 \cdot q^{2n-2} = (a_1 \cdot q^{n-1})^2 = a_n^2$$

Jeżeli wyrazy ciągu geometrycznego są *dodatnie*, to z równości (47.5) wynika równość

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad (47.6)$$

Każdy wyraz ciągu geometrycznego z wyjątkiem pierwszego (i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) o wyrazach dodatnich jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i wyrazu następnego.

Przykład*. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny wynosi 21. Liczby te, powiększone odpowiednio o 2, 3 i 9, utworzą ciąg geometryczny. Znaleźć te liczby.

Rozwiązanie. Oznaczamy szukane liczby przez x, y, z . Z warunków zadania mamy $y = x+r, z = x+2r$, skąd $x+y+z = 3x+3r = 21$, więc $x+r = 7$. Ponieważ powiedziano w przykładzie, że liczby $x+2, y+3$ i $z+9$, czyli liczby $x+2, x+r+3$ i $x+2r+9$ tworzą ciąg geometryczny, więc z uwagi na (47.5) spełniony jest związek $(x+r+3)^2 = (x+2)(x+2r+9)$, czyli $r^2+2r-5x-9 = 0$. W celu wyznaczenia x i r należy więc rozwiązać układ równań

$$\left. \begin{aligned} r^2+2r-5x-9 &= 0 \\ x+r &= 7 \end{aligned} \right\}$$

Układ ten ma dwa rozwiązania $x_1 = 18, r_1 = -11$, oraz $x_2 = 3, r_2 = 4$. Pierwszemu z tych rozwiązań odpowiada trójka liczb 18, 7, -4, drugiemu 3, 7, 11.

Odp. 18, 7, -4 lub 3, 7, 11.

Przykład*. Kopano studnię o głębokości 30 m. Za pierwszy metr głębokości zapłacono 54 zł, a za każdy następny o 5 zł 75 gr więcej niż za poprzedni. Ile kosztowało wykopanie studni? Czy zlecniodawcy opłaci się umowa następująca: za pierwszy metr głębokości zapłaci 1 grosz, a za każdy następny dwa razy tyle co za poprzedni?

Rozwiązanie. Z warunków przykładu wynika, że koszty kolejnych metrów głębokości tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $a_1 = 54, r = 5,75$ (w złotych).

Stąd

$$a_{30} = 54 + (30 - 1) \cdot 5,75 = 220,75$$

$$S_{30} = \frac{54 + 220,75}{2} \cdot 30 = 4125,25$$

Gdyby zleceniodawca przystał na drugi rodzaj umowy, to koszty kolejnych metrów głębokości tworzyłyby ciąg geometryczny, $a_n = 0,01 \cdot 2^{n-1}$. Podstawiając np. $n = 20$ otrzymamy

$$a_{20} = 0,01 \cdot 2^{19} = 0,01 \cdot 2^{10} \cdot 2^9 = 10,24 \cdot 512 = 5242,88$$

a więc koszt wykopania jednego tylko, dwudziestego metra, przekraczałby koszt wykopania całej studni przy umowie pierwszego rodzaju.

Odp. 4125 zł 25 gr; stanowczo nie opłaca się.

Przykład*. Długości boków trójkąta tworzą ciąg geometryczny. Jaki warunek musi spełniać iloraz q tego ciągu?

Rozwiązanie. Oznaczamy przez x, y, z długości boków trójkąta. Jeżeli x, y, z jest ciągiem geometrycznym, to $y = xq, z = xq^2$. Wiadomo, że suma długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości boku trzeciego. Na odwrót, jeżeli z trzech liczb dodatnich suma każdych dwóch jest większa od trzeciej, to liczby te są długościami boków pewnego trójkąta. Liczby x, xq i xq^2 są więc długościami boków trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy $x + xq > xq^2, x + xq^2 > xq$ oraz $xq + xq^2 > x$, a zatem gdy spełnione są jednocześnie nierówności następujące:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + q > q^2 \\ 1 + q^2 > q \\ q + q^2 > 1 \end{array} \right\} \quad \text{czyli} \quad \left. \begin{array}{l} q^2 - q - 1 < 0 \\ q^2 - q + 1 > 0 \\ q^2 + q - 1 > 0 \end{array} \right\} \quad (47.7)$$

Pierwsza z tych trzech nierówności jest spełniona, gdy

$$\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) < q < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$$

druga jest spełniona dla każdego q , trzecia zaś dla

$$q < -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \quad \text{lub} \quad q > -\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5})$$

Układ nierówności (47.7) jest więc spełniony, gdy

$$\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) < q < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \quad \text{i} \quad q > -\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5})$$

$$\text{Odp. } \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) < q < \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

Przykład*. Udowodnić, że suma odwrotności wszystkich wyrazów skończonego ciągu geometrycznego równa jest sumie jego wszystkich wyrazów podzielonej przez iloczyn pierwszego i ostatniego wyrazu.

Rozwiązanie. Rozważmy ciąg geometryczny

$$(a, aq, aq^2, \dots)$$

Obliczmy sumę odwrotności wyrazów tego ciągu

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} + \dots + \frac{1}{aq^{n-1}} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} \right) =$$

$$= \frac{q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1}{a \cdot q^{n-1}} = \frac{a + aq + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}}{a \cdot aq^{n-1}} = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_n}, \quad \text{cnd.}$$

Pytania i zadania

1. Co to jest ciąg geometryczny? Podać przykłady.
2. Podać wzory na n -ty wyraz, oraz na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.
- 3*. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny wynosi 26. Jeżeli do liczb tych dodać odpowiednio 1, 6 i 3, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Znaleźć te liczby.
- 4*. Między liczby 32 i 500 wstawić liczby x i y tak dobrane, aby ciąg (32, x , y , 500) był ciągiem geometrycznym.
- 5*. Dany jest ciąg geometryczny taki, że $a_1 + a_3 + a_5 = 21$, $a_3 - a_1 = 3$. Wyznaczyć ten ciąg.
- 6*. Znaleźć trzy liczby tworzące ciąg geometryczny, jeżeli suma tych liczb wynosi 21, natomiast suma ich odwrotności $\frac{7}{12}$.
- 7**. Obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu (1, 11, 111, ...).
- 8*. Znaleźć ciąg geometryczny o pięciu wyrazach, w którym suma trzech początkowych wyrazów wynosi 7, zaś suma trzech końcowych wyrazów jest równa 28.
- 9*. Znaleźć cztery liczby, z których pierwsze trzy tworzą ciąg geometryczny, natomiast ostatnie trzy — ciąg arytmetyczny. Suma liczb skrajnych wynosi 14, suma dwóch pozostałych wynosi 12.
- 10*. Dane są dwa ciągi: arytmetyczny i geometryczny. Dwa pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego są odpowiednio równe dwóm pierwszym wyrazom ciągu arytmetycznego. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest o 12 większy od trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest o 12 większy od pierwszego wyrazu ciągu geometrycznego. Znaleźć te ciągi.
- 11*. Długości krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny. Objętość prostopadłościanu wynosi 1000 cm^3 , a pole powierzchni wynosi 700 cm^2 . Obliczyć długości krawędzi.
- 12*. Dany jest układ równań

$$\left. \begin{aligned} x + 5y - z &= 5 \\ -2x + y + z &= 6m \\ x - y + z &= 4m + 1 \end{aligned} \right\}$$

Dla jakich wartości parametru m trójka liczb x, y, z stanowiąca rozwiązanie tego układu tworzy ciąg geometryczny?

13*. Z pięciu liczb trzy pierwsze tworzą ciąg geometryczny, zaś cztery ostatnie ciąg arytmetyczny. Suma czterech ostatnich liczb wynosi 20, a iloczyn drugiej i piątej wynosi 16. Znaleźć te liczby.

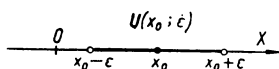
14*. Liczby x, y, z, u tworzą ciąg geometryczny. Wykazać, że

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (y^2 + z^2 + u^2) = (xy + yz + zu)^2$$

48. Granica ciągu nieskończonego

Bierzemy pod uwagę oś liczbową OX , na której znajduje się punkt x_0 ; niech ε oznacza liczbę dodatnią.

Przedział otwarty $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ nazywamy *otoczeniem* punktu x_0 i oznaczamy symbolem $U(x_0; \varepsilon)$. Liczbę ε nazywamy *promieniem* tego otoczenia. Rys. 48-1 przedstawia $U(x_0; \varepsilon)$.



Rys. 48-1

Z określenia przedziału otwartego wynika, że

$$x \in U(x_0; \varepsilon) \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \quad (48.1)$$

korzystając zaś z symbolu wartości bezwzględnej, można tę równoważność zanotować tak

$$x \in U(x_0; \varepsilon) \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon \quad (48.2)$$

W dalszych rozważaniach wygodnie nam będzie posłużyć się zwrotem: *prawie wszystkie wyrazy ciągu*. Zwrot ten odnosi się do ciągów nieskończonych i znaczy: *wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem co najwyżej skończonej ich liczby*.

Na przykład wszystkie liczby naturalne większe od miliona, to prawie wszystkie liczby naturalne. Natomiast wszystkie liczby naturalne złożone to nie prawie wszystkie liczby naturalne, gdyż liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Ciąg zbieżny do zera. Rozważmy ciąg $\left(-\frac{1}{n}\right)$, czyli

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \quad (48.3)$$

Zwróćmy uwagę na następującą właściwość tego ciągu: jego wyrazy różnią się od liczby 0 dowolnie mało, gdy tylko numery tych wyrazów są dostatecznie duże.

Na przykład

$$\frac{1}{n} < 0,1 \quad \text{gdy} \quad n > 10$$

$$\frac{1}{n} < 0,01 \quad \text{gdy} \quad n > 100$$

$$\frac{1}{n} < 0,001 \quad \text{gdy} \quad n > 1000$$

ogólnie, dla każdej liczby dodatniej ε mamy

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{dla każdego } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Powiemy, że liczba 0 jest *granica* ciągu (48.3).

Definicja. Liczbę 0 nazywamy *granica* ciągu (a_n) , jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ , że dla każdego $n > \delta$ spełniona jest nierówność

$$|a_n| < \varepsilon$$

Piszemy przy tym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (48.4)$$

(skrót *lim* pochodzi od łacińskiego słowa *limes* — granica). Równość (48.4) czytamy tak: *ciąg (a_n) ma granicę 0 lub a_n dąży do zera, gdy n dąży do nieskończoności.*

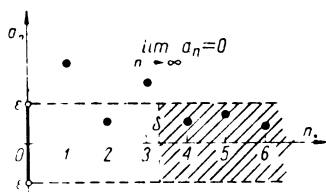
Mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} |a_n| < \varepsilon \quad (48.5)$$

Zgodnie z podaną definicją liczba 0 jest *granica* ciągu (48.3), ponieważ dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ , a mianowicie $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$, że dla każdego $n > \delta$ spełniona jest nierówność $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$ (można tu pisać $\frac{1}{n} < \varepsilon$, gdyż $\frac{1}{n}$ jest liczbą dodatnią).

Równość (48.4) oznacza, że do każdego otoczenia punktu 0 (tzn. do otoczenia $U(0; \varepsilon)$ gdzie ε jest dowolnie wybraną liczbą dodatnią), należą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) .

Ciąg nieskończony, który ma granicę 0, nazywamy *zbieżnym do zera*.



Rys. 48-2

Rys. 48-2 przedstawia interpretację geometryczną zbieżności ciągu nieskończonego do zera. Polega ona na tym, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ , że dla każdego $n > \delta$ punkt (n, a_n) leży w zakreskowanym pasku (tzw. pasek epsilonowy).

Ważnym przykładem ciągu zbieżnego do zera jest nieskończony ciąg geometryczny o n -tym wyrazie $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, w przypadku gdy q jest co do wartości bezwzględnej mniejsze od jedności:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot q^{n-1} = 0 \quad \text{dla} \quad |q| < 1 \quad (48.6)$$

Dowód tej równości pominiemy; stanie się ona w pełni zrozumiała, gdy odwołamy się do przykładów.

Dla $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$, mamy ciąg o wyrazach

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \quad \text{itd.}$$

Dla $a_1 = 4$, $q = -\frac{1}{2}$, mamy ciąg o wyrazach

$$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \quad \text{itd.}$$

Czytelnik zechce sporządzić wykresy tych dwóch ciągów i na tej podstawie nabrać przekonania o ich zbieżności do zera.

Podamy teraz kolejną definicję.

Definicja. Liczbę g nazywamy *granicą ciągu* (a_n) , jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - g) = 0$$

Piszemy przy tym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad (48.7)$$

i mówimy, że ciąg (a_n) *ma granicę* g (jest zbieżny do g) lub, że a_n *dąży do* g , gdy n *dąży do nieskończoności*.

Mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} |a_n - g| < \varepsilon \quad (48.8)$$

Przykład

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Granica ciągu stałego

$$(a, a, a, \dots)$$

jest liczba a .

Twierdzenie (o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów). *Jeżeli*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{ i } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad (48.9)$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad (48.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \quad (48.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \quad (48.12)$$

oraz przy dodatkowym założeniu, że dla każdego n jest $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (48.13)$$

Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Przykłady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n} \right) = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{n} = 2 + 3 \cdot 0 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1+0+0}{1-0+0} = 1$$

Twierdzenie (o zachowaniu nierówności). Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, oraz dla każdego n jest $a_n \geq 0$, to $a \geq 0$.

Nierówność *slaba* $a_n \geq 0$ zachowuje się więc po przejściu do granicy: $a \geq 0$. Zwracamy uwagę, że nierówność *mocna* $a_n > 0$ może się nie zachować po przejściu do granicy, o czym świadczy przykład:

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ jest } \frac{1}{n} > 0, \text{ natomiast } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Twierdzenie o zachowaniu nierówności pozostanie prawdziwe, jeżeli nierówność $a_n \geq 0$ zastąpimy przez $a_n \leq 0$ i nierówność $a \geq 0$ przez $a \leq 0$.

Ciągi rozbieżne do nieskończoności. Ciąg nieskończony, który nie ma granicy, nazywamy *rozbieżnym*.

Ciąg (a_n) nazywamy *rozbieżnym do nieskończoności* i piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad (48.14)$$

jeżeli dla każdej liczby M prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M .

Na przykład ciąg

$$2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$$

jest rozbieżny do nieskończoności:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

Ciąg (a_n) nazywamy *rozbieżnym do minus nieskończoności* i piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (48.15)$$

jeżeli dla każdej liczby M prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od M .

Na przykład ciąg

$$1, -1, -3, \dots, 3-2n, \dots$$

jest rozbieżny do minus nieskończoności, $\lim_{n \rightarrow \infty} (3-2n) = -\infty$.

Uwaga. Zamiast *ciąg rozbieżny do nieskończoności* mówimy także *ciąg ma granicę niewłaściwą nieskończoność*. Podobnie mówimy w przypadku granicy (48.15).

Prawdziwe są następujące dwie implikacje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0 \quad (48.16)$$

$$[(a_n > 0) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0)] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty \quad (48.17)$$

Przykłady

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = 0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n \cdot n^2| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-1)^n \cdot n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$
3. $\frac{1}{2n+(-1)^n} > 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+(-1)^n} = 0$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} [2n+(-1)^n] = \infty$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$

ponieważ dla każdej liczby M mamy $(\sqrt{n^2+1} + n) > M$ gdy $n > \frac{M}{2}$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} + n) = \infty$.

Pytania i zadania

1. Co to jest *otoczenie punktu* x_0 o promieniu ε ? Narysować otoczenie $U(2; 1)$.
2. Wyjaśnić znaczenie zwrotu: *prawie wszystkie wyrazy ciągu* i zilustrować go przykładami.
3. Co to znaczy, że liczba 0 jest *granicą* ciągu (a_n) ?
4. Dla jakich wartości ilorazu q ciąg geometryczny (a_1, q^{n-1}) jest zbieżny do zera?
5. Co to znaczy, że liczba g jest *granicą* ciągu (a_n) ?
6. Udowodnić na podstawie definicji, że

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{n} = 5, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n(n+1)} = 1,$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

7. Podać twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów.
8. Podać twierdzenie o zachowaniu nierówności.
9. Co to znaczy, że ciąg (a_n) jest rozbieżny a) do nieskończoności, b) do minus nieskończoności?

10. Udowodnić na podstawie definicji, że

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n} = \infty, \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2}{n} = -\infty.$$

11*. Obliczyć:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n^2 - n + 1)}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 1} - 2n),$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}, \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

12*. Zapisać określenie granic niewłaściwych (48.14) i (48.15), korzystając z kwantyfikatorów.

13. Dane są dwa ciągi: (a_n) i (b_n) , przy czym

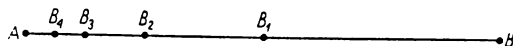
$$a) a_n = n, \quad b_n = \frac{1}{n}, \quad b) a_n = n^2, \quad b_n = \frac{1}{n}, \quad c) a_n = n, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

Zbadać zbieżność ciągu $(a_n \cdot b_n)$.

49. Szereg geometryczny

Zacniemy od przykładów, które wprowadzą Czytelnika w dalszy tok wykładu.

Przykład. Dany jest odcinek jednostkowy $\overline{AB}$ (rys. 49-1). Odcinek ten podzielmy punktem B_1 na połowy. Odcinek $\overline{AB_1}$ dzielimy następnie na połowy punktem B_2 . Odcinek $\overline{AB_2}$ dzielimy na połowy punktem B_3 , odcinek $\overline{AB_3}$ dzielimy na połowy punktem B_4 itd. Wskazany proces dzielenia można powtarzać dowolnie wiele razy. Mówimy, że proces ten jest *nieskończony*.



Rys. 49-1

Utwórzmy ciąg długości odcinków $\overline{AB}, \overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \overline{AB_3}, \dots$. Będzie to ciąg geometryczny nieskończony

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

o wyrazie pierwszym $a_1 = 1$ oraz ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

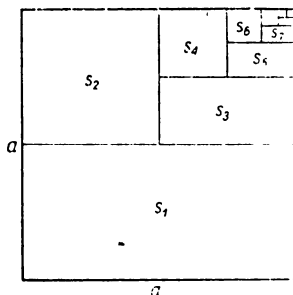
Przykład. Dany jest kwadrat o boku a . Kwadrat ten rozcięto na dwa prostokąty o równych polach. Jeden z tych prostokątów rozcięto następnie na dwa kwadraty, z których jeden rozcięto znowu na dwa prostokąty o równych polach itd. (rys. 49-2).

W ten sposób otrzymano ciąg figur, na przemian prostokątów i kwadratów, o polach

$$s_1 = \frac{1}{2} a^2, \quad s_2 = \frac{1}{4} a^2, \quad s_3 = \frac{1}{8} a^2, \dots$$

Ciąg pól

$$\left(\frac{a^2}{2}, \quad \frac{a^2}{4}, \quad \frac{a^2}{8}, \dots \right)$$



Rys. 49-2

jest ciągiem geometrycznym nieskończonym o wyrazie pierwszym $\frac{a^2}{2}$ oraz ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Przyjrzyjmy się uważnie rysunkowi 49-2. Dodając kolejno wyrazy ciągu ($s_1, s_2, s_3, \dots$), a więc obliczając sumy

$$S_2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2$$

$$S_3 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{7}{8} a^2$$

.....

$$S_n = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \dots + \frac{a^2}{2^n} = a^2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$$

.....

spostrzegamy, że gdy ilość składników sumy S_n wzrasta nieograniczenie, to suma ta różni się coraz to mniej od pewnej liczby, a mianowicie od a^2 (pole kwadratu o boku a). To spostrzeżenie można potwierdzić rachunkiem, a mianowicie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^2 - a^2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = a^2 - 0 = a^2$$

Skorzystaliśmy tu z równości (48.6) i (48.11).

Przejdziemy obecnie do rozważań ogólnych.

Bierzemy pod uwagę *ciąg geometryczny nieskończony* o wyrazach

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots, a_1 q^{n-1}, \dots \quad (49.1)$$

($a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$). Wiadomo (str. 212), że suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (49.2)$$

gdy $q \neq 1$, zaś $S_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$.

Ciąg (S_n)

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_1 q$$

$$S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1}$$

$$\dots\dots\dots$$

nazywamy *ciągami sum częściowych* ciągu (49.1) lub *szeregiem geometrycznym* i oznaczamy symbolem

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots \quad (49.3)$$

Jeżeli ciąg (S_n) ma granicę S , to tę granicę nazywamy *sumą nieskończonego ciągu geometrycznego* (49.1) lub *sumą szeregu geometrycznego* (49.3).

Wyrazy (49.1) nazywamy wyrazami szeregu (49.3).

Jeżeli szereg (49.3) ma sumę, to mówimy, że jest *zbieżny*. Szereg *rozbieżny* to taki, który nie jest zbieżny.

Szereg geometryczny (49.3) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$.

Udowodnimy, że warunek $|q| < 1$ jest *wystarczający* dla zbieżności szeregu (49.3). W tym celu bierzemy pod uwagę wzór (49.2) i zapiszemy go tak:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} \cdot q^n \quad (49.4)$$

Ciąg (S_n) można więc traktować jako *różnicę* dwóch ciągów, przy czym odjemna jest stała, zaś odjemnik — z uwagi na warunek $|q| < 1$ — dąży od zera, gdy $n \rightarrow \infty$ (por. (48.6)). Na podstawie twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów (wzór (48.11)) mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \quad (49.5)$$

czyli szereg (49.3) jest zbieżny i ma sumę

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \quad (49.6)$$

Z kolei udowodnimy, że warunek $|q| < 1$ jest *konieczny* dla zbieżności szeregu (49.3).

Jeżeli $q = 1$, to $S_n = n a_1$, więc ciąg (S_n) jest rozbieżny do ∞ gdy $a_1 > 0$, natomiast do $-\infty$ gdy $a_1 < 0$. Jeżeli $q = -1$, to $S_n = a_1$ gdy n jest nieparzyste, zaś $S_n = 0$ gdy n jest parzyste, więc w tym przypadku granica ciągu (S_n) także nie istnieje. Jeżeli wreszcie $|q| > 1$, to

$$|S_n| = \left| \frac{a_1}{1-q} \cdot (1 - q^{n+1}) \right|$$

a ponieważ $|q^{n+1}| \geq |q|^{n+1}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1} = \infty$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = \infty$, a zatem ciąg (S_n) jest rozbieżny.

Zamiast (49.6) możemy takżeisać

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots = \frac{a_1}{1-q} \quad (49.7)$$

gdy $|q| < 1$

Powracając do omawianego na początku tego punktu przykładu z dzieleniem kwadratu (rys. 49-2) możemy więc napisać

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \dots + \frac{a^2}{2^n} + \dots = \frac{\frac{a^2}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = a^2$$

Informacje o zbieżności szeregu geometrycznego ujmijemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie (o szeregu geometrycznym). *Szereg geometryczny*

$$a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots$$

jest zbieżny, gdy $|q| < 1$ i ma wówczas sumę

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

natomiast jest rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

Przykład. Zamienić ułamek dziesiętny okresowy $0,(34)$ na ułamek zwykły.

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{aligned} 0,(34) &= 0,34 + 0,0034 + 0,000034 + \dots = \\ &= 0,34 + 0,34 \cdot 0,01 + 0,34 \cdot (0,01)^2 + \dots = \\ &= \frac{0,34}{1-0,01} = \frac{34}{99} \end{aligned}$$

Odp. $\frac{34}{99}$.

W podobny sposób można zamienić na ułamek zwykły każdy okresowy ułamek dziesiętny.

Przykład. Zamienić ułamek okresowy $0,2(15)$ na ułamek zwykły.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} 0,2(15) &= 0,2 + 0,015 + 0,00015 + 0,0000015 + \dots = \\ &= 0,2 + \frac{0,015}{1-0,01} = \frac{1}{5} + \frac{15}{990} = \frac{71}{330} \end{aligned}$$

Odp. $\frac{71}{330}$.

Przykład. Sprawdzić, że ułamek dziesiętny skończony 0,21 i ułamek dziesiętny nieskończony $0,20(9) \dots$ przedstawiają tę samą liczbę.

Rozwiązanie

$$0,20(9) \dots = 0,20 + 0,009 + 0,0009 + \dots = 0,2 + \frac{0,009}{1-0,1} = 0,2 + 0,01 = 0,21$$

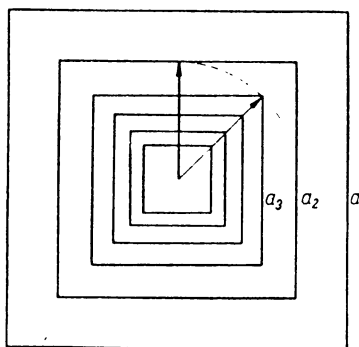
Przykład. W kwadrat o boku a wpisano koło. W to koło wpisano kwadrat, w który wpisano znowu koło itd. W ten sposób określony jest ciąg kwadratów. Obliczyć sumę pól wszystkich tych kwadratów.

Rozwiązanie. Niech

$$(a, a_2, a_3, \dots)$$

będzie ciągiem boków kolejnych kwadratów. Ponieważ promień koła wpisanego w n -ty kwadrat równy jest połowie przekątnej $(n+1)$ -go kwadratu (rys. 49-3), więc

$$a_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}, \quad a_4 = \frac{a_3}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \dots$$



Rys. 49-3

Ciąg pól kolejnych kwadratów

$$(a^2, a_2^2, a_3^2, \dots)$$

ma postać

$$\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \dots\right) \quad (49.8)$$

stanowi zatem ciąg geometryczny nieskończony o wyrazie pierwszym $a_1 = a^2$ i ilorazie $q = \frac{1}{2}$. Suma ciągu (49.8) wynosi

$$S = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2.$$

Odp. $2a^2$.

U w a g a. Szereg (49.3) rozpatruje się także, gdy $a_1 = 0$ lub $q = 0$. Szereg jest wówczas zbieżny i ma sumę a_1 .

Przykład. Dla jakiej wartości x suma szeregu geometrycznego

$$1 + x + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots \quad (49.9)$$

wynosi 3?

Rozwiązanie. Mamy $a_1 = q = 1+x$. Szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$, czyli gdy $-1 < 1+x < 1$, a więc gdy $-2 < x < 0$. Suma szeregu (49.9) wynosi wówczas

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{1+x}{1-(1+x)} = -\frac{1+x}{x}$$

Z warunków przykładu

$$-\frac{1+x}{x} = 3, \quad \text{czyli} \quad x = -\frac{1}{4}$$

Odp. $x = -\frac{1}{4}$.

Pytania i zadania

1. Co to jest szereg geometryczny?
2. Co to jest suma szeregu geometrycznego?
3. Podać twierdzenie o szeregu geometrycznym.
4. Podać przykład szeregu geometrycznego a) zbieżnego, b) rozbieżnego.
5. Obliczyć sumy szeregów:

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$,

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$,

c) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots$,

d) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots$,

e) $1 + \frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \frac{27}{125} + \dots$,

f) $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \dots$.

- 6*. W kwadrat o boku a wpisano koło, w koło to wpisano znowu kwadrat, w który wpisano koło itd. Obliczyć: a) sumę pól wszystkich wpisanych kół, b) sumę obwodów wszystkich kwadratów, c) sumę obwodów wszystkich kół.
- 7*. Dla jakiej wartości x suma ciągu nieskończonego

$$\left(1, \frac{2x}{1+x}, \frac{4x^2}{(1+x)^2}, \dots\right)$$

wynosi 5?

8. Zamienić na ułamki zwykłe

a) $0,11(6)$, b) $0,(27)$, c) $0,(1)$, d) $3,(17)$, e) $0,12(3)$.

9*. W kwadracie o boku a połączono środki sąsiednich boków. W powstałym kwadracie połączono znów środki sąsiednich boków itd. Obliczyć sumę obwodów utworzonego w ten sposób ciągu kwadratów.

10*. Dany jest kąt 60° . Wykreślono okrąg o promieniu R styczny do ramion tego kąta. Następnie wykreślono drugi okrąg, o mniejszym promieniu, styczny do pierwszego okręgu i do ramion kąta. W ten sam sposób wykreślono następne okręgi, o coraz to mniejszych promieniach, z których każdy styczny jest do okręgu poprzednio wykreślonego i do ramion kąta. Obliczyć: a) sumę obwodów wszystkich kół, b) sumę pól wszystkich kół.

11*. Dla jakich wartości x szereg geometryczny

$$1 + (x^2 - 3x + 1) + (x^2 - 3x + 1)^2 + \dots$$

jest zbieżny?

12*. Rozwiązać równanie

$$x - \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{8x} + \dots = 1$$

Odpowiedzi do rozdziału VII

41.

4. a) $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \dots$, b) $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \dots$,

c) $2, 0, 6, 0, \dots$, d) $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$.

43.

4. a) $\frac{120}{7}$, b) 56, c) $\frac{n}{n+2}$, d) $\frac{n+1}{n}$, 6. 24. 7. 477 945 600. 8. $n = 4$.

44.

5. a) 56, b) 121, c) $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$, d) $\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)$.

7. 120. 8*. a) 10, b) 9. 9*. 20. 10*. 246 480. 11*. (6, 3).

45.

2. a) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$, b) $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$,
c) $x^3 - 6x^2\sqrt{x} + 15x^2 - 20x\sqrt{x} + 15x - 6\sqrt{x} + 1$, d) $x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$. 3. a) $1 + 14x + 91x^2$, b) $1 + 1 + 0,4$. 5*. $5x^2$.

46.

3. 6030. 4. $a_1 = 3$, $a_5 = 11$. 5. 40 000. 6. $a_1 = 4$, $n = 10$. 8. a) 8, 18, 28.
b) 2, 16, 30, c) 3, 9, 15. 9*. $n = 6$. 11*. 25 350. 12*. $a_1 = 5$, $r = 4$. 14*. 25
15*. 60 cm.

3*. 2, 6, i 18; mogą one tworzyć ciąg (2, 6, 18) lub ciąg (18, 6, 2). 4*. $x = 80$, $y = 200$. 5*. $a_1 = 3$, $q = \sqrt{2}$ lub $a_1 = 3$, $q = -\sqrt{2}$ lub $a_1 = 1$, $q = 2$ lub $a_1 = 1$, $q = -2$. 6*. 3, 6, 12; mogą one tworzyć ciąg (3, 6, 12) lub ciąg (12, 6, 3). 7*. $S_n = \frac{1}{9} \left[\frac{10}{9} (10^n - 1) - n \right]$. 8*. (1, 2, 4, 8, 16) lub $\left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{28}{3}, -\frac{56}{3}, \frac{112}{3} \right)$. 9*. (2, 4, 8, 12) lub (12,5; 7,5; 4,5; 1,5). 10*. Ciąg arytmetyczny: (3, 9, 15, ...); ciąg geometryczny: (3, 9, 27, ...). 11*. 5 cm, 10 cm, 20 cm. 12*. $m = 0$ lub $m = 3$. 13*. 1, 2, 4, 6, 8 lub $\frac{32}{3}$, 8, 6, 4, 2.

48.

11*. a) 2, b) 0, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{3}$. 12*. a) $\bigwedge_M \bigvee_\delta \bigwedge_{n>\delta} a_n > M$, b) $\bigwedge_M \bigvee_\delta \bigwedge_{n>\delta} a_n < M$. 13. a) granica 1, b) rozbieżny do ∞ , c) granica 0.

49.

5. a) $\frac{3}{2}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $2 + \sqrt{2}$, d) $2 - \sqrt{2}$, e) $\frac{5}{2}$, f) $\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)$. 6*. a) $\frac{\pi}{2} a^2$, b) $4(2 + \sqrt{2})a$, c) $\pi(2 + \sqrt{2})a$. 7*. $x = \frac{2}{3}$. 8. a) $\frac{7}{60}$, b) $\frac{3}{11}$. c) $\frac{1}{9}$, d) $\frac{314}{99}$, e) $\frac{37}{300}$. 9*. $4(2 + \sqrt{2})a$. 10*. a) $3\pi R$, b) $\frac{9}{8}\pi R^2$. 11*. $0 < x < 1$ lub $2 < x < 3$. 12*. $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$.

Rozdział VIII

FUNKCJA POTĘGOWA, WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA

50. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Znamy już pojęcie potęgi o wykładniku *naturalnym* lub *zerowym*. Wiemy, że podstawowe prawa działań na potęgach wyrażają następujące wzory

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ a^m : a^n &= a^{m-n}, \quad \text{dla } m \geq n \text{ i } a \neq 0 \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{dla } b \neq 0. \end{aligned} \tag{50.1}$$

oraz

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Obecnie uogólnimy pojęcie potęgi.

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \neq 0$. Określamy:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{50.2}$$

Przykłady

$$3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad (1/2)^{-2} = \frac{1}{(1/2)^2} = \frac{1}{1/4} = 4, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{1/8} = 8$$

$$a^2 \cdot a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}, \quad (a \neq 0),$$

$$\left(\frac{1}{x} : x^{-2}\right) \cdot x^{-1} = \left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) \cdot \frac{1}{x} = 1, \quad (x \neq 0)$$

Potęga o wykładniku będącym odwrotnością liczby naturalnej. Niech $n \in \mathbf{N}$ oraz $a \geq 0$. Określamy:

$$a^{\frac{1}{n}} \text{ df } \sqrt[n]{a} \quad (50.3)$$

Zgodnie z powyższą definicją i definicją pierwiastka arytmetycznego potęga $a^{\frac{1}{n}}$ jest liczbą nieujemną, która spełnia równanie $x^n = a$.

Przykłady

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}, \quad \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$$

Potęga o wykładniku wymiernym. Niech $m \in \mathbf{N}$ i $n \in \mathbf{N}$. Określamy:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &\text{ df } \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \quad \text{dla } a \geq 0 \\ a^{\frac{m}{n}} &\text{ df } \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-m}, \quad \text{dla } a > 0 \end{aligned} \quad (50.4)$$

Dla potęg o dodatnich podstawach i wymiernych wykładnikach zachowują się prawa działań wyrażone wzorami (50.1). Warunek $m \geq n$ podany po drugim z tych wzorów należy przy tym pominąć:

Przykłady

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9, \quad 100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10},$$

$$\begin{aligned} 0^{\frac{1}{3}} &= 0, \quad 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2}} = \\ &= 2^{\frac{19}{6}} = 2^{3\frac{1}{6}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 8\sqrt[6]{2} \\ 3^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{2}} &= 3^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \end{aligned}$$

Przykład**

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[3]{2}} &= \left[2 \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[2 \cdot \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = \\ &= \left(2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{2^5} = \sqrt[9]{32} \\ \sqrt[3]{3} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{-\frac{1}{2}} &= 3^0 \cdot 9^0 = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Przykład.** Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left[\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 5b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right)\right] : (2a + 3\sqrt{ab})$$

dla $a = 54$, $b = 6$.

Rozwiązanie. Wykonujemy działania w nawiasie kwadratowym

$$\begin{aligned} & \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 5b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right) = \\ & = a + 6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 5b - (a - 4b) = 6\sqrt{ab} + 9b \end{aligned}$$

Upraszczamy następnie obliczane wyrażenie

$$\frac{6\sqrt{ab} + 9b}{2a + 3\sqrt{ab}} = \frac{3\sqrt{b}(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})}{\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})} = 3\sqrt{\frac{b}{a}}$$

wreszcie podstawiamy $a = 54$, $b = 6$.

Odp. 1.

Przykład.** Uprościć wyrażenie

$$Z = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + R^2 \frac{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(R^2 - x^2) \left[1 + \left(\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x} \right)^{-2} \right]}$$

Rozwiązanie. Oznaczając $u = \sqrt{R^2 - x^2}$ mamy

$$\begin{aligned} Z &= u - \frac{x^2}{u} + R^2 \frac{u + \frac{x^2}{u}}{u^2 \left(1 + \frac{x^2}{u^2} \right)} = \frac{u^2 - x^2}{u} + R^2 \frac{u^2 + x^2}{u(x^2 + u^2)} = \\ &= \frac{u^2 - x^2}{u} + \frac{R^2}{u} = \frac{R^2 - x^2 - x^2 + R^2}{u} = \frac{2(R^2 - x^2)}{u} = 2u \end{aligned}$$

Odp. $2\sqrt{R^2 - x^2}$.

Potęga o wykładniku niewymiernym. Potęgę a^r można określić w przypadku gdy $a > 0$ i r jest liczbą niewymierną. Ideą przewodnią tej definicji jest myśl, żeby wykładnik niewymierny zastąpić jego wymiernym przybliżeniem. Omówimy to określenie na przykładzie potęgi $5^{\sqrt{2}}$.

Bierzemy pod uwagę dwa ciągi przybliżeń dziesiętnych liczby $\sqrt{2}$; jeden z niedomiarem:

$$(1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \dots)$$

drugi z nadmiarem:

$$(1,5, \quad 1,42, \quad 1,415, \quad 1,4143, \dots)$$

Pierwszemu z tych ciągów odpowiada ciąg potęg

$$(5^{1,4}, \quad 5^{1,41}, \quad 5^{1,414}, \quad 5^{1,4142}, \dots) \quad (50.5)$$

natomiast drugiemu — ciąg potęg

$$(5^{1,5}, \quad 5^{1,42}, \quad 5^{1,415}, \quad 5^{1,4143}, \dots) \quad (50.6)$$

Wyrazy tych obu ciągów są potęgami o wykładnikach wymiernych; są one określone pierwszym z wzorów (50.4). Można udowodnić, że zbiór wyrazów ciągu (50.5)

ma kres górny, który jest jednocześnie kresem dolnym zbioru wyrazów ciągu (50.6). Wspólną wartość obu tych kresów przyjmujemy z definicji za potęgę $5^{1/2}$.

Analogicznie określa się potęgę przy każdej dodatniej podstawie i każdym niewymiernym wykładniku.

Potęga a^x jest więc określona dla każdego $a > 0$ i dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Ponadto okazuje się celowe przyjęcie umowy, że

$$0^x = 0, \quad \text{dla każdego } x > 0 \quad (50.7)$$

Można udowodnić, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$, to wzory (50.1) są prawdziwe dla wszelkich rzeczywistych wykładników m i n .

Przykłady

$$5^{2-1/2} \cdot 25^{\frac{1}{2} \cdot 1/2} = 5^{2-1/2} \cdot 5^{1/2} = 5^2 = 25$$

$$3\sqrt[4]{8} \cdot 9\sqrt[4]{2} = 32\sqrt[4]{2} : 32\sqrt[4]{2} = 3^0 = 1$$

Twierdzenie (o porównywaniu potęg). Jeżeli $y < x$, to

$$a^y > a^x, \quad \text{dla } 0 < a < 1 \quad (50.8)$$

oraz

$$a^y < a^x, \quad \text{dla } a > 1 \quad (50.9)$$

Dowód pomijamy. Zwracamy uwagę, że dla $a = 1$ mamy $1^x = 1^y = 1$ dla każdego x i dla każdego y .

Wniosek. Podstawiając $y = 0$ do nierówności (50.8) dostajemy

$$a^x < 1, \quad \text{dla } 0 < a < 1 \quad \text{i} \quad x > 0$$

Ten rezultat można rozszerzyć na przypadek, gdy $a = 0$ i $x > 0$, gdyż z uwagi na (50.7) mamy $0^x < 1$. Stąd

$$a^x < 1, \quad \text{dla } 0 \leq a < 1 \quad \text{i} \quad x > 0 \quad (50.10)$$

Podstawiając $y = 0$ do nierówności (50.9), dostajemy

$$a^x > 1, \quad \text{dla } a > 1 \quad \text{i} \quad x > 0$$

Pytania i zadania

1. Podać określenie potęgi a) a^{-n} , gdy $n \in \mathbf{N}$, $a \neq 0$,

b) $a^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbf{N}$, $a \geq 0$, c) $a^{\frac{m}{n}}$, $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, $a \geq 0$,

d) $a^{-\frac{m}{n}}$, $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, $a > 0$.

2. Podać sposób określenia potęgi o wykładniku niewymiernym.

3. Obliczyć:

$$\text{a) } \frac{6^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{0,75} \cdot 2^{-0,75}}{3\sqrt[4]{2}}, \quad \text{b) } \left(2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 6\left(1 + 2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\text{c) } \left(5^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{2}{3}}\right)^3, \quad \text{d) } \left(4^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}}\right)^4$$

4. Uprościć wyrażenia:

$$a) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (\sqrt{x} - \sqrt{y}), \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0),$$

$$b) \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{x^4} + 1 \right) \left(\frac{1}{x^8} + 1 \right) \left(\frac{1}{x^8} - 1 \right), \quad (x \geq 0),^*$$

$$c) \frac{2x-3y}{\sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{3y}} \quad (x > 0, \quad y > 0),$$

$$d) \sqrt[4]{(x^2+x^{-2})^2+8(x^2+x^{-2})+16} \quad (x > 0).$$

5*. Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left[\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}} \right]^{-2} \quad \text{dla} \quad x = a \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2mn}}$$

$$a > 0; \quad n > m > 0$$

6**. Obliczyć wartość wyrażenia

$$\left(\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x} \right)^2 - 4a^2 \cdot \sqrt[m \cdot n]{x^{m+n}} \quad \text{dla} \quad x = (a + \sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$$

$$a > 1; \quad m \neq n, \quad m \in \mathbf{N}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

51. Funkcja potęgowa

Definicja. Funkcję

$$y = x^r \tag{51.1}$$

gdzie r oznacza liczbę rzeczywistą, nazywamy *funkcją potęgową* o wykładniku r .

Na przykład

$$y = x^2, \quad y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y = x^{\frac{1}{3}}, \quad \text{czyli} \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = x^{-2}, \quad \text{czyli} \quad y = \frac{1}{x^2}$$

są to funkcje potęgowe.

Dziedzina funkcji (51.1) zależy od wykładnika potęgi r .

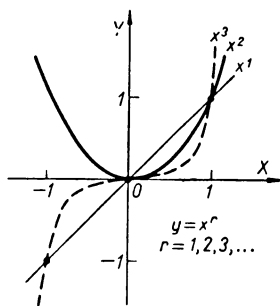
Jeżeli $r \in \mathbf{C}$, to dziedziną funkcji potęgowej jest zbiór $\mathbf{R}$, gdy $r \geq 0$, zaś zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$, gdy $r < 0$. Jeżeli $r \in \mathbf{R} - \mathbf{C}$, to tą dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ dla $r > 0$, zaś $\mathbf{R}_+$ dla $r < 0$.

Jeżeli $r > 0$, to funkcja (51.1) jest rosnąca w przedziale $< 0; +\infty$). Istotnie, jeżeli $0 \leq x_1 < x_2$, to $0 \leq \frac{x_1}{x_2} < 1$, więc na podstawie wniosku z twierdzenia o porównywaniu potęg (str. 232) mamy $\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^r < 1$, czyli $x_1^r < x_2^r$.

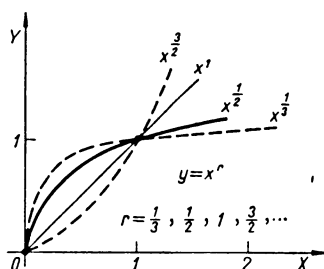
W przypadku wykładników naturalnych funkcja potęgowa jest parzysta, gdy r jest liczbą parzystą, zaś nieparzysta, gdy r jest liczbą nieparzystą.

Na rys. 51-1 i rys. 51-2 przedstawione są wykresy kilku funkcji potęgowych o wykładnikach dodatnich.

Uwaga. Wykres funkcji $y = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, sporządzamy zazwyczaj w ten sposób, że na wstępie szkicujemy łatwiejszy do wykonania wykres $y = x^n$ dla $x \geq 0$, a nas-



Rys. 51-1



Rys. 51-2

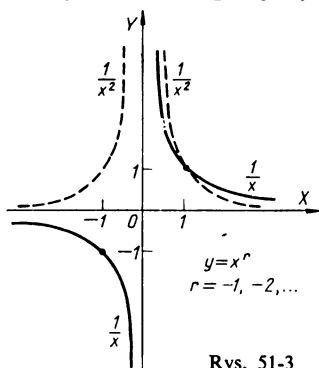
ępnie znajdujemy linię symetryczną do tego wykresu względem prostej $y = x$. Linia ta jest szukanym wykresem funkcji $y = x^{\frac{1}{n}}$, gdyż symetryczne odbicie względem prostej $y = x$ odpowiada zastąpieniu x przez y i y przez x , prowadzi więc od warunków $y = x^n$ i $x \geq 0$, do warunków $x = y^n$ i $y \geq 0$, czyli do wzoru $y = x^{\frac{1}{n}}$.

Jeżeli $r = 0$, to funkcja (51.1) ma stałą wartość 1 w swej dziedzinie $\mathbb{R}$ (w punkcie 0 nadajemy jej wartość 1 — patrz str. 157).

Jeżeli $r < 0$, to funkcja (51.1) jest malejąca w przedziale $(0; +\infty)$. Istotnie, jeżeli $0 < x_1 < x_2$, to $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$, więc na podstawie wniosku z twierdzenia o porównywaniu potęg mamy $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-r} < 1$, czyli $x_1^{-r} > x_2^{-r}$.

W przypadku gdy r jest liczbą całkowitą i ujemną, funkcja potęgowa jest parzysta, gdy $(-r)$ jest liczbą parzystą, zaś nieparzysta, gdy $(-r)$ jest liczbą nieparzystą.

Na rys. 51-3 podane są wykresy funkcji potęgowych o wykładnikach ujemnych.



Rys. 51-3

1. Co to jest funkcja potęgowa?
2. Podać, jaka jest dziedzina funkcji x^r w zależności od r .
3. Udowodnić, że jeżeli r jest liczbą parzystą, to
 - a) funkcja x^r jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$,
 - b) funkcja $\frac{1}{x^r}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.
4. Udowodnić, że jeżeli r jest liczbą nieparzystą, to
 - a) funkcja x^r jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$,
 - b) funkcja $\frac{1}{x^r}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

52. Funkcja wykładnicza

Definicja. Funkcję

$$y = a^x, \quad a > 0 \quad (52.1)$$

nazywamy *funkcją wykładniczą*.

Dziedziną funkcji (52.1) jest przedział $(-\infty; \infty)$.

Oto przykłady funkcji wykładniczych:

$$y = 2^x, \quad y = 5^x, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Z twierdzenia o porównywaniu potęg (str. 232) wynika, że:

funkcja a^x jest rosnąca, gdy $a > 1$:

$$a > 1 \text{ i } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

oraz

funkcja a^x jest malejąca, gdy $0 < a < 1$:

$$0 < a < 1 \text{ i } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Dla $a = 1$ funkcja (52.1) jest *stała* i ma wartość 1.

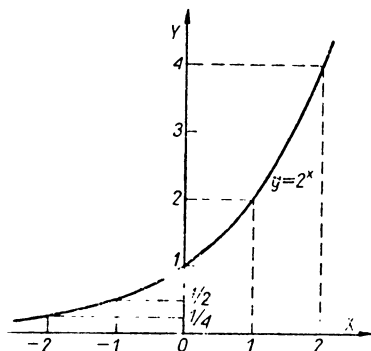
Przykład. Wykreślić funkcję $y = 2^x$.

Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji i na jej podstawie sporządzamy wykres.

Tabl. 52-1

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Odp. Rys. 52-1.



Rys. 52-1

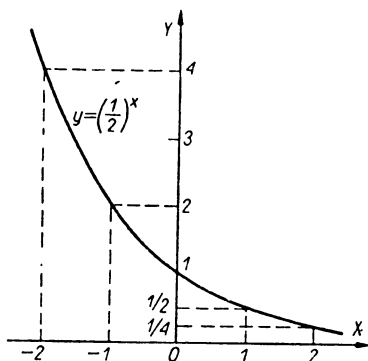
Przykład. Wykreślić funkcję $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji, a następnie sporządzamy wykres.

Odp. Rys. 52-2.

Tabl. 52-2

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Rys. 52-2

Wykres funkcji wykładniczej nazywamy *krzywą wykładniczą*.

Podamy teraz przykłady tzw. *nierówności wykładniczych*; są to takie nierówności, w których niewiadoma znajduje się w wykładniku potęgi.

Przykład. Rozwiązać nierówność

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x > 4$$

Rozwiązanie

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x > 4 \Leftrightarrow 2^{-3x} > 2^2 \Leftrightarrow -3x > 2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$$

Odp. $x < -\frac{2}{3}$.

Przykład*. Rozwiązać nierówność

$$a^{x^2-5x+4} > \frac{1}{a^2}, \quad \text{dla } 0 < a < 1$$

Rozwiązanie. Ponieważ $0 < a < 1$, więc

$$a^{x^2-5x+4} > a^{-2} \Leftrightarrow x^2-5x+4 < -2 \Leftrightarrow x^2-5x+6 < 0$$

Tę ostatnią nierówność rozwiązujemy w znany sposób.

Odp. $2 < x < 3$.

Funkcja wykładnicza ma dwie ważne właściwości:

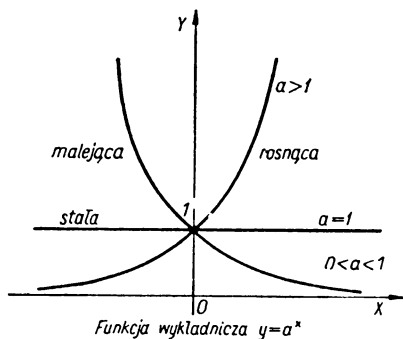
1° przyjmuje tylko dodatnie wartości: $a^x > 0$

oraz

$$2^\circ \quad a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad (52.2)$$

Ta ostatnia równość, znana z działań na potęgach, ma duże znaczenie w zastosowaniach funkcji wykładniczej.

Na rys. 52-3* przedstawione są schematycznie informacje o zmienności funkcji wykładniczej. Wykres każdej funkcji $y = a^x$ przechodzi przez punkt $(0, 1)$.



Rys. 52-3

Twierdzenie (o równości potęg). Jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$ oraz

$$a^x = a^y \quad (52.3)$$

to $x = y$.

Dowód. Ponieważ $x < y$ albo $x = y$ albo $x > y$, więc wystarczy wykluczyć pierwszą i trzecią z tych relacji. Otóż jeżeli $x < y$, to na podstawie twierdzenia o porównywaniu potęg mamy $a^x > a^y$ gdy $0 < a < 1$, zaś $a^x < a^y$ gdy $a > 1$, więc równość (52.3) nie jest spełniona. Podobnie wykluczamy nierówność $x > y$, więc pozostaje równość $x = y$, cnd.

Uwaga. Jeżeli $a = 0$ albo $a = 1$, to z równości potęg (52.3) nie można niczego sądzić o równości wykładników x i y , co potwierdzają następujące przykłady: $0^3 = 0^5$, $1^2 = 1^0$.

Równania wykładnicze. Twierdzenie o równości potęg stanowi podstawę przy rozwiązywaniu *równań wykładniczych*, tzn. takich równań, w których niewiadoma jest w wykładniku potęgi. Podamy teraz przykłady takich równań.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$2^{x^2-5x+10} = 64 \quad (52.4)$$

Rozwiązanie. Prawą stronę równania możemy przedstawić jako 2^6 , więc na podstawie twierdzenia o równości potęg $x^2 - 5x + 10 = 6$. Otrzymaliśmy zatem równanie kwadratowe $x^2 - 5x + 4 = 0$, które rozwiązujemy w znany sposób.

Odp. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Przykład. Rozwiązać równanie

$$2^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{x-1}} \quad (52.5)$$

Rozwiązanie. Pisząc prawą stronę równania (52.5) w postaci $2^{\frac{2x}{x-1}}$, a następnie przyrównując wykładniki potęg, dostajemy

$$\frac{1}{x} = \frac{2x}{x-1} \quad \text{skąd} \quad 2x^2 - x + 1 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe o ujemnym wyróżniku, $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$.

Odp. Równanie nie ma pierwiastków

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4 \quad (52.6)$$

Rozwiązanie. Oznaczając

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = a \quad \text{mamy} \quad \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-3}{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{a}$$

Równanie (52.6) można więc zapisać następująco:

$$\frac{1}{a^x} + a^x = 4 \quad \text{czyli} \quad (a^x)^2 - 4a^x + 1 = 0$$

Wprowadzamy nową niewiadomą $z = a^x$. Otrzymujemy równanie kwadratowe

$z^2 - 4z + 1 = 0$, którego pierwiastkami są liczby $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ oraz $z_2 = 2 + \sqrt{3}$.
 Jeżeli $a^{x_1} = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{a^2}$, to $x_1 = -2$; jeżeli $a^{x_2} = 2 + \sqrt{3} = a^2$, to $x_2 = 2$.

Odp. $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Pytania i zadania

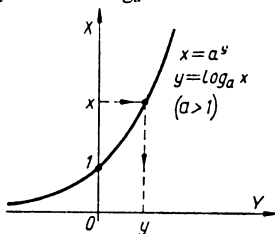
- Co to jest funkcja wykładnicza?
- Dla jakich podstaw a funkcja a^x jest a) rosnąca, b) malejąca, c) stała?
- Wykreślić na wspólnym rysunku funkcje $y = 2^x$ i $y = 3^x$ a następnie zbadać, która z nich ma większą wartość a) dla $x = -1$, b) dla $x = 1$.
- Sporządzić wykres funkcji:
 a) $y = 2^{x+2}$, b) $y = 3^{x-1}$, c) $y = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x+4}$.
- Rozwiązać równania:
 a) $4^{2x-5} = 256$, b) $3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$, c) $2^{2x-1} \cdot 3^x = 72$,
 d) $3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0$, e) $2^{x+1} + 2^{x+3} + 320 = 2^{x+2} + 2^{x+4}$.
- Rozwiązać nierówności:
 a) $\frac{1}{2^{x+2}} < \frac{2^x}{2^x - 1}$, b) $1 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$, c) $27^{-3x} > 81$,
 d) $2^{3x+5} - 4^{x-1} > 0$, e) $3^{\frac{1}{x}} < 3^{2x}$.

53. Logarytmy

Z własności funkcji wykładniczej wynika, że jeżeli liczby a i x są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna liczba y taka, że

$$a^y = x \quad (53.1)$$

(rys. 53-1). Liczbę y spełniającą warunek (53.1) nazywamy logarytmem liczby x przy podstawie a i oznaczamy symbolem $\log_a x$.



Rys. 53-1

Definicja. Logarytmem liczby $x > 0$ przy podstawie a ($a > 0$ i $a \neq 1$) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , żeby otrzymać x .

Mamy więc

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \quad (53.2)$$

Przykłady

$\log_2 4 = 2$, ponieważ $2^2 = 4$; $\log_3 3 = 1$, ponieważ $3^1 = 3$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$, ponieważ $(\sqrt{2})^2 = 2$

$\log_{12} 1 = 0$, ponieważ $12^0 = 1$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, ponieważ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

Zwracamy uwagę, że logarytm liczby dodatniej może być dodatni, ujemny lub równy zeru:

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_2 \frac{1}{8} = -3, \quad \log_2 1 = 0$$

Z określenia logarytmu wynika, że

$$\log_a 1 = 0$$

natomiast logarytm liczby będącej jednocześnie podstawą logarytmu jest równy 1

$$\log_a a = 1$$

Z definicji (53.2) wynikają ponadto dwie tożsamości:

$$\log_a a^x = x \quad \text{oraz} \quad a^{\log_a x} = x, \quad \text{dla} \quad x > 0 \quad (53.3)$$

Na przykład

$$\log_7 7^5 = 5, \quad 2^{\log_2 5} = 5, \quad 5^{\log_5 16} = 16$$

Liczba 0 i liczby ujemne nie mają logarytmów, gdyż potęga a^y , ($a > 0$, $a \neq 1$), nie jest zerem i nie jest ujemna dla żadnej wartości y .

W dalszym ciągu ilekroć będzie mowa o logarytmie należy pamiętać, że podstawa logarytmu jest liczbą dodatnią i różną od 1.

Podamy teraz twierdzenia dotyczące właściwości logarytmów.

Twierdzenie (o logarytmie iloczynu). *Jeżeli $x > 0$ i $y > 0$, to*

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (53.4)$$

Dowód. Oznaczamy $\log_a x = p$, $\log_a y = q$. Z określenia logarytmu $x = a^p$, $y = a^q$. Stąd $xy = a^p a^q = a^{p+q}$, więc $\log_a (xy) = p + q = \log_a x + \log_a y$, cnd.

Wzór (53.4) czytamy krótko:

logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów

Przykłady

$$\log_2 12 = \log_2 (3 \cdot 4) = \log_2 3 + \log_2 4 = \log_2 3 + 2$$

$$\log_3 36 = \log_3 (3^2 \cdot 4) = \log_3 3^2 + \log_3 4 = 2 + \log_3 4$$

$$\log_a (xyz) = \log_a (xy) + \log_a z = \log_a x + \log_a y + \log_a z$$

$$(x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0)$$

Twierdzenie (o logarytmie ilorazu). *Jeżeli $x > 0$ i $y > 0$, to*

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (53.5)$$

Dowód. Oznaczamy $\log_a x = p$, $\log_a y = q$. Z określenia logarytmu $x = a^p$, $y = a^q$. Stąd $\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, więc $\log_a \frac{x}{y} = p - q = \log_a x - \log_a y$, cnd.

Wzór (53.5) czytamy krótko:

logarytm ilorazu równa się różnicy logarytmów

Przykłady

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b = 0 - \log_a b = -\log_a b \quad (b > 0)$$

$$\log_a \frac{xy}{z} = \log_a(xy) - \log_a z = \log_a x + \log_a y - \log_a z$$

$$(x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0)$$

Twierdzenie (o logarytmie potęgi). *Jeżeli $x > 0$, to dla każdej liczby rzeczywistej n*

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad (53.6)$$

Dowód. Oznaczamy $\log_a x = p$. Stąd $a^p = x$, więc $x^n = (a^p)^n = a^{pn}$, czyli $\log_a x^n = p \cdot n = n \cdot \log_a x$, cnd.

Wzór (53.6) czytamy krótko:

logarytm potęgi równa się iloczynowi wykładnika przez logarytm podstawy

Przykłady

$$\log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5; \quad \log_a a^3 = 3 \log_a a = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2 = 6; \quad \log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3}$$

$$\log_a x^2 = \begin{cases} 2 \log_a x & \text{dla } x > 0 \\ 2 \log_a (-x) & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Przykład*. Obliczyć

$$x = 25^{1-\log_5 3} + 2 \cdot 7^{-\log_7 9}$$

Rozwiązanie. Mamy

$$25^{1-\log_5 3} = 5^{2(1-\log_5 3)} = 5^{2-2 \log_5 3} = 5^{\log_5 25 - \log_5 9} = 5^{\log_5 \frac{25}{9}} = \frac{25}{9}$$

Ponadto

$$7^{-\log_7 9} = (7^{\log_7 9})^{-1} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$$

Stąd

$$x = \frac{25}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Odp. 3.

Przykład*. Udowodnić wzór

$$\log_a b = -\frac{1}{\log_b a} \quad (53.7)$$

Rozwiązanie. Liczby a i b są tu podstawami logarytmów, więc są dodatnie i różne od jedności. Oznaczmy $\log_a b = x$ i $\log_b a = y$. Mamy więc $a^x = b$ i $b^y = a$, czyli $(b^y)^x = b$, skąd $b^{yx} = b^1$. Na podstawie twierdzenia o równości potęg (str. 237) dostajemy $yx = 1$, czyli $\log_b a \cdot \log_a b = 1$, cnd.

Na przykład

$$\log_2 4 = \frac{1}{\log_4 2}, \quad \log_5 2 = -\frac{1}{\log_2 5}$$

Przykład*. Udowodnić wzór

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x, \quad (x > 0) \quad (53.8)$$

Rozwiązanie. Oznaczmy $\log_a x = p$ oraz $\log_b x = q$. Stąd $x = a^p$ i $x = b^q$, więc $a^p = b^q$. Równe liczby dodatnie mają równe logarytmy, a zatem $\log_b a^p = \log_b b^q$, czyli $p \log_b a = q \log_b b$, więc ostatecznie $p \log_b a = q$, cnd.

Na przykład jeżeli $\log_2 x = 0,6$, to

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 2 \cdot \log_2 x = -1 \cdot 0,6 = -0,6$$

Równość (53.8) nazywamy wzorem na *zmianę podstawy logarytmu*.

Pytania i zadania

1. Podać określenie *logarytmu*.
2. Jakie warunki spełnia *podstawa* logarytmu?
3. Wypowiedzieć twierdzenie o logarytmie a) iloczynu, b) ilorazu, c) potęgi.
4. Podać wzór na *zmianę podstawy* logarytmu.
5. Obliczyć na podstawie określenia logarytmu

$$\text{a) } \log_7 243, \quad \text{b) } \log_3 \frac{1}{27}, \quad \text{c) } \log_2 \frac{1}{8}, \quad \text{d) } \log_{\sqrt{2}} 16,$$

$$\text{e) } \log_{\sqrt[3]{7}} 49, \quad \text{f) } \log_2 \sqrt[3]{4}, \quad \text{g) } \log_3 1, \quad \text{h) } \log_{10} 10.$$

$$6. \text{ Obliczyć } \log_4 x - 2 \log_{16} x.$$

$$7*. \log_3 x = a; \text{ obliczyć } \log_{27} x.$$

$$8*. \log_6 2 = a, \log_6 5 = b; \text{ obliczyć } \log_3 5.$$

9**. Udowodnić równość

$$\log_{10} 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \dots \log_{10} 9$$

$$10**. \log_a x = 2, \log_b x = 3, \log_c x = 6; \text{ obliczyć } \log_{abc} x.$$

54. Funkcja logarytmiczna

Definicja. Funkcję

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad (54.1)$$

nazywamy *funkcją logarytmiczną*. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbf{R}_+$.

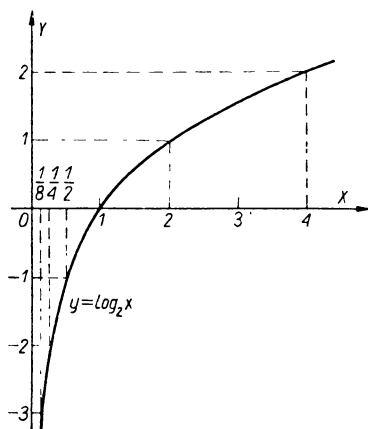
Przykład. Wykreślić funkcję $y = \log_2 x$.

Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji korzystając z określenia logarytmu.

Tabl. 54-1

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

Odp. Rys. 54-1.



Rys. 54-1

Przykład. Wykreślić funkcję $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Rozwiązanie. Układamy tabelkę zmienności funkcji.

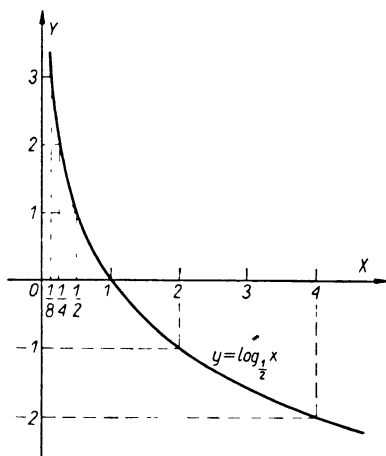
Tabl. 54-2

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	3	2	1	0	-1	-2

Odp. Rys. 54-2.

Funkcja $y = \log_a x$ odwzorowuje zbiór $\mathbf{R}_+$ na zbiór $\mathbf{R}$, zaś funkcja $x = a^y$ odwzorowuje zbiór $\mathbf{R}$ na $\mathbf{R}_+$. Z uwagi na równoważność (53.2), każde z tych odwo-

rowań jest odwrotne względem drugiego (por. str. 36), więc wykres funkcji logarytmicznej jest linią symetryczną do wykresu funkcji wykładniczej (o tej samej podstawie) względem prostej $y = x$ (rys. 54-3).



Rys. 54-2

Z określenia logarytmu oraz z twierdzenia o porównywaniu potęg wynika, że funkcja $\log_a x$ jest rosnąca, gdy $a > 1$:

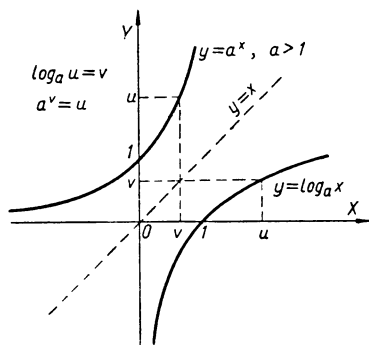
$$(a > 1 \text{ i } 0 < x_1 < x_2) \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

oraz

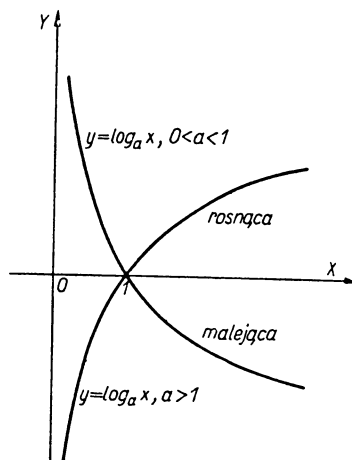
funkcja $\log_a x$ jest malejąca, gdy $0 < a < 1$:

$$(0 < a < 1 \text{ i } 0 < x_1 < x_2) \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

(rys. 54-4).



Rys. 54-3



Rys. 54-4

Przykład. Dla jakich wartości x określona jest funkcja

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+4)} \quad (54.2)$$

Rozwiązanie. Funkcja (54.2) jest określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\log_{\frac{1}{2}}(x+4) \geq 0$, czyli gdy $0 < x+4 \leq 1$ (rys. 54-4, przypadek $0 < a < 1$). Stąd $-4 < x \leq -3$.

Odp. $-4 < x \leq -3$.

Równania logarytmiczne. Podamy teraz przykłady rozwiązywania *równań logarytmicznych*; są to równania, w których niewiadoma jest pod znakiem logarytmu (lub w jego podstawie).

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\log_a(x + \sqrt{3}) = -\log_a(x - \sqrt{3}) \quad (54.3)$$

Rozwiązanie (analiza starożytnych). Jeżeli liczba x spełnia równanie (54.3), to spełnia także równanie

$$\log_a(x + \sqrt{3}) + \log_a(x - \sqrt{3}) = 0$$

czyli

$$\log_a[(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})] = 0, \quad \text{więc} \quad \log_a(x^2 - 3) = 0.$$

Z określenia logarytmu $x^2 - 3 = a^0 = 1$, a zatem $x^2 = 4$. Stąd $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Liczba -2 nie jest pierwiastkiem równania (54.3), gdyż suma $-2 + \sqrt{3}$ jest ujemna i $\log_a(-2 + \sqrt{3})$ nie istnieje. Natomiast liczba 2 spełnia równanie (54.3), ponieważ

$$\log_a(2 + \sqrt{3}) = \log_a \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}} = \log_a \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = -\log_a(2 - \sqrt{3})$$

Odp. $x = 2$.

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1 \quad (54.4)$$

Rozwiązanie. Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $z = \log_2 x$. Równanie (54.4) przyjmuje więc postać

$$\frac{1}{5 - z} + \frac{2}{1 + z} = 1 \quad \text{skąd} \quad z^2 - 5z + 6 = 0$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki $z_1 = 2$ oraz $z_2 = 3$. Z warunku $\log_2 x_1 = 2$ dostajemy $x_1 = 4$, zaś z warunku $\log_2 x_2 = 3$ dostajemy $x_2 = 8$. Sprawdzenie otrzymanych rozwiązań pozostawiamy Czytelnikowi.

Odp. $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.

A oto przykłady równań *logarytmiczno-wykładniczych*.

Przykład*. Rozwiązać równanie

$$\log_2(9-2^x) = 3-x$$

Rozwiązanie. Korzystamy z określenia logarytmu

$$9-2^x = 2^{3-x} \quad \text{więc} \quad 9-2^x = 8 \cdot \frac{1}{2^x}$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $z = 2^x$ otrzymując

$$9-z = 8 \cdot \frac{1}{z} \quad \text{czyli} \quad z^2 - 9z + 8 = 0$$

stąd $z_1 = 1$, $z_2 = 8$, czyli $2^{x_1} = 1$, $2^{x_2} = 8$; ostatecznie $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Sprawdź nie obu pierwiastków pozostawiamy Czytelnikowi.

Odp. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Przykład.** Rozwiązać równanie

$$x^{1/x} = (1/\sqrt{x})^x \quad (54.5)$$

Rozwiązanie (metoda równań równoważnych). Będziemy poszukiwać pierwiastków równania (54.5) wyłącznie w zbiorze $\mathbf{R}_+$, gdyż dla $x < 0$ nie ma sensu $\sqrt{x}$, zaś dla $x = 0$ nie ma sensu $x^{1/x}$. Spostrzegamy, że liczba $x_1 = 1$ spełnia równanie (54.5).

Dla $x > 0$ i $x \neq 1$ mamy

$$x^{1/x} = (1/\sqrt{x})^x \Leftrightarrow \sqrt{x}^{\log_x x} = x \log_x \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} x \Leftrightarrow x = 4$$

Odp. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Przykład.** Rozwiązać równanie

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$$

Rozwiązanie. Skorzystamy ze wzoru (53.8) na zmianę podstawy logarytmu. Mamy

$$\log_3 x = \log_3 2 \cdot \log_2 x, \quad \log_4 x = \log_4 2 \cdot \log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 x$$

Równanie dane można więc zapisać tak

$$\log_2 x + \log_3 2 \cdot \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = 1$$

stąd

$$\left(\frac{3}{2} + \log_3 2\right) \log_2 x = 1, \quad \log_2 x = \frac{2}{3 + 2 \log_3 2}$$

$$\text{Odp. } x = 2^{\frac{2}{3 + \log_3 4}}$$

Nierówności logarytmiczne. Ograniczymy się do prostych przykładów.

Przykład. Rozwiązać układ nierówności

$$2 \leq \log_{\sqrt{2}}(2x-8) \leq 3 \quad (54.6)$$

Rozwiązanie. Ponieważ funkcja logarytmiczna o podstawie większej od jedności jest rosnąca, więc układ nierówności (54.6) jest równoważny układowi

$$(1/\sqrt{2})^2 \leq 2x-8 \leq (1/\sqrt{2})^3, \quad \text{czyli} \quad 2 \leq 2x-8 \leq 2/\sqrt{2}$$

Odp. $5 \leq x \leq 4 + \sqrt{2}$.

Przykład*. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{\log_a x} > 1, \quad \text{gdy} \quad a > 1 \quad (54.7)$$

Rozwiązanie. Oznaczamy $u = \log_a x$ i przepisujemy nierówność (54.7) w postaci

$$\frac{1}{u} > 1, \quad \text{czyli} \quad \frac{1-u}{u} > 0$$

Stąd $0 < u < 1$, więc $0 < \log_a x < 1$. Ponieważ $a > 1$, więc ostatnia nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $1 < x < a$.

Odp. $1 < x < a$.

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja logarytmiczna?
2. Jaka jest dziedzina funkcji logarytmicznej?
3. Wykreślić na wspólnym rysunku funkcje:

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = \log_2 x; \quad y = \log_3 x.$$

4. Sporządzić wykresy funkcyj:

$$\text{a) } y = \log_2 8x, \quad \text{b) } y = \log_3 \frac{x}{9}, \quad \text{c) } y = \log_{10}(x+5).$$

5. Znaleźć dziedziny funkcji:

$$\text{a) } y = \log_2 x + \sqrt[3]{-x}, \quad \text{b) } y = \log_4 x + \sqrt{-x}, \quad \text{c) } y = \log_2 \frac{x}{x+1}.$$

6. Wykreślić na wspólnym rysunku funkcje:

$$\text{a) } y = 2^x \quad \text{i} \quad y = \log_2 x, \quad \text{b) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{i} \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

7. Dla jakich wartości a funkcja $y = \log_a x$ jest rosnąca, dla jakich zaś malejąca?

8. Rozwiązać równania:

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_3 [\log_5 (2x+1)] &= 0, & \text{b) } \log_3 (5x+1) - \log_3 (x-1) &= 2, \\ \text{c) } \log_4 [\log_2 (x-5)] &= 1, & \text{d) } 3 \log_3 (x+1) &= \log_3 (x^3 + 2x^2 + 4x + 7). \end{aligned}$$

- 9*. Rozwiązać równania:

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_a x + \log_a (x+1) &= 0, & \text{b) } \log_a (2^x + 4^x) - \log_a 8 &= \log_a \left(2^{2x-1} - \frac{1}{4}\right), \\ \text{c) } \log_x 10 + \log_{x^2} 10 &= 6, & \text{d) } x^{\log_{10} x} &= 100x. \end{aligned}$$

10*. Dla jakiej wartości parametru m równanie

$$\log_2(mx) = 2\log_2(x+1)$$

ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni?

11**. Rozwiązać układ równań

$$\left. \begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

12*. Rozwiązać nierówność:

$$\text{a) } \log_3^2 x + 3\log_3 x + 2 < 0, \quad \text{b) } \frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1, \quad \text{gdy } 0 < a < 1.$$

13**. Rozwiązać układ równań ($x > 0, y > 0$)

$$\left. \begin{aligned} x^y &= y^x \\ x^3 &= y^2 \end{aligned} \right\}$$

55. Logarytmy dziesiętne

Logarytmy o podstawie 10 nazywamy *logarytmami dziesiętnymi*. Zamiast $\log_{10} x$ piszemy $\log x$. Jeżeli więc nie podajemy wartości podstawy logarytmu, to mamy na myśli logarytm dziesiętny.

Funkcja $y = \log x$, jest rosnąca.

Przykłady

$$\log \frac{1}{100} = -2, \quad \log \frac{1}{10} = -1, \quad \log 1 = 0, \quad \log 10 = 1, \quad \log 100 = 2$$

W powyższych przykładach obliczyliśmy logarytmy dziesiętne korzystając jedynie z określenia logarytmu. Nie zawsze jednak obliczenie jest tak proste, że można je wykonać w pamięci. Matematyka wyższa zna metody obliczania logarytmów dowolnych liczb dodatnich z dowolną dokładnością. Wyniki tych obliczeń umieszczone są w tablicach logarytmów dziesiętnych.

Mając daną liczbę dodatnią, która nie jest znaną potęgą liczby 10, łatwo można ustalić, między jakimi dwiema liczbami całkowitymi zawiera się jej logarytm, korzystając z tego, że funkcja $\log x$ jest rosnąca.

Przykłady

$1 < \log 78 < 2$	ponieważ	$10^1 < 78 < 10^2$
$2 < \log 513 < 3$	ponieważ	$10^2 < 513 < 10^3$
$-2 < \log 0,08 < -1$	ponieważ	$10^{-2} < 0,08 < 10^{-1}$
$-3 < \log 0,003 < -2$	ponieważ	$10^{-3} < 0,003 < 10^{-2}$
$-5 < \log 0,000017 < -4$	ponieważ	$10^{-5} < 0,000017 < 10^{-4}$

Możemy więc napisać

$$\begin{aligned}\log 78 &= 1 + m_1, & \text{gdzie } 0 < m_1 < 1 \\ \log 513 &= 2 + m_2, & \text{gdzie } 0 < m_2 < 1 \\ \log 0,08 &= -2 + m_3, & \text{gdzie } 0 < m_3 < 1 \\ \log 0,003 &= -3 + m_4, & \text{gdzie } 0 < m_4 < 1 \\ \log 0,000017 &= -5 + m_5, & \text{gdzie } 0 < m_5 < 1\end{aligned}$$

Część całkowitą logarytmu danej liczby, to nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą od logarytmu tej liczby, nazywamy *cechą logarytmu*. Na przykład cechą logarytmu liczby 78 jest 1, cechą logarytmu liczby 513 jest 2, cechą logarytmu liczby 0,000 017 jest -5 , zaś cechą logarytmu liczby 100 jest 2 (jest ona zarazem logarytmem liczby 100).

Znajdowanie cechy logarytmu liczby dodatniej, zapisanej w postaci ułamka dziesiętnego, ułatwia następująca reguła:

Reguła. *Cecha logarytmu liczby większej od 1 jest o 1 mniejsza od liczby cyfr części całkowitej tej liczby; cecha logarytmu liczby mniejszej od 1 jest liczbą ujemną, której wartość bezwzględna równa jest liczbie zer rozwinięcia dziesiętnego przed pierwszą cyfrą różną od zera (licząc także 0 przed przecinkiem).*

Przykłady. Cechą logarytmu liczby 21 548 jest 4, liczby 1322 jest 3, liczby 3,28 jest 0, liczby 0,15 jest -1 , liczby 0,029 jest -2 .

Różnicę między logarytmem danej liczby a cechą tego logarytmu nazywamy *mantysą logarytmu* tej liczby. Mantysa m jest więc liczbą nieujemną, mniejszą od 1; $0 \leq m < 1$.

Oznaczając cechę $\log x$ przez c , a mantysę przez m mamy więc

$$\log x = c + m$$

Raz jeszcze przypominamy, że c jest liczbą całkowitą (dodatnią, ujemną, albo 0), natomiast m spełnia warunek $0 \leq m < 1$.

W tablicach logarytmów znajdują się tylko mantysy; cechy obliczamy w pamięci posługując się podaną wyżej regułą.

Przy obliczaniu logarytmów, często korzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie. *Jeżeli liczbę logarytmowaną x pomnożymy przez 10^p , (p — liczba całkowita), to cecha logarytmu tego iloczynu równa się sumie liczby p i cechy $\log x$, zaś mantysa nie ulegnie zmianie.*

Dowód. Oznaczamy $\log x = c + m$, $0 \leq m < 1$.

$$\log(10^p x) = \log 10^p + \log x = p \log 10 + \log x = p \cdot 1 + c + m$$

więc $\log(10^p x) = (p + c) + m$. Ponieważ $p + c$ jest liczbą całkowitą, zaś liczba m spełnia warunek $0 \leq m < 1$, więc zgodnie z określeniem cechy i mantysy, $p + c$ jest cechą, natomiast m jest mantysą logarytmu liczby $10^p x$, cnd.

Przykład. Logarytmy liczb 583, 58,3, 5,83, 0,0583, mają cechy: 2, 1, 0, -1 , -2 , a mantysę tę samą.

Posługiwanie się tablicami logarytmów objaśniają następujące przykłady.

Przykład. Wyznaczyć $\log 3950$.

Rozwiązanie. Liczba logarytmowana jest czterocyfrowa, więc jej cecha wynosi 3. W tablicy logarytmów (str. 316) odszukujemy w pierwszej kolumnie od lewej strony, liczbę 39, zaś w pierwszym wierszu od góry liczbę 5. Na przecięciu się wiersza, w którym pierwsza od lewej stoi liczba 39, z kolumną, w której pierwsza od góry stoi liczba 5, znajdujemy cyfry mantysy: 5966. Oznacza to, że mantysa wynosi 0,5966. Stąd $\log 3950 = 3 + 0,5966$.

Odp. 3,5966.

Przykład. Wyznaczyć $\log 42560$.

Rozwiązanie. Cecha wynosi 4. Odszukujemy w pierwszej kolumnie 42, w pierwszym wierszu 5. Postępując jak poprzednio otrzymamy mantysę 0,6284. Należy teraz uwzględnić poprawkę na czwartą z kolei cyfrę liczby logarytmowanej, a mianowicie cyfrę 6. W rubryce poprawek¹⁾, pod cyfrą 6, znajdujemy na wysokości mantysy 0,6284, poprawkę 6, którą należy dodać do tej mantysy, rozumiejąc 6 jako ilość jednostek w odniesieniu do ostatniego miejsca dziesiętnego mantysy. Z uwzględnieniem poprawki mantysa wynosi więc $0,6284 + 0,0006 = 0,6290$.

Odp. 4,6290.

Przykład. Wyznaczyć $\log 0,00279$.

Rozwiązanie. Cecha wynosi -3 , Mantysa jest taka, jak mantysa liczby 279, czyli 0,4456. Stąd $\log x = -3 + 0,4456 = -2,5544$. Zamiast $-2,5544$ piszemy umownie $\bar{3},4456$, przy czym kreska napisana nad cyfrą 3 oznacza, że cecha obliczanego logarytmu wynosi -3 .

Odp. $\bar{3},4456$.

Uwaga. Zapis $\bar{A},BCDE\dots$ oznacza liczbę będącą sumą $-A + 0,BCDE\dots$; duże litery alfabetu oznaczają tu cyfry arabskie.

Tablice logarytmów służą także do odszukiwania liczby logarytmowanej, gdy dany jest jej logarytm.

Przykład. $\log x = 1,5752$. Wyznaczyć x .

Rozwiązanie. Z tablic odczytujemy, że mantysie 0,5752 odpowiada grupa cyfr 376. Ponieważ cecha logarytmu wynosi 1, więc część całkowita szukanej liczby x składa się z dwóch cyfr.

Odp. 37,6.

Przykład. $\log x = 3,2625$. Wyznaczyć x .

Rozwiązanie. Mantysie 0,2625 odpowiada grupa cyfr 183. Cecha wynosi 3, więc liczba jest czterocyfrowa.

Odp. 1830.

Przykład. $\log x = \bar{3},6274$. Wyznaczyć x .

¹⁾ Wojtowicz W. Tablice matematyczno-fizyczne czterocyfrowe. Warszawa PZWS.

Rozwiązanie. Mantysie 0,6274 odpowiada grupa cyfr 424. Cecha jest -3 , więc w rozwinięciu dziesiętnym szukanej liczby znajdują się za przecinkiem dwa zera.

Odp. 0,00424.

Przykład. $\log x = 0,5927$. Wyznaczyć x .

Rozwiązanie. W tablicach znajdujemy mantysę 0,5922, której odpowiada grupa cyfr 391. Mantysa danego w przykładzie logarytmu wynosi 0,5927, jest więc większa od mantysy znalezionej w tablicach o 0,0005. Różnicy tej odpowiada w rubryce poprawek cyfra 5, którą dopisujemy na końcu do wyznaczonej uprzednio grupy cyfr 391, otrzymując 3915. Ponieważ cecha logarytmu wynosi 0, więc część całkowita szukanej liczby x jest jednocyfrowa.

Odp. 3,915.

Uwaga 1. Cecha logarytmu określa rząd wielkości liczby logarytmowanej, natomiast mantysa określa kolejne cyfry występujące w rozwinięciu dziesiętnym tej liczby.

Uwaga 2. Zarówno logarytmy, jak i liczby logarytmowane odczytywane z tablic, są to na ogół tylko przybliżenia dziesiętne ich dokładnych wartości. W praktyce przybliżenia te są wystarczające.

Przykład. Obliczyć $x = 0,3862 \cdot 4328 \cdot 0,0245$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}\log x &= \log 0,3862 + \log 4328 + \log 0,0245 \\ \log 0,3862 &= \overline{1},5868 \\ \log 4328 &= 3,6363 \\ \log 0,0245 &= \overline{2},3892 \\ \hline \log x &= 1,6123\end{aligned}$$

stad $x = 40,96$.

Odp. 40,96.

Przypominamy na przykładach mnożenie i dzielenie logarytmu o ujemnej cesze.

Przykład. Obliczyć $\overline{3},5261 \cdot 3$.

Rozwiązanie

$$\overline{3},5261 \cdot 3 = (-3 + 0,5261) \cdot 3 = -9 + 1,5783 = \overline{8},5783$$

Rachunek ten zapisujemy krótko:

$$\begin{array}{r}\overline{3},5261 \cdot 3 \\ \hline \overline{8},5783\end{array}$$

Po napisaniu ostatniej przed przecinkiem (pisząc od prawej strony) cyfry 5 pozostała „w pamięci” cyfra 1; po wykonaniu mnożenia $3 \cdot \overline{3}$, czyli $3 \cdot (-3) = -9$, dodajemy do otrzymanego iloczynu jedynek, $-9 + 1 = -8$, i wynik piszemy w umowny sposób $\overline{8}$.

Odp. $\overline{8,5783}$.

Przykład. Obliczyć $\overline{4,5921} : 3$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}\overline{4,5921} : 3 &= (-4 + 0,5921) : 3 = (-6 + 2,5921) : 3 = \\ &= -2 + 0,8640 = \overline{2,8640}\end{aligned}$$

Rachunek ten zapisujemy tak:

$$\begin{array}{r} \overline{4,5921} : 3 = \overline{6^{+2},5921} : 3 = \overline{2,8640} \\ \begin{array}{r} 6 \\ \hline 25 \\ 24 \\ \hline 19 \\ 18 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 1 \end{array} \end{array}$$

Odp. $\overline{2,8640}$.

Przykład. Obliczyć

$$x = \frac{35,6}{27,6^2}$$

Rozwiązanie: $\log x = \log 35,6 - 2 \log 27,6$

$$\begin{array}{rcl} \log 27,6 & = & 1,4409 \\ -\log 27,6 & = & \overline{2,5591} \\ \log 35,6 & = & 1,5514 \\ -2 \log 27,6 & = & \overline{3,1182} \\ \hline \log x & = & 2,6696 \end{array}$$

Odp. $x = 0,04673$.

Przykład. Obliczyć

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

dla $a = 4,352$, $b = 1,8$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}\log x &= \log a + \log b - \frac{1}{2} \log(a^2 - b^2) = \log a + \log b - \\ &- \frac{1}{2} \log(a+b) - \frac{1}{2} \log(a-b)\end{aligned}$$

Podstawiamy $a = 4,352$, $b = 1,8$.

$$\log x = \log 4,352 + \log 1,8 - \frac{1}{2} \log 6,152 - \frac{1}{2} \log 2,552$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \log 4,352 = 0,6387 & \\
 & \log 1,8 = 0,2553 & \\
 \log 6,152 = 0,7890 & & \\
 \log 2,552 = 0,4068 & - \frac{1}{2} \log 6,152 = \bar{1},6055 & \\
 & - \frac{1}{2} \log 2,552 = \bar{1},7966 & \\
 \hline
 & \log x = 0,2961 &
 \end{array}$$

Odp. 1,977.

Pytania i zadania

1. Co to jest a) cecha, b) mantysa logarytmu dziesiętnego?
 2*. Niech $m(x)$ będzie mantysą, zaś $c(x)$ cechą logarytmu dziesiętnego liczby dodatniej x . Sprawdzić, że

$$a) c(x) = [\log x], \quad b) m(x) = \log x - [\log x],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą x (str. 76). Sporządzić wykresy funkcji $c(x)$ i $m(x)$.

3. Obliczyć za pomocą tablic

$$a) \log 55, \quad b) \log 658, \quad c) \log 429\,000, \quad d) \log 2,$$

$$e) \log 32,28, \quad f) \log 0,7, \quad g) 0,628 \quad h) \log 0,01748.$$

4. Obliczyć za pomocą tablic x , jeżeli:

$$a) \log x = 4,2833, \quad b) \log x = \bar{3},9465, \quad c) \log x = 2,8707,$$

$$d) \log x = \bar{3},3075, \quad e) \log x = 0,4507, \quad f) \log x = \bar{2},2676.$$

5. Obliczyć za pomocą tablic

$$a) \left(1 + \frac{1}{8}\right)^8, \quad b) \frac{38,42^2 \cdot 0,0726}{2,154}, \quad c) 1,05^{30}, \quad d) \frac{1}{5},$$

$$e) 0,0234^{\frac{1}{4}}, \quad f) \sqrt[3]{7,326^2 - 5,834^2}, \quad g) \sqrt[10]{10 + \frac{10}{10}}.$$

6*. $\log 2 = 0,3010$; obliczyć bez pomocy tablic $\log 50$.

7*. Dla jakich wartości x trzy liczby

$$\log 2; \quad \log(2^x - 1); \quad \log(2^x + 3)$$

wzięte w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny?

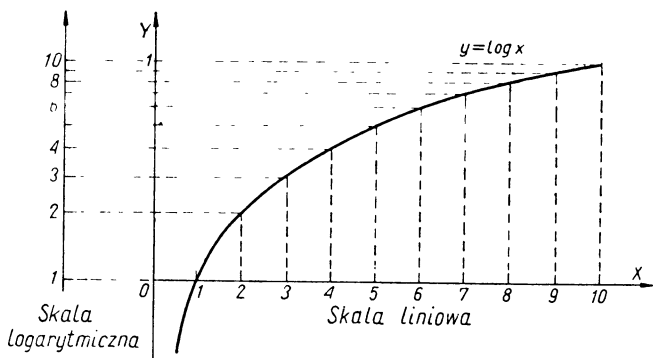
8*. Rozwiązać układ równań

$$\left. \begin{array}{l} y + \log x = 1 \\ x^y = 0,01 \end{array} \right\}$$

56. Suwak logarytmiczny

Suwak logarytmiczny jest to przyrząd rachunkowy służący do wykonywania mnożenia, dzielenia i innych działań. Dokładność obliczeń na suwaku jest mniej więcej taka, jaką dają trzycyfrowe tablice logarytmów. Zależy ona od typu i wielkości suwaka. Istotą suwaka są znajdujące się na nim skale logarytmiczne.

Skala logarytmiczna. Skalę taką można otrzymać rzutując na oś OY rzędne wykresu funkcji logarytmicznej $y = \log x$, (rys. 56-1). Przy każdym rzucie piszemy



Rys. 56-1

tę wartość x , której odpowiada dana rzędna. Takie przyporządkowanie punktom prostej liczb x nazywamy skalą logarytmiczną. Podobnie można zbudować skalę funkcijną dla innej funkcji.

Na rys. 56-1 przyjęto na osi OX jednostkę pięciokrotnie mniejszą niż na osi OY . Zrobiono tak w celu nadania rysunkowi przyjemnych dla oka wymiarów. Na skalę logarytmiczną nie ma to żadnego wpływu.

Początkiem skali logarytmicznej jest 1. Na rys. 56-1 widoczny jest podstawowy odcinek skali logarytmicznej, który odpowiada przedziałowi $\langle 1; 10 \rangle$ na osi OX . Zauważmy, że przedziałom $\langle 10; 100 \rangle$, $\langle 100; 1000 \rangle$, itd., odpowiadają na skali logarytmicznej odcinki przystające do odcinka podstawowego, gdyż $\log 100 - \log 10 = \log 1000 - \log 100 = 1$, ogólnie

$$\log 10^k - \log 10^{k-1} = 1$$

dla każdego $k \in \mathbb{C}$.

Suwak logarytmiczny. Suwak logarytmiczny składa się z *linijki*, *wysuwki* i *okienka* (rys. 56-2). Na linijce i wysuwce znajdują się skale funkcyjne: logarytmiczne i inne.



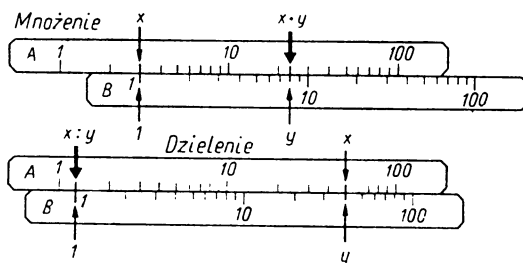
Rys. 56-2

Do mnożenia i dzielenia używamy dwóch skal logarytmicznych, przesuwalnych jedna wzdłuż drugiej. Na rys. 56-2 skale te oznaczone są literami *A* i *B*. Zasada rachunku oparta jest na wzorach:

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y, \quad \text{oraz} \quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

($x, y > 0$). Ze wzorów tych wynika, że mnożenie x przez y za pomocą suwaka polega na dodaniu odcinków $\langle 1; x \rangle$ i $\langle 1; y \rangle$ skali logarytmicznej. Podobnie jest z dzieleniem na suwaku, które polega na odejmowaniu odpowiednich odcinków.

Na rys. 56-3 pokazano sposób ustawiania wysuwki względem linijki w przypadku mnożenia i dzielenia. Strzałki zaznaczone cienką linią wskazują wartości dane, zaś strzałka gruba wskazuje wynik obliczeń. Ruchome okienko ma za zadanie ułatwić dokładne ustawienie wysuwki i odczytanie wyniku.



Rys. 56-3

Na suwaku zaznaczone są także skale logarytmiczne *C* i *D* o dwukrotnie krótszym odcinku podstawowym niż na skalach *A* i *B*. Ponieważ

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$$

więc liczbie x na skali *B* odpowiada liczba $\sqrt{x}$ na skali *C*, zaś liczbie z na skali *C* odpowiada liczba z^2 na skali *B*.

Suwak logarytmiczny może zatem służyć do pierwiastkowania i do potęgowania.

Ponadto na suwaku znajdują się jeszcze inne skale funkcyjne, np. skala liniowa, skala funkcji sinus i funkcji tangens.

Pytania i zadania

1. Co to jest skala logarytmiczna? Opisać konstrukcję takiej skali.
2. Opisać budowę i części suwaka logarytmicznego.
3. Podać i uzasadnić sposób wykonywania na suwaku logarytmicznym a) mnożenia, b) dzielenia, c) pierwiastkowania d) potęgowania.

4. Wykonać na suwaku obliczenia:

a) $123 \cdot 56$, b) $0,17 \cdot 0,083$, c) $2,17 \cdot 5,09$, d) $0,0092 \cdot 57$.

Wynik sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.

5. Odczytać z suwaka wartości:

a) $\sin 36^\circ$, b) $\log 21,6$, c) $\operatorname{tg} 8^\circ 30'$, d) $\sqrt[3]{62,8}$,

a następnie porównać je z wartościami odczytanymi z tablic. Ocenic w procentach dokładność odczytów tych wartości z suwaka.

Odpowiedzi do rozdziału VIII

50.

3. a) $\frac{2}{3}$, b) 0, c) $-4 - 3\sqrt[3]{225} + 9\sqrt[3]{15}$, d) 625.

4. a) $x-y$, b) $x-1$, c) $\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y}$, d) $\frac{1}{x}(x^4 + 4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

5*. $\left(\frac{n}{m}\right)^2$. 6**. 0.

52.

5. a) $\frac{9}{2}$, b) -1 , c) 2, d) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, e) 5.

6. a) $x > 0$, b) $-2 < x < 0$, c) $x < -\frac{4}{9}$, d) $x > -7$,

e) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ lub $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

53.

5. a) 3, b) -3 , c) -3 , d) 8, e) $\frac{4}{3}$, f) $\frac{2}{3}$, g) 0, h) 1.

6. 0. 7*. $\frac{1}{3}a$. 8*. $\frac{b}{1-a}$. 10**. 1.

54.

5. a) $(0; \infty)$, b) zbiór pusty: dla żadnej wartości x funkcja nie jest określona,

c) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. 8. a) 2, b) $\frac{5}{2}$, c) 21, d) 3. 9*. a) $x =$

$= \frac{1}{2}(\sqrt[3]{5}-1)$, b) 0, c) $x = \sqrt[4]{10}$, d) $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = 100$. 10*. $m = 4$.

11**. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{27}{8}$, $z = \frac{32}{3}$. 12*. a) $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$, b) $0 < x < a$ lub

$1 < x < \frac{1}{a}$. 13**. $(1, 1)$, $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$.

3. a) 1,7404, b) 2,8182, c) 5,6325, d) 0,3010, e) 1,5090, f) $\overline{1},8451$, g) $\overline{1},7980$,
 h) $\overline{2},2425$. 4. a) 19 200, b) 0,00884, c) 742,5, d) 0,00203, e) 2,823, f) 0,01852.
 5. a) 2,568, b) 49,73, c) 4,325, d) 1,246, e) 0,3911, f) 4,431, g) 1,272. 6*. 1,6990.

7*. $x = \log_2 5$ 8*. $x_1 = 100$, $y_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{10}$, $y_2 = 2$.

Rozdział IX

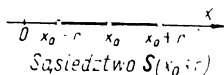
POCHODNA FUNKCJI

57. Granica funkcji

Sumę przedziałów

$$(x_0 - r; x_0) \cup (x_0; x_0 + r)$$

nazywamy *śsiedztwem* punktu x_0 o promieniu r i oznaczamy symbolem $S(x_0; r)$. Do sąsiedztwa $S(x_0; r)$ należą zatem wszystkie i tylko te punkty, które należą do otoczenia $U(x_0; r)$, z wyjątkiem punktu x_0 (rys. 57-1).



Rys. 57-1

Granica funkcji w punkcie. Przypuśćmy, że funkcja f jednej zmiennej x jest określona w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 . W punkcie x_0 funkcja może być lub nie być określona.

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę l i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{lub} \quad f(x) \rightarrow l \quad \text{dla } x \rightarrow x_0$$

jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S$ zbieżnego do x_0 ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do l .

Tę definicję granicy funkcji nazywamy *definicją Heinego*.

Przykład. Niech

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \tag{57.1}$$

Obliczyć granicę tej funkcji w punkcie 2.

Rozwiązanie. Funkcja (57.1) jest określona w każdym sąsiedztwie punktu 2,

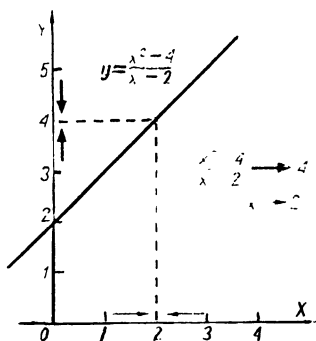
natomiast w punkcie 2 nie jest określona ($\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nie oznacza żadnej liczby). Bierzemy pod uwagę dowolny ciąg (x_n) o którym zakładamy, że jest zbieżny do 2, oraz że $x_n \neq 2$. Następnie budujemy ciąg $(f(x_n))$:

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 4}{x_n - 2} = x_n + 2 \quad (57.2)$$

Uproszczenie licznika z mianownikiem jest tu dopuszczalne, gdyż $x_n \neq 2$. Ponieważ x_n dąży do 2, gdy $n \rightarrow \infty$, więc na podstawie (57.2) łatwo jest zauważyć, że $f(x_n)$ dąży do 4. Stąd

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \quad (57.3)$$

(patrz rys. 57-2).



Rys. 57-2

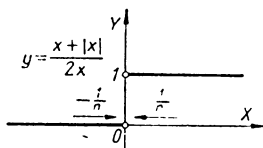
Odp. 4.

Przykład. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2x} \quad (57.4)$$

nie ma granicy w punkcie 0.

Rozwiązanie. Funkcja (57.4) jest określona w każdym sąsiedztwie punktu 0, lecz w punkcie 0 nie jest określona (rys. 57-3). Należy udowodnić, że istnieją takie dwa ciągi (a_n) i (b_n) zbieżne do 0 i mające wyrazy różne od 0, że odpowiadające im ciągi wartości funkcji $(f(a_n))$ i $(f(b_n))$ nie są zbieżne do tej samej granicy. Rys. 57-3 sugeruje nam dobór tych dwóch ciągów. Można przyjąć np. $a_n = \frac{1}{n}$ i $b_n = -\frac{1}{n}$.



Rys. 57-3

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 1, \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{-2} = 0, \text{ cnd.}$$

Wypowiedziana powyżej definicja granicy funkcji f w punkcie x_0 oparta jest na pojęciu granicy ciągu. Definicja ta jest równoważna innej, a mianowicie następującej definicji:

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę l i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{lub} \quad f(x) \rightarrow l \quad \text{gdy} \quad x \rightarrow x_0$$

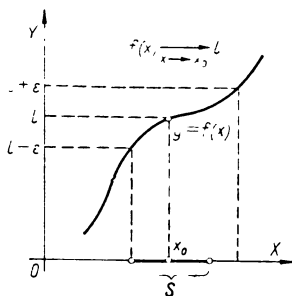
jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie sąsiedztwo S punktu x_0 , że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad (57.5)$$

Ta definicja granicy zwana jest *definicją Cauchy'ego*.

Definicja Cauchy'ego orzeka, że liczba l jest granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $f(x) - l$ jest dowolnie bliska zeru (warunek (57.5)), jeżeli x jest dostatecznie bliskie x_0 (tzn. gdy x należy do sąsiedztwa punktu x_0 o dostatecznie małym promieniu).

Rys. 57-4 stanowi ilustrację definicji Cauchy'ego.



Rys. 57-4

Przykład. Udowodnić, że zachodzi równość (57.3) rozumiana w sensie definicji Cauchy'ego.

Rozwiązanie. Dla każdego $x \neq 2$ mamy

$$f(x) - l = \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 = (x + 2) - 4 = x - 2$$

więc warunek (57.5) jest spełniony gdy $|x - 2| < \varepsilon$ i $x \neq 2$, czyli gdy x należy do sąsiedztwa $S(2, \varepsilon)$ cnd.

U w a g a. Pojęcie granicy funkcji w punkcie x_0 dotyczy właściwości funkcji

w sąsiedztwie tego punktu. Istnienie i wartość $f(x_0)$ nie mają tu znaczenia. Na przykład funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \neq 0 \\ p, & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma w punkcie 0 granicę 1 i wartość p , które mogą być różne. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{dla } x \neq 0 \\ p, & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

nie ma w punkcie 0 granicy i ma wartość p , zaś funkcja (57.1) ma w punkcie 2 granicę, natomiast nie ma w tym punkcie wartości.

Wzory podstawowe. W dalszym ciągu będziemy korzystać z następujących równości

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (57.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (57.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \quad (a > 0, n \in \mathbb{N}) \quad (57.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad (57.9)$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (57.10)$$

Dowód równości (57.6): $|f(x) - c| = |c - c| = 0$, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego x spełniona jest nierówność $|c - c| < \varepsilon$, cnd.

Dowód równości (57.7): $|f(x) - a| = |x - a|$, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie sąsiedztwo $S(a; \varepsilon)$, że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność $|x - a| < \varepsilon$, cnd.

Dowód równości (57.8) opiera się na równości

$$u - v = \frac{u^n - v^n}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$

która jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jeżeli $u \geq 0$ i $v > 0$. Przyjmując $u = \sqrt[n]{x}$ i $v = \sqrt[n]{a}$, mamy więc dla $x \geq 0$ równość

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x - a|}{(\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{x})^{n-2} \cdot \sqrt[n]{a} + \dots + (\sqrt[n]{a})^{n-1}}$$

Stąd

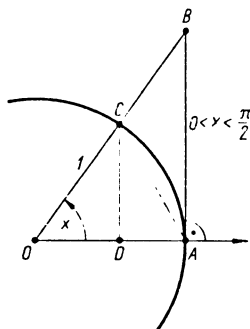
$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{|x - a|}{(\sqrt[n]{a})^{n-1}}$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie sąsiedztwo $S(a; r)$, gdzie r jest nie większe z dwóch liczb: $\varepsilon \cdot (\sqrt[n]{a})^{n-1}$, oraz a (gdyż $x \geq 0$), że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$, cnd.

Lemat. Dla każdego $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ spełnione są nierówności

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (57.11)$$

Dowód. Przyjmujemy oznaczenia jak na rys. 57-5. Mamy więc $OA = OC = 1$, $CD = \sin x$, $AB = \operatorname{tg} x$, $\widehat{AC} = x$.



Rys. 57-5

Ponieważ

$$\text{pole } \triangle OAC < \text{pole wycinka kołowego } OAC < \text{pole } \triangle OAB$$

więc

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

cnd.

Wniosek. Dla każdego x spełniona jest nierówność

$$|\sin x| \leq |x| \quad (57.12)$$

Istotnie, dla $x = 0$ lub $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ nierówność jest oczywista, zaś dla $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ mamy $|\sin x| = \sin |x|$, więc na podstawie pierwszej z nierówności (57.11) dostajemy (57.12).

Dowód równości (57.9) opiera się na wzorze

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$$

Ponieważ na podstawie (57.12) mamy $\left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq \frac{|x-a|}{2}$, więc korzystając z oczywistej nierówności $\left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 1$ dostajemy

$$|\sin x - \sin a| \leq 2 \cdot \frac{|x-a|}{2} \cdot 1 = |x-a|$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie sąsiedztwo $S(a; \varepsilon)$, że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$, cnd.

Dowód równości (57.10). Niech $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Dzielimy obie strony każdej z nierówności (57.11) przez $\sin x$ i dostajemy

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

więc

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{czyli} \quad -1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$$

Stąd

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

Z uwagi na pierwszą nierówność (57.11) mamy

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} x^2 < x^2$$

a zatem

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x^2$$

Ponieważ dla $x \geq \frac{\pi}{2}$ mamy $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{2}{\pi} < \frac{2}{3}$, a ponadto funkcja $\frac{\sin x}{x}$ jest parzysta, więc otrzymane nierówności są prawdziwe dla każdego $x \neq 0$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie sąsiedztwo $S(0; 1/\varepsilon)$, że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$, cnd.

Twierdzenie (o rachunku granic). Jeżeli funkcje f i g mają w punkcie x_0 granice

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = k \quad (57.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + k \quad (57.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = l - k \quad (57.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot k \quad (57.16)$$

oraz przy dodatkowym założeniu, że $k \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{k} \quad (57.17)$$

Dowód pomijamy.

To twierdzenie wypowiadamy zazwyczaj krótko: granica sumy dwóch funkcji równa się sumie granic tych funkcji, lub jeszcze krócej: granica sumy równa się sumie granic itd.

Wniosek. Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 granicę, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Przykłady

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}$$

Podstawiamy $u = 4x$. Stąd $u \rightarrow 0$ gdy $x \rightarrow 0$, więc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

Podstawiamy $u = 1+x$. Stąd $u \rightarrow 1$ gdy $x \rightarrow 0$, więc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{u}+1} = \frac{1}{2}$$

Uwaga. Z istnienia granic (57.13) wynika istnienie granicy (57.14) i następnych (przy dodatkowym założeniu $k \neq 0$ w przypadku (57.17)) ale nie na odwrót. Na przykład funkcja $f(x)$ określona wzorem (5.4) nie ma granicy w punkcie 0, funkcja $(-f(x))$ także nie ma w tym punkcie granicy, natomiast granica sumy tych funkcji istnieje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + (-f(x))] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Granice niewłaściwe. Niech $f(x)$ oznacza funkcję określoną w sąsiedztwie S punktu x_0 .

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *granicę niewłaściwą* ∞ i piszemy

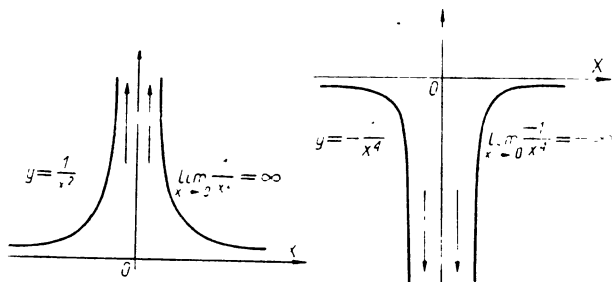
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S$ zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞ .

Analogicznie określamy i oznaczamy granicę niewłaściwą $-\infty$. Na przykład

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^4} = -\infty$$

(rys. 57-6).



Rys. 57-6

Granice jednostronne. Niech $f(x)$ oznacza funkcję określoną w przedziale $(a; x_0)$. Rozważmy zachowanie się funkcji $f(x)$ gdy $x \rightarrow x_0$ i $x < x_0$. W tym przypadku mówimy, że x dąży do x_0 od lewej strony (na osi OX) i piszemy $x \rightarrow x_0^-$.

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę lewostronną l i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in (a; x_0)$ zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do l .

Analogicznie określamy granicę prawostronną p i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = p$$

Na przykład

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + |x|}{2x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + |x|}{2x} = 1$$

(patrz rys. 57-3).

Funkcja ma w punkcie x_0 granicę wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie obie granice jednostronne, które są jednakowe.

Granice jednostronne mogą być niewłaściwe, np.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Granice funkcji w nieskończoności. Niech $f(x)$ oznacza funkcję określoną w przedziale nieskończonym $(a; \infty)$.

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma w nieskończoności granicę l i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in (a; \infty)$ rozbitego do ∞ , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do l .

Na przykład

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Analogicznie określamy granicę funkcji f w minus nieskończoności, którą oznaczamy symbolem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Na przykład

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Rozpatrujemy także granice niewłaściwe w ∞ lub $-\infty$, np.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{2x} = \infty$$

Pytania i zadania

1. Co to jest sąsiedztwo punktu x_0 o promieniu r ?
2. Porównać pojęcia: *otoczenie* i *sąsiedztwo*.
3. Podać definicję granicy funkcji f w punkcie x_0 a) Heinego, b) Cauchy'ego.
4. Podać z pamięci wartość granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
5. Podać twierdzenie o rachunku granic.
6. Podać określenie granicy oraz granicy niewłaściwej oznaczonej symbolem
 - a) $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, b) $\lim_{x \rightarrow x_0+} g(x)$, c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, d) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Podać interpretację geometryczną.

- 7*. Wyjaśnić na podstawie definicji, co oznacza równość

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{2x^2} = \infty, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{1}{3-x} = -\infty.$$

Podać interpretację geometryczną, sporządzając odręczne szkice.

- 8*. Wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

9*. Obliczyć

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x - 1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}$,
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$,
g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 3}$, h) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x - 1}{x^2}$, i) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x - 1}{x^2}$.

10*. Udowodnić, że dla każdego $x \in S(0; 2)$ spełniona jest nierówność $x^2 < 2|x|$.
Podać interpretację geometryczną.

11*. Dane jest równanie

$$2mx^2 - (m+1)x - 1 = 0$$

Do jakich granic dążą pierwiastki tego równania, gdy $m \rightarrow \infty$?

12*. Obliczyć granicę

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x]$, b) $\lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right)$.

13*. Na podstawie definicji udowodnić, że $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$.

Wskazówka: $||x| - |a|| \leq |x - a|$.

58. Ciągłość funkcji

Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Definicja. Jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (58.1)$$

to mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie x_0 .

Funkcja f jest więc ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° ma w punkcie x_0 granicę $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

2° ma w punkcie x_0 wartość $f(x_0)$

3° granica l równa się wartości $f(x_0)$

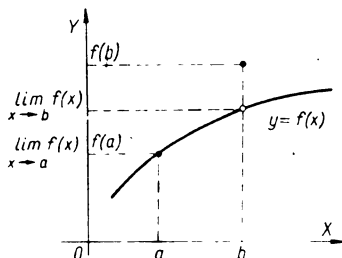
Na przykład funkcja o wykresie przedstawionym na rys. 58-1 jest ciągła w punkcie a , natomiast nie jest ciągła (mówimy: jest *nieciągła*) w punkcie b , gdyż w tym punkcie nie jest spełniony warunek 3°.

Funkcja ciągła w każdym punkcie przedziału nazywa się *ciągłą w tym przedziale*; granicę na końcu przedziału rozumiemy tu jako granicę jednostronną.

Punkt, w którym funkcja jest nieciągła, nazywamy *punktem nieciągłości* tej funkcji.

Ciągłość niektórych funkcji. Wobec równości (57.6) i (57.7) funkcja *stała* oraz funkcja *tożsamościowa* są ciągłe w każdym punkcie. Ponieważ *wielomian* powstaje

z funkcji tych dwóch rodzajów za pomocą mnożenia i dodawania, więc na podstawie twierdzenia o rachunku granic jest on także funkcją ciągłą. Na podstawie tego samego twierdzenia *funkcja wymierna* jest ciągła w każdym punkcie z wyjątkiem



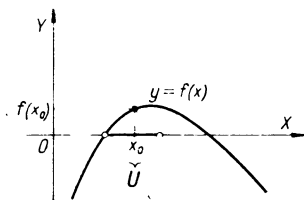
Rys. 58-1

punktów zerowych mianownika. Równość (57.8) oznacza ciągłość funkcji *pierwiastkowej*, zaś równość (57.9), oraz równość podana w zadaniu 8* na str. 266, świadczą o ciągłości funkcji *sinus* i funkcji *cosinus*. Na podstawie twierdzenia o rachunku granic wynika stąd ciągłość funkcji $\operatorname{tg} x$, czyli $\frac{\sin x}{\cos x}$ w każdym punkcie x_0 , w którym $\cos x_0 \neq 0$, oraz ciągłość funkcji $\operatorname{ctg} x$, czyli $\frac{\cos x}{\sin x}$ w każdym punkcie x_0 , w którym $\sin x_0 \neq 0$.

Właściwości funkcji ciągłych. Podamy teraz bez dowodów kilka podstawowych właściwości funkcji ciągłych.

Twierdzenie (o lokalnym zachowaniu znaku). *Jeżeli funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 jest w tym punkcie ciągła i $f(x_0) > 0$, to istnieje takie otoczenie U punktu x_0 , że $f(x) > 0$ dla każdego $x \in U$.*

Na rys. 58-2 przedstawiona jest interpretacja geometryczna tego twierdzenia.



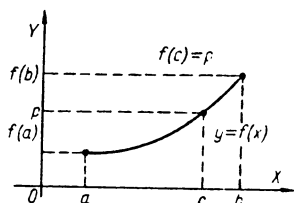
Rys. 58-2

Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie w przypadku, gdy funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i $f(x_0) < 0$; wówczas $f(x) < 0$ w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Uwaga. Funkcja nieciągła może nie zachowywać znaku w żadnym otoczeniu punktu, w którym ma wartość różną od zera. Na przykład funkcja $f(x) = \frac{1}{x} +$

$+ \operatorname{sgn} x$ ma w punkcie 0 wartość dodatnią $\frac{1}{2}$, lecz w każdym otoczeniu tego punktu przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne.

Twierdzenie (o przyjmowaniu wartości pośrednich). *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$, $f(a) \neq f(b)$, oraz liczba p znajduje się między $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje taka liczba $c \in (a; b)$, że $f(c) = p$ (rys. 58-3).*



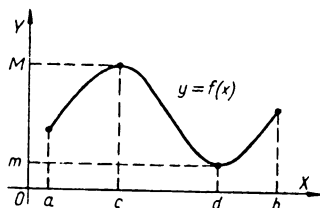
Rys. 58-3

W szczególności, jeżeli $f(a)$ i $f(b)$ są różnych znaków, to istnieje takie c , że $f(c) = 0$. Liczba c jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$.

Funkcja nieciągła określona w przedziale $\langle a; b \rangle$ może nie przyjmować w tym przedziale każdej wartości pośredniej między $f(a)$ i $f(b)$. Na przykład funkcja $f(x) = \operatorname{sgn} x$ jest określona w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, natomiast nie istnieje taka liczba $c \in (-1; 1)$, że $f(c) = \frac{1}{2}$.

Twierdzenie (o przyjmowaniu wartości najmniejszej i największej). *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ to w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą, oraz w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość największą.*

Rys. 58-4 ilustruje treść tego twierdzenia.



Rys. 58-4

Jeżeli funkcja nie jest ciągła, lub gdy przedział nie jest domknięty, to funkcja może nie przyjmować w tym przedziale wartości najmniejszej i wartości największej. Tak jest na przykład z funkcją

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{gdy } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{gdy } x = 0 \text{ lub } x = 1 \end{cases}$$

oraz z funkcją $\cotg x$ w przedziale $(0; \pi)$.

1. Podać określenie ciągłości funkcji w punkcie.
2. Co to znaczy, że funkcja jest ciągła w przedziale?
3. Podać przykład funkcji a) ciągłej w punkcie 1, b) nieciągłej w punkcie 1.
4. Udowodnić ciągłość jednomianu $f(x) = ax^n$.
5. Dokonać przeglądu funkcji elementarnych z punktu widzenia ich ciągłości.
6. Podać twierdzenie a) o lokalnym zachowaniu znaku, b) o przyjmowaniu wartości pośrednich, c) o przyjmowaniu wartości najmniejszej i największej.
- 7*. Na podstawie właściwości funkcji ciągłych udowodnić, że równanie $x^3 + px + q = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek.
- 8*. Udowodnić, że jeżeli dziedziną funkcji ciągłej jest przedział domknięty, to przeciwdziedziną jest także przedział domknięty.
- 9*. Naszkicować wykres funkcji i zbadać jej ciągłość

$$a) y = \frac{1}{[x]}, \quad b) y = 3x - [x], \quad c) y = \frac{1}{\sin x}, \quad d) y = \frac{1}{\cos x},$$

$$e) y = \frac{x + |x|}{2} \cos x, \quad f) y = \frac{x}{|x|} \cos 2x, \quad g) y = [\sin 2x].$$

- 10*. Podać przykład dwóch funkcji nieciągłych, których suma jest funkcją ciągłą. Czy istnieją dwie funkcje ciągłe, których suma jest funkcją nieciągłą?

59. Pochodna funkcji

Niech f oznacza funkcję zmiennej x określoną w pewnym otoczeniu U punktu x_0 , zaś $h \neq 0$ taką liczbę, że $x_0 + h \in U$.

Iloraz

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (59.1)$$

nazywamy *ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h . Nazwa tego ilorazu pochodzi stąd, że w liczniku mamy różnicę wartości funkcji, zaś w mianowniku różnicę wartości argumentu, gdyż $h = (x_0 + h) - x_0$.

Definicja. Jeżeli iloraz różnicowy (59.1) ma granicę gdy h dąży do zera, to tę granicę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy $f'(x_0)$.

Mamy więc

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (59.2)$$

Zamiast $f'(x_0)$ piszemy też $(f(x))'_{x_0}$.

Jeżeli granica (59.2) istnieje, to mówimy, że funkcja f ma *pochodną* w punkcie x_0 , lub że jest *różniczkowalna* w tym punkcie.

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji x^2 w punkcie 2.

Rozwiązanie. Tworzymy iloraz różnicowy funkcji x^2 w punkcie 2 dla przyrostu h i obliczamy jego wartość

$$\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{1}{h} (4 + 4h + h^2 - 4) = 4 + h$$

Stąd

$$(x^2)'_2 = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$$

Odp. 4.

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji x^3 w punkcie x_0 .

Rozwiązanie. Tworzymy iloraz różnicowy i obliczamy jego wartość

$$\frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{1}{h} (x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3) = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2$$

Stąd

$$(x^3)'_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 h + h^2) = 3x_0^2$$

Odp. $3x_0^2$.

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji $\frac{1}{x}$ w punkcie x_0 , ($x_0 \neq 0$).

Rozwiązanie

$$\left(\frac{1}{x}\right)'_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Odp. $-\frac{1}{x_0^2}$.

Różniczkowalność a ciągłość. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła. Istotnie, ponieważ

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

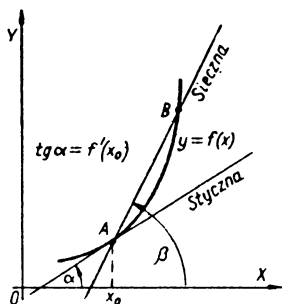
(dla każdego h z pewnego sąsiedztwa zera), więc gdy $h \rightarrow 0$, to różnica $f(x_0 + h) - f(x_0)$ dąży do iloczynu $f'(x_0) \cdot 0$, czyli do 0. Podstawiając $x = x_0 + h$ mamy $x \rightarrow x_0$ gdy $h \rightarrow 0$, więc ostatecznie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0, \quad \text{czyli} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

co świadczy o ciągłości funkcji f w punkcie x_0 .

Ciągłość funkcji jest zatem warunkiem koniecznym dla istnienia pochodnej, choć nie jest warunkiem wystarczającym; świadczy o tym przykład funkcji $|x|$ ciągłej w punkcie 0 i nie mającej w tym punkcie pochodnej, ponieważ iloraz różnicowy $\frac{|h|}{h} = \operatorname{sgn} h$ nie ma granicy, gdy $h \rightarrow 0$.

Interpretacja geometryczna pochodnej przedstawiona jest na rys. 59-1. Iloraz różnicowy jest równy tangensowi kąta nachylenia β siecznej AB do osi OX , czyli współczynnikowi kierunkowemu tej siecznej. Pochodna $f'(x_0)$, a więc granica ilo-



Rys. 59-1

razu różnicowego, jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie A o odciętej x_0 :

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (59.3)$$

gdzie α oznacza kąt nachylenia tej stycznej do osi OX .

Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$ ma równanie

$$y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0) \quad (59.4)$$

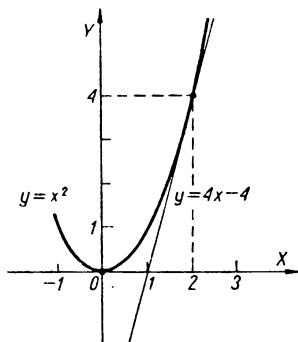
Przykład. Napisać równanie stycznej do paraboli $y = x^2$ w punkcie $P(2, 4)$.

Rozwiązanie. Mamy tu $f(x) = x^2$, więc $f'(2) = 4$. Równanie szukanej stycznej ma więc postać

$$y - 4 = 4(x - 2), \quad \text{skąd} \quad y = 4x - 4$$

Odp. $y = 4x - 4$.

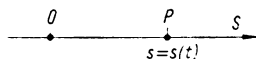
Rys. 59-2 ilustruje ten przykład.



Rys. 59-2

Interpretacja fizyczna pochodnej. Załóżmy, że punkt P porusza się po osi liczbowej OS (rys. 59-3) i że współrzędna s punktu P jest funkcją czasu t

$$s = s(t) \quad (59.4)$$



Rys. 59-3

Tę zależność s od t nazywamy *równaniem ruchu*. Jeżeli Δt oznacza przyrost czasu, to iloraz różnicowy

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

jest *prędkością średnią* punktu P od chwili t do chwili $t + \Delta t$. Granica tego ilorazu, gdy $\Delta t \rightarrow 0$ jest *prędkością $v(t)$* punktu P w chwili t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) \quad (59.5)$$

Pochodna jako funkcja. Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie x pewnego przedziału (lub innego zbioru punktów), to określona jest w tym przedziale (zbiorze) funkcja

$$x \rightarrow y = f'(x)$$

zwana krótko *pochodną funkcji f* . Na przykład

$$f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x, \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$$

(por. przykłady na str. 271).

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji $\sin x$.

Rozwiązanie. Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} = \\ &= \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

wiec korzystając z równości (57.10) oraz z ciągłości funkcji cosinus, dzięki której $\cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \rightarrow \cos x$ gdy $h \rightarrow 0$, dostajemy

$$(\sin x)' = \cos x \quad (59.6)$$

dla $x \in (-\infty; \infty)$.

$$(\cos x) = -\sin x \quad (59.7)$$

dla $x \in (-\infty; \infty)$.

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji $\sqrt{x}$, $x \in (0; \infty)$.

Rozwiązanie. Ponieważ

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

więc korzystając z równości (57.8) oraz z twierdzenia o rachunku granic, dostajemy

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (59.8)$$

dla $x \in (0; \infty)$.

Pytania i zadania

1. Co to jest iloraz różnicowy?
2. Wypowiedzieć i napisać określenie pochodnej $f'(x_0)$.
3. Udowodnić, że każda funkcja różniczkowalna w punkcie x_0 jest w tym punkcie ciągła. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?
4. Podać interpretację geometryczną pochodnej.
5. Podać interpretację fizyczną pochodnej.
6. Podać przykład funkcji, która nie ma pochodnej w punkcie 4.
7. Obliczyć na podstawie definicji

$$a) f'(2), \text{ gdy } f(x) = x^2 + 2x, \quad b) f'(1), \text{ gdy } f(x) = \frac{1}{x},$$

$$c) f'(0), \text{ gdy } f(x) = x^3 + 5x, \quad d) f'(-3) \text{ gdy } f(x) = \frac{x}{x+1},$$

$$e) f'(0), \text{ gdy } f(x) = \sin x, \quad f) f'(\pi), \text{ gdy } f(x) = \cos x.$$

$$g) f'(5), \text{ gdy } f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad h) f'(3), \text{ gdy } f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}.$$

8*. Znaleźć równanie stycznej do linii $y = x^3 + 2x$ w punkcie $(1, 3)$.

9*. Sporządzić wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{gdy } x \leq 0 \\ 3x, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

a następnie udowodnić, że ma ona pochodną w każdym punkcie z wyjątkiem punktu 0.

10*. Sporządzić wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{gdy } x \leq 0 \\ x^2 - x, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

a następnie udowodnić, że pochodna $f'(x)$ istnieje dla każdego x .

60. Obliczanie pochodnej

Podamy tu podstawowe twierdzenia o obliczaniu pochodnych. Dowody tych twierdzeń są podobne: piszemy odpowiedni iloraz różnicowy, a następnie obliczamy jego granicę gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera.

Pochodna funkcji stałej jest równa zeru:

$$(c)' = 0 \quad (60.1)$$

ponieważ dla $f(x) = c$ mamy

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

Pochodna sumy funkcji. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne, to

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \quad (60.2)$$

Dowód. Oznaczamy $F(x) = f(x) + g(x)$. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x) + g'(x), \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

Pochodna różnicy funkcji. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne, to

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) \quad (60.3)$$

Dowód jest analogiczny do dowodu wzoru (60.2).

Pochodna iloczynu funkcji. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne, to

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (60.4)$$

Dowód. Oznaczamy $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. Piszemy iloraz różnicowy, a następnie odejmujemy i dodajemy w liczniku $f(x) \cdot g(x+h)$:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

W przeprowadzonym dowodzie skorzystaliśmy dwukrotnie z twierdzenia o rachunku granic (granica iloczynu). Ponadto skorzystaliśmy z tego, że istnienie pochodnej $g'(x)$ zapewnia ciągłość funkcji $g(x)$, a stąd $g(x+h) \rightarrow g(x)$ gdy $h \rightarrow 0$.

Wniosek. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna, to

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

Pochodna ilorazu funkcji. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne, przy czym $g(x) \neq 0$, to

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (60.5)$$

Dowód. Oznaczamy $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} = \\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x+h)g(x)} = \\ &= \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h) \cdot g(x)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

Pochodna funkcji potęgowej:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in (-\infty; \infty) \quad (60.6)$$

Dowód (indukcyjny). Dla $n = 1$ wzór (60.6) jest prawdziwy, ponieważ dla $f(x) = x$ mamy

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

zaś 1 można zapisać w postaci $1 \cdot x^0$ (patrz str. 157, rozszerzenie dziedziny jednomianu).

Zakładamy, że wzór (60.6) jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej n i bierzemy pod uwagę funkcję $f(x) = x^{n+1}$, czyli $f(x) = x^n \cdot x$. Korzystając ze wzoru (60.4) na pochodną iloczynu, dostajemy

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}, \quad \text{cdn.}$$

Przykłady

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 3; \quad y' = (x^2)' + (3)' = 2x + 0 = 2x, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \\ y &= 5x^4; \quad y' = (5)' \cdot x^4 + 5 \cdot (x^4)' = 0 + 20x^3 = 20x^3, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \\ y &= \frac{1}{x}; \quad y' = \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{0 - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{dla } x \neq 0 \\ y &= \frac{2x}{x+1}; \quad y' = \frac{2 \cdot (x+1) - 2x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}, \quad \text{dla } x \neq -1 \end{aligned}$$

Można udowodnić, że dla $x \in \mathbb{R}_+$ wzór (60.6) jest prawdziwy dla każdego wymiernego wykładnika n .

Przykład. Obliczyć za pomocą wzoru (60.6) pochodną funkcji $\sqrt{x}$.

Rozwiązanie. Dla $x > 0$ mamy

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Odp. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (por. wzór (59.8)).

Pochodna funkcji tangens:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{dla } \cos x \neq 0 \quad (60.7)$$

Istotnie, ponieważ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, więc na podstawie wzoru (60.5) na pochodną ilorazu dostajemy

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

Pochodna funkcji cotangens:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{dla } \sin x \neq 0 \quad (60.8)$$

Wyprowadzenie tego wzoru jest analogiczne do wyprowadzenia wzoru (60.7).

W tabl. 60-1 zebrano najważniejsze wzory na obliczanie pochodnych. Te wzory należy pamiętać.

Tabl. 60-1

funkcja	pochodna	uwagi
c	0	$x \in \mathbf{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbf{R}$ gdy $n \in \mathbf{N}$ $x \in \mathbf{R}_+$ gdy $n \in \mathbf{W}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbf{R}_+$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbf{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	dla $\cos x \neq 0$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	dla $\sin x \neq 0$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$f(x)$ i $g(x)$ różniczkowalne
$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$	
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$g(x) \neq 0$

Przykłady

$$y = x^2 \cdot \sin x; \quad y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cos x, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{\cos x}{x}; \quad y' = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x \cdot 1}{x^2} = \\ = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2} \quad \text{dla } x \neq 0$$

$$y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{dla } x > 0 \text{ i } \cos x \neq 0$$

$$y = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{ctg} x; \quad y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \operatorname{ctg} x - \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{dla } \sin x \neq 0$$

Pytania i zadania

1. Wyprowadzić wzory z tabl. 60-1 (str. 277).
2. Obliczyć na podstawie definicji pochodne funkcji
a) $\frac{1}{x^2}$, b) $\sqrt[3]{x}$, c) $\frac{x}{x+1}$, d) $\operatorname{tg} x$.
3. Korzystając ze wzorów z tabl. 60-1, obliczyć pochodne funkcji:
a) $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, b) $2\sqrt{x} + \sin x - \cos x$, c) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$,
d) $\frac{\sin x}{x}$, e) $\frac{x^2 + 1}{x}$, f) $\frac{x^3 + 1}{x + 1}$, g) $\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$,
h) $x^3 \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$, i) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, j) $\frac{1}{2 + \sin x}$,
k) $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$, l) $\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$, m) $\cos^2 x$, n) $\sin^2 x$.
- 4*. Napisać równanie stycznej do linii $y = \sin x$ w punkcie o odciętej: a) $\frac{\pi}{4}$,
b) $\frac{3}{4}\pi$, c) π .
5. Dla jakich wartości x pochodna funkcji $x^3 + x^2 - x + 1$ jest równa zero?
- 6*. Udowodnić, że liczba x_0 jest pierwiastkiem podwójnym trójkianu $x^2 + px + q$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest punktem zerowym tego trójkianu i jego pochodnej.

61. Pochodna funkcji złożonej

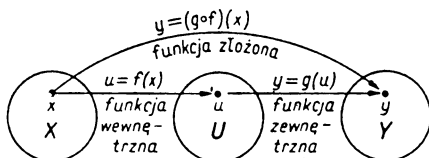
Funkcja złożona. Niech będą dane dwie funkcje: f , której dziedziną jest zbiór X , zaś przeciwdziedziną zbiór U , oraz funkcja g , której dziedziną zawiera zbiór U , zaś przeciwdziedziną jest zbiór V . Para uporządkowana funkcji f, g określa nową

funkcję F , której dziedziną jest zbiór X , zaś przeciwdziedziną jest pewien podzbiór Y zbioru V : każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowany jest element $u = f(x)$ zbioru U , a następnie każdemu elementowi $u \in U$ przyporządkowany jest element $y = g(u)$ zbioru Y . Funkcję F nazywamy w tym przypadku *funkcją złożoną* z funkcji f i g lub *superpozycją* (złożeniem) tych dwóch funkcji. Piszemy

$$F(x) = g(f(x)) \quad \text{lub} \quad F(x) = (g \circ f)(x)$$

przy czym f nazywamy funkcją *wewnętrzną*, zaś g — funkcją *zewnętrzną*.

Rys. 61-1 ilustruje pojęcie funkcji złożonej.



Rys. 61-1

Przykład. Funkcję $y = \sin 5x$ można traktować jako funkcję złożoną $g(f(x))$, przy czym $f(x) = 5x$, $g(u) = \sin u$. Dziedziną tej funkcji złożonej jest zbiór $\mathbf{R}$, zaś przeciwdziedziną $\mathbf{Y}$ jest przedział $\langle -1; +1 \rangle$. Przeciwdziedziną U funkcji wewnętrznej jest zbiór $\mathbf{R}$.

Można udowodnić, że *superpozycja $g \circ f$ dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą*: jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 , zaś funkcja $g(u)$ jest ciągła w punkcie $u_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 .

Na przykład funkcja $y = \cos x^2$ jest ciągła w każdym punkcie, ponieważ funkcja x^2 jest ciągła i funkcja $\cos u$ jest ciągła.

Pochodna funkcji złożonej. Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną $f'(x_0)$, zaś funkcja g ma w punkcie $u_0 = f(x_0)$ pochodną $g'(u_0)$, to funkcja złożona $F = g \circ f$ ma w punkcie x_0 pochodną

$$F'(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \quad (61.1)$$

Dowód. Niech $h \neq 0$ oznacza przyrost zmiennej x , zaś $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Dla uproszczenia dowodu zakładamy dodatkowo, że istnieje takie sąsiedztwo $\mathcal{S}$ punktu x_0 , w którym $f(x) \neq f(x_0)$. Wynika stąd, że dla każdego h dostatecznie bliskiego zeru ($x_0 + h \in \mathcal{S}$) mamy $k \neq 0$. Ponieważ $F(x_0) = g(f(x_0)) = g(u_0)$, oraz $F(x_0 + h) = g(f(x_0 + h)) = g(u_0 + k)$, więc dla każdego $x_0 + h \in \mathcal{S}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{g(u_0 + k) - g(u_0)}{h} = \frac{g(u_0 + k) - g(u_0)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \\ &= \frac{g(u_0 + k) - g(u_0)}{k} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \\ &\rightarrow g'(u_0) \cdot f'(x_0), \quad \text{cnd.} \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z istnienia pochodnych $g'(u_0)$ i $f'(x_0)$, oraz z twierdzenia o granicy iloczynu dwóch funkcji.

Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie x pewnego zbioru X , zaś funkcja g ma pochodną w każdym punkcie $u = f(x)$ zbioru U , to zastępując we wzorze (61.1) x_0 przez x , oraz u_0 — czyli $f(x_0)$ — przez $f(x)$, dostaniemy

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \quad \text{dla } x \in X \quad (61.2)$$

Wzór (61.2) można krótko tak odczytać: *pochodna funkcji złożonej jest równa iloczynowi pochodnej funkcji zewnętrznej g przez pochodną funkcji wewnętrznej f .*

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji

$$y = \cos^3 x$$

Rozwiązanie. Niech $y = g(u) = u^3$, $u = f(x) = \cos x$. Ponieważ $g'(u) = 3u^2$, oraz $f'(x) = -\sin x$, więc na podstawie wzoru (61.2)

$$y' = 3(\cos x)^2 \cdot (-\sin x)$$

Odp. $-3 \cos^2 x \sin x$, dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji

$$y = \sqrt{\sin x}$$

Rozwiązanie. Niech $y = \sqrt{u}$, $u = \sin x$. Stąd

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$$

Odp. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, dla $\sin x > 0$.

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

Rozwiązanie. Niech $y = \sqrt{u}$, $u = x + \sqrt{x}$. Stąd

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Odp. $\frac{1 + 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$, dla $x > 0$.

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji

$$y = \sin 2x$$

Rozwiązanie (Pierwszy sposób.) Ponieważ $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, więc korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu otrzymamy

$$y' = 2 \cos x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot (-\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$$

Rozwiązanie (Drugi sposób.) Niech $y = \sin u$, $u = 2x$. Stąd na podstawie wzoru (61.2) dostajemy

$$y' = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

Odp. $2 \cos 2x$.

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja złożona? Podać przykład.
2. Co wiadomo o ciągłości funkcji złożonej?
3. Wypowiedzieć twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej.
- 4*. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $\sqrt{1+x^2}$, b) $\sqrt{1-x^2}$, c) $\sin x^2$, d) $\cos^5 x$,
 e) $\sin(6x+7)$, f) $\operatorname{tg} 2x$, g) $\sqrt{\operatorname{ctg} 5x}$, h) $\sqrt[3]{1+\sin^2 x}$,
 i) $\frac{1}{\sin x}$, j) $\operatorname{tg} \sqrt{x}$, k) $\cos(\sin x)$, l) $\sqrt{\sin x}$,
 m) $\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$, n) $\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}$, o) $\frac{\cos 2x}{1+x^2}$, p) $\frac{x}{1+\cos^2 x}$.

- 5*. Znaleźć punkt na krzywej $y = x^3 - x$, w którym styczna jest równoległa do OX .
 6*. Znaleźć punkt na krzywej $y = \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \pi$, w którym styczna jest nachylona do OX pod kątem 45° .

62. Pochodna drugiego rzędu

Jeżeli funkcja pochodna $f'(x)$ ma pochodną, to tę pochodną nazywamy *drugą pochodną* funkcji $f(x)$ i oznaczamy symbolem $f''(x)$.

Mamy więc

$$f''(x) = \frac{d}{dx} (f'(x)) \quad (62.1)$$

Przykłady

$$\begin{aligned} y &= x^3 + 2x, & y' &= 3x^2 + 2, & y'' &= 6x \\ y &= \sin x, & y' &= \cos x, & y'' &= -\sin x \\ y &= \frac{1}{x}, & y' &= -\frac{1}{x^2}, & y'' &= \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Interpretacja fizyczna drugiej pochodnej. Jeżeli równanie ruchu punktu P po osi OS jest postaci $s = s(t)$, to jak wiadomo (por. p. 59) pochodna $s'(t)$ przedstawia prędkość $v(t)$ tego punktu w chwili t . Iloraz różnicowy

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

jest *przyspieszeniem średnim* punktu P od chwili t do chwili $t+\Delta t$. Granica tego ilorazu gdy $\Delta t \rightarrow 0$ jest to przyspieszenie $a(t)$ punktu P w chwili t :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) \quad (62.2)$$

Przykład. Jeżeli ruch jest jednostajnie zmienny

$$s^* = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} at^2$$

to

$$v(t) = v_0 + at, \quad a(t) = a \quad (\text{stałe przyspieszenie})$$

Przykład. Udowodnić, że funkcja $y = \sin x - 2 \cos x$ spełnia równanie $y'' + y = 0$.

Mamy $y' = \cos x + 2 \sin x$, $y'' = -\sin x + 2 \cos x$, więc $y'' + y = (-\sin x + 2 \cos x) + (\sin x - 2 \cos x) = 0$, cnd.

Jeżeli druga pochodna $f''(x)$ ma pochodną, to tę pochodną nazywamy *trzecią pochodną* funkcji $f(x)$ i oznaczamy $f'''(x)$.

Podobnie określamy czwartą i wyższe pochodne.

Przykład

$$y = x^5, \quad y' = 5x^4, \quad y'' = 20x^3, \quad y''' = 60x^2, \quad y^{IV} = 120x, \quad \text{itd.}$$

Pytania i zadania

1. Podać określenie drugiej pochodnej.
2. Omówić interpretację fizyczną drugiej pochodnej.
3. Obliczyć drugą pochodną funkcji:

a) $x \sin x$, b) $\cos 2x$, c) $\sin^2 x$, d) $x^3 + 3x^2 + x + 1$,

e) $x^2 \cos x$, f) $\sqrt{x}$, g) $\frac{1}{x^2}$, h) $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, i) $\lg x$,

j) $\frac{x+1}{x}$, k) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, l) $\frac{1}{\sin x}$, m) $x^6 + 3x^3 + 2x + 3$.

4*. Znaleźć wartość x , dla której druga pochodna funkcji $x^3 - x$ jest równa zeru.

5*. Udowodnić, że funkcja $y = A \sin x + B \cos x$, A, B — stałe dowolne, spełnia równanie $y'' + y = 0$.

Odpowiedzi do rozdziału IX

57.

9*. a) 6, b) 2, c) 3, d) $\frac{1}{2}$, e) 1, f) $\frac{2}{\pi}$, g) $\frac{1}{2}$.

h) $-\infty$, i) $-\infty$. 11*. 0 i $\frac{1}{2}$. 12*. a) $\frac{a+b}{2}$, b) 0.

58.

5. patrz *ciągłość niektórych funkcji*, str. 267. 10*. Nie istnieją, gdyż suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

59.

3. tw. odwrotne jest fałszywe. 7. a) 6, b) -1 , c) 5, d) $\frac{1}{4}$, e) 1, f) 0, g) $-0,04$, h) 1.

8*. $5x - y - 2 = 0$.

60.

2. a) $\frac{-2}{x^3}$, dla $x \neq 0$, b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, dla $x \neq 0$, c) $\frac{1}{(x+1)^2}$, dla $x \neq -1$,
 d) $\frac{1}{\cos x}$, dla $\cos x \neq 0$. 3. a) $3x^2 + 4x - 3$, dla $x \in \mathbf{R}$, b) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x$,
 dla $x \in \mathbf{R}_+$, c) 1, dla $x \neq 1$, d) $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, dla $x \neq 0$, e) $\frac{x^2 - 1}{x^2}$, dla $x \neq 0$,
 f) $2x - 1$, dla $x \neq -1$, g) 1 dla $x \in \mathbf{R}$, h) $2x^2 \sin x + (x^3 + 2x) \cos x$, dla $x \in \mathbf{R}$,
 i) $\frac{-1}{2\sqrt[3]{x^3}}$, dla $x \in \mathbf{R}_+$, j) $\frac{-\cos x}{(2 + \sin x)^2}$, dla $x \in \mathbf{R}$, k) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$, dla $\cos x \neq 0$,
 $\operatorname{tg} x \neq -1$, l) $\frac{4x \cos 2x - \sin 2x}{2x \sqrt{x}}$ dla $x > 0$, m) $-\sin 2x$, n) $\sin 2x$.
- 4*. a) $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, b) $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{3}{4} \pi \right)$,
 c) $y = -x + \pi$. 5. $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

61.

- 4*. a) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, b) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$, c) $2x \cos x^2$, $x \in \mathbf{R}$,
 d) $-5 \cos^4 x \cdot \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, e) $6 \cos(6x + 7)$, $x \in \mathbf{R}$, f) $\frac{2}{\cos^2 2x}$, dla $\cos 2x \neq 0$,
 g) $\frac{-5}{2\sqrt{\operatorname{ctg} 5x} \cdot \sin^2 5x}$, dla $\sin 10x \neq 0$, h) $\frac{\sin 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1 + \sin^2 x)^2}}$, dla $x \in \mathbf{R}$,
 i) $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$, dla $\sin x \neq 0$, j) $\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$, dla $x > 0$ i $\cos \sqrt{x} \neq 0$,
 k) $-\sin(\sin x) \cdot \cos x$, dla $x \in \mathbf{R}$, l) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, dla $\sin x > 0$,
 m) $\frac{\operatorname{tg} x}{2\sqrt{\cos x}}$, dla $\cos x > 0$, n) $\frac{1}{2\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}} \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$, dla $x > 0$,
 o) $\frac{-2x \cos 2x - 2(1+x^2) \sin 2x}{(1+x^2)^2}$, dla $x \in \mathbf{R}$,
 p) $\frac{1 + \cos^2 x + x \cdot \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$, dla $x \in \mathbf{R}$. 5*. $P_1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9} \right)$,
 $P_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{9} \right)$. 6*. $P \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} \right)$.

3. a) $2 \cos x - x \sin x$, b) $-4 \cos 2x$, c) $2 \cos 2x$, d) $6x + 6$,

e) $2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x$, f) $\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$, g) $\frac{6}{x^4}$, h) 2, i) $\frac{\sin 2x}{\cos^4 x}$,

j) $\frac{2}{x^3}$, k) $2 + \frac{6}{x^4}$, l) $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$, m) $30x^4 + 18x$. 4*. 0.

Rozdział X

ZASTOSOWANIE METODY WSPÓŁRZĘDNYCH I RACHUNKU POCHODNYCH

63. Wzrastanie lub zmniejszanie się wartości funkcji

Niech f oznacza funkcję określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Lemat (twierdzenie pomocnicze). *Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną dodatnią*

$$f'(x_0) > 0$$

to istnieje takie sąsiedztwo S tego punktu, że dla każdego $x \in S$

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

Dowód. Ponieważ pochodna $f'(x_0)$ jest granicą ilorazu różnicowego

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (63.2)$$

gdy $x \rightarrow x_0$, więc istnieje takie sąsiedztwo S punktu x_0 , w którym ten iloraz ma taki sam znak jak $f'(x_0)$. Dla każdego $x \in S$ mamy zatem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Wynika stąd, że dla każdego $x \in S$ licznik i mianownik ilorazu (63.2) są jednocześnie ujemne albo jednocześnie dodatnie, a to właśnie znaczy, że warunki (63.1) są spełnione, cnd.

Udowodniony lemat można wypowiedzieć następująco: *jeżeli funkcja ma w punkcie x_0 pochodną dodatnią, to w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 przyjmuje wartości mniejsze niż $f(x_0)$, zaś w pewnym prawostronnym sąsiedztwie tego punktu przyjmuje wartości większe niż $f(x_0)$.*

Podobnie dowodzi się, że jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną ujemną

$$f'(x_0) < 0$$

to istnieje takie sąsiedztwo S tego punktu, że dla każdego $x \in S$

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

Twierdzenie. Jeżeli pochodna funkcji f jest w każdym punkcie przedziału $(a; b)$ dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca.

Dowód. Niech x_1 i x_2 będą dowolnymi punktami przedziału $(a; b)$, przy czym $x_1 < x_2$. Należy udowodnić, że $f(x_1) < f(x_2)$.

Ponieważ funkcja f ma pochodną w przedziale domkniętym $\langle x_1; x_2 \rangle$, więc jest ciągła w tym przedziale. Wynika stąd, że w pewnym punkcie $c \in \langle x_1; x_2 \rangle$ funkcja f przyjmuje wartość największą spośród wszystkich wartości jakie przyjmuje w przedziale $\langle x_1; x_2 \rangle$ (patrz twierdzenie o przyjmowaniu wartości najmniejszej i największej, str. 269). Ponieważ dla każdego $x \in (a; b)$ mamy $f'(x) > 0$, więc $f'(c) > 0$. Wykażemy, że $c = x_2$. Istotnie, gdyby było $x_1 \leq c < x_2$, to na mocy poprzedniego lematu istniałaby taka liczba x większa od c i mniejsza od x_2 , że $f(x) > f(c)$. Ta ostatnia nierówność jest jednak fałszywa, gdyż $f(c)$ jest największą wartością funkcji w przedziale $\langle x_1; x_2 \rangle$. Zatem $c = x_2$, więc $f(x_1) \leq f(x_2)$. Równość $f(x_1) = f(x_2)$ nie jest możliwa, gdyż $f'(x_1) > 0$, a zatem (lemat) istnieje punkt $x \in (x_1; x_2)$ dla którego $f(x) > f(x_1)$, więc $f(x_1)$ nie jest największą wartością funkcji f w przedziale $\langle x_1; x_2 \rangle$. Stąd ostatecznie $f(x_1) < f(x_2)$, cnd.

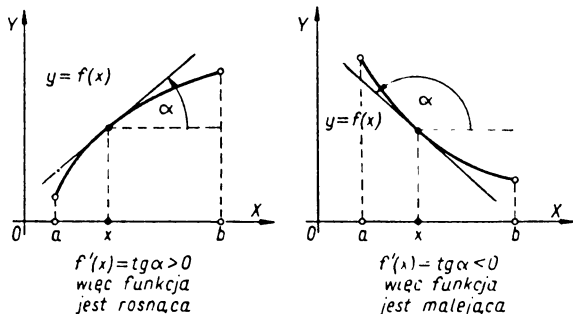
Udowodnione twierdzenie można zapisać krótko:

$$\bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ jest rosnąca w } (a; b) \quad (63.3)$$

Podobnie dowodzi się twierdzenia:

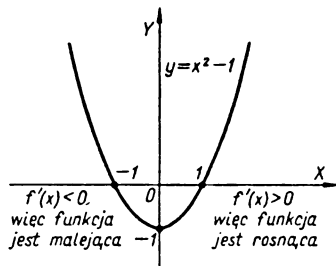
$$\bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ jest malejąca w } (a; b) \quad (63.4)$$

Rys. 63-1 przedstawia interpretację geometryczną twierdzeń (63.3) i (63.4); jest ona oparta na interpretacji geometrycznej pochodnej (str. 272).



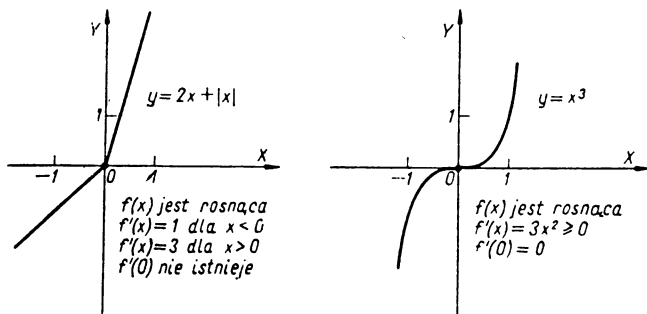
Rys. 63-1

Przykład. Funkcja $f(x) = x^2 - 1$ ma pochodną $f'(x) = 2x$, która jest ujemna w przedziale $(-\infty; 0)$ i dodatnia w przedziale $(0; \infty)$. Funkcja x^2 jest więc malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i rosnąca w przedziale $(0; \infty)$ – rys. 63-2.



Rys. 63-2

Twierdzenie odwrotne do (63.3) i twierdzenie odwrotne do (63.4) nie są prawdziwe: nie można twierdzić, że funkcja rosnąca musi mieć pochodną dodatnią, oraz nie można twierdzić, że funkcja malejąca musi mieć pochodną ujemną; w każdym z tych dwóch przypadków funkcja może mieć w pewnych punktach pochodną równą 0, zaś w innych punktach może nie mieć pochodnej w ogóle — rys. 63-3.



Rys. 63-3

Natomiast prawdziwe są następujące dwa twierdzenia

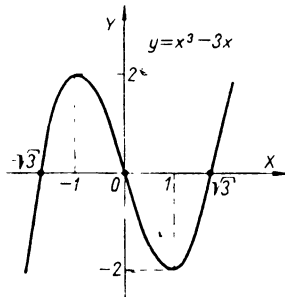
$$f(x) \text{ jest różniczkowalna i rosnąca w } (a; b) \Rightarrow \bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) \geq 0 \quad (63.5)$$

$$f(x) \text{ jest różniczkowalna i malejąca w } (a; b) \Rightarrow \bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) \leq 0 \quad (63.6)$$

Przykład*. Zbadać zmienność funkcji

$$y = x^3 - 3x \quad (63.7)$$

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Ponieważ pochodna jest dodatnia dla $x^2 > 1$, tzn. dla $x < -1$ lub $x > 1$, zaś ujemna dla $x^2 < 1$, tzn. dla $-1 < x < 1$, więc funkcja (63.7) jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -1)$, malejąca w przedziale $(-1; +1)$, oraz rosnąca w przedziale $(1; \infty)$. Przyrównując do 0 prawą stronę wzoru (63.7) znajdujemy punkty zerowe funkcji; są nimi: $-\sqrt{3}$, 0 i $\sqrt{3}$. Obliczamy wartość funkcji (63.7) dla $x = 1$ oraz kilku innych wartości x , korzystamy z nieparzystości tej funkcji i sporządzamy jej wykres — rys. 63-4.



Rys. 63-4

Przykład. Udowodnić, że funkcja

$$y = 2x - \sin^2 x \quad (63.8)$$

jest rosnąca w każdym przedziale.

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną

$$y' = 2 - 2 \sin x \cdot \cos x = 2 - \sin 2x$$

Ponieważ $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, więc dla każdego x pochodna y' jest dodatnia, a zatem funkcja (63.8) jest rosnąca w każdym przedziale.

Pytania i zadania

1. Wypowiedzieć twierdzenia, które wyrażają związek między znakiem pochodnej $f'(x)$ i zmiennością (wzrastaniem albo zmniejszaniem się) funkcji $f(x)$.
2. Wiadomo, że $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (-3; 2)$. Które z następujących nierówności są prawdziwe, a które fałszywe:
 - a) $f(-2) < f(0)$, b) $f(-2) \geq f(0)$, c) $f(-1) > f(0)$,
 - d) $f'(-1) + f'(0) + f'(1) \leq 0$, e) $f'(0) \cdot f'(1) \geq 0$.
- 3*. Znaleźć przedziały, w których funkcja jest rosnąca, przedziały w których jest malejąca i naszkicować wykres
 - a) $y = x^2 + x$, b) $y = x^3 + x^2 + 10$, c) $y = -x^3 + 6x$,
 - d) $y = x + \frac{1}{x}$, e) $y = \frac{x-1}{x+1}$, f) $y = x^2 - \frac{1}{x}$.
- 4*. Udowodnić, że funkcja $y = \operatorname{tg} x - x$ jest rosnąca w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
Naszkicować wykres.
- 5*. Udowodnić, że funkcja $y = x^5 - x^3 + x$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; \infty)$.

64. Ekstremum funkcji w punkcie

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

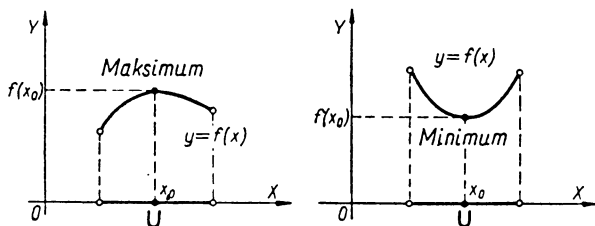
Definicja. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *maksimum* $f(x_0)$, jeżeli istnieje takie otoczenie U tego punktu, że dla każdego $x \in U$ spełniona jest nierówność

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (64.1)$$

Definicja. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *minimum* $f(x_0)$, jeżeli istnieje takie otoczenie U tego punktu, że dla każdego $x \in U$ spełniona jest nierówność

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (64.2)$$

Rys. 64-1 ilustruje pojęcia maksimum i minimum.



Rys. 64-1

Maksima i minima funkcji nazywamy *ekstremami* tej funkcji. Z pojęciem ekstremum zetknęliśmy się już przy omawianiu zmienności trójmianu kwadratowego.

Ekstremum (maksimum lub minimum) funkcji w punkcie x_0 jest pojęciem lokalnym, tzn. istnienie ekstremum związane jest z zachowaniem się funkcji w pewnym (dostatecznie małym) otoczeniu punktu x_0 , a nie zależy od wartości funkcji poza tym otoczeniem. Aby dać temu wyraz, mówimy też ekstremum *lokalne* (maksimum lokalne, minimum lokalne). Pojęcie ekstremum należy odróżniać od pojęcia *największej* lub *najmniejszej* wartości funkcji w pewnym zbiorze. To ostatnie ma charakter integralny, gdyż odnosi się do całego zbioru, np. do całej dziedziny funkcji.

Przykłady

Funkcja określona wzorem $y = x^2$ w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ ma w punkcie 0 wartość najmniejszą 0 i w punkcie 1 wartość największą 1, natomiast nie ma wewnątrz tego przedziału maksimum ani minimum.

Funkcja określona wzorem $y = x^4$ w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ ma w punkcie 0 wartość najmniejszą 0, która jest jednocześnie minimum funkcji w tym punkcie, oraz ma wartość największą, równą 1, którą przyjmuje w punktach -1 i 1 . Ta funkcja nie ma maksimum.

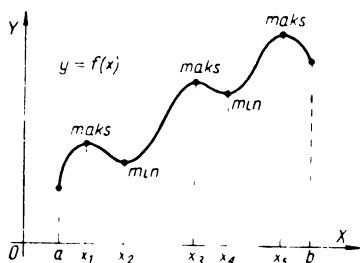
Funkcja $y = x^3 - 3x$, $x \in \mathbf{R}$ (patrz rys. 63-4) ma w punkcie -1 maksimum równe 2 i w punkcie 1 minimum równe -2 , natomiast nie ma wartości największej ani najmniejszej.

Funkcja $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, ma dla każdego $x_n = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbf{C}$, maksimum równe 1 i ma dla każdego $x_n = \frac{3}{2}\pi + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbf{C}$ minimum równe -1 . Maksimum jest tu jednocześnie największą, zaś minimum — najmniejszą wartością funkcji w jej dziedzinie.

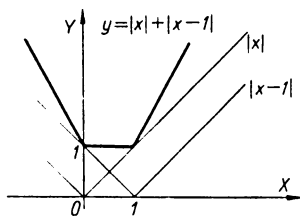
Na rys. 64-2 jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$, która ma trzy maksima i dwa minima. Jedno z tych maksimów, $f(x_5)$, jest wartością największą funkcji w przedziale $\langle a; b \rangle$, natomiast żadne z minimów nie jest wartością najmniejszą.

szą tej funkcji (funkcja przyjmuje wartość najmniejszą w punkcie a). Zwracamy uwagę, że maksimum $f(x_1)$ jest mniejsze od minimum $f(x_4)$.

Funkcja $y = |x| + |x - 1|$ (rys. 64-3), ma minimum w każdym punkcie przedziału $\langle 0; 1 \rangle$.



Rys. 64-2



Rys. 64-3

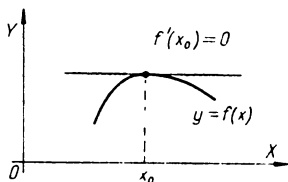
Funkcja stała $y = k$ ma w każdym punkcie maksimum, które jest jednocześnie minimum.

Warunek konieczny ekstremum. Jeżeli funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 i ma w tym punkcie pochodną, to

$$f'(x_0) = 0 \quad (64.3)$$

Dowód (nie wprost). Załóżmy, że $f'(x_0) > 0$. Dla każdego x z dostatecznie małego sąsiedztwa punktu x_0 mamy więc $f(x) < f(x_0)$, gdy $x < x_0$ i $f(x) > f(x_0)$, gdy $x > x_0$ (patrz lemat str. 285). W żadnym otoczeniu punktu x_0 nie jest więc spełniony warunek (64.1) ani warunek (64.2), czyli w punkcie x_0 nie ma ekstremum. Podobnie dowodzimy, że jeżeli $f'(x_0) < 0$ to w punkcie x_0 nie ma ekstremum. Jeżeli zatem w punkcie x_0 jest ekstremum, oraz istnieje pochodna, to $f'(x_0) = 0$, cnd.

Warunek (64.3) oznacza, że styczna do krzywej o równaniu $y = f(x)$ poprowadzona w punkcie ekstremalnym $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do OX (rys. 64-4).



Rys. 64-4

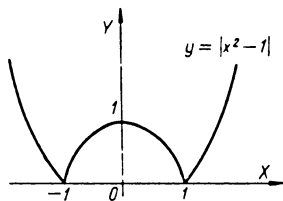
U w a g a. Warunek (64.3) nie jest wystarczający na to, żeby funkcja $f(x)$ miała w punkcie x_0 ekstremum. Na przykład funkcja x^3 ma pochodną $3x^2$, która jest równa zero w punkcie 0, lecz nie ma w tym punkcie ekstremum (patrz rys. 63-3). Ponieważ jednak warunek (64.3) jest warunkiem koniecznym ekstremum, więc do zbioru rozwiązań równania $f'(x) = 0$ należą wszystkie punkty x , w których istnieje pochod-

na i funkcja ma ekstremum. Poza pierwiastkami równania $f'(x) = 0$ funkcja $f(x)$ może mieć jeszcze ekstrema tylko w takich punktach, w których pochodna $f'(x)$ nie istnieje. Poszukując punktów, w których funkcja $f(x)$ ma ekstremum wystarczy więc ograniczyć się do tych wartości x , w których $f'(x) = 0$ albo $f'(x)$ nie istnieje.

Przykład. Znaleźć ekstremum funkcji

$$y = |x^2 - 1| \quad (64.4)$$

Rozwiązanie. Ponieważ $|x^2 - 1| \geq 0$, więc funkcja ma w punkcie -1 i w punkcie 1 minimum równe 0 . W tych dwóch punktach pochodna nie istnieje (nie ma stycznej do wykresu funkcji — rys. 64-5). Dla $x < -1$ lub $x > 1$ mamy $y = x^2 - 1$, więc pochodna $y' = 2x \neq 0$ i ekstremum nie ma. Dla $-1 < x < 1$ mamy natomiast $y = 1 - x^2$, stąd $y' = -2x$ więc dla $x = 0$ pochodna jest równa zero. W tym punkcie jest maksimum $f(0) = 1$.



Rys. 64-5

Odp. Dwa minima: $f(-1) = f(1) = 0$ i maksimum $f(0) = 1$.

Przykład. Znaleźć ekstremum funkcji

$$y = -x^2 + 2x \quad (64.5)$$

Rozwiązanie. Pochodna $y' = -2x + 2$ istnieje dla każdego x . Warunek konieczny ekstremum jest spełniony gdy $-2x + 2 = 0$, czyli dla $x = 1$. Łatwo sprawdzić, że w tym punkcie funkcja (64.5) ma maksimum równe 1 , ponieważ

$$y = -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = 1 - (x - 1)^2$$

Odp. Dla $x = 1$, $y_{\max} = 1$.

Warunek wystarczający ekstremum. Jeżeli funkcja f ma pochodną w pewnym otoczeniu punktu x_0 , przy czym

$$f'(x) > 0 \quad \text{gdy} \quad x < x_0 \quad \text{i} \quad f'(x) < 0 \quad \text{gdy} \quad x > x_0$$

to w punkcie x_0 funkcja f ma maksimum; jeżeli natomiast

$$f'(x) < 0 \quad \text{gdy} \quad x < x_0 \quad \text{i} \quad f'(x) > 0 \quad \text{gdy} \quad x > x_0$$

to w punkcie x_0 funkcja f ma minimum.

Dowód przeprowadzimy dla maksimum (dla minimum dowód jest analogiczny). Z założenia wynika, że funkcja f jest rosnąca w pewnym przedziale $(x_0 - h; x_0 + h)$ i malejąca w przedziale $(x_0, x_0 + h)$. Liczba $f(x_0)$ jest więc największą wartością funkcji f w przedziale $(x_0 - h; x_0 + h)$, czyli funkcja ma w punkcie x_0 maksimum, cnd.

Przykład.* Znaleźć ekstrema funkcji

$$y = -x^3 + 6x \quad (64.6)$$

Rozwiązanie. Obliczamy pochodną

$$y' = -3x^2 + 6 = 3(2 - x^2)$$

a następnie znajdujemy jej punkty zerowe; $x_1 = -\sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{2}$. Tylko w tych dwóch punktach funkcja (64.6) może mieć ekstremum. Ponieważ w dostatecznie małym sąsiedztwie punktu $-\sqrt{2}$ mamy

$$y' < 0 \quad \text{dla} \quad x < -\sqrt{2} \quad \text{i} \quad y' > 0 \quad \text{dla} \quad x > -\sqrt{2}$$

więc w tym punkcie funkcja ma minimum $f(-\sqrt{2}) = -(-\sqrt{2})^3 + 6(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$. Podobnie, ponieważ w dostatecznie małym sąsiedztwie punktu $\sqrt{2}$ mamy

$$y' > 0 \quad \text{dla} \quad x < \sqrt{2} \quad \text{i} \quad y' < 0 \quad \text{dla} \quad x > \sqrt{2}$$

więc w punkcie $\sqrt{2}$ funkcja ma maksimum $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^3 + 6 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Odp. Min. $f(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$, maks. $f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

Przykład. Udowodnić, że funkcja

$$y = x^5 + 10x^3 + x \quad (64.7)$$

nie ma ekstremum.

Rozwiązanie. Funkcja (64.7) jest różniczkowalna w przedziale $(-\infty; \infty)$, więc może mieć ekstremum tylko w tych punktach, w których pochodna jest równa zero. Ponieważ

$$y' = 5x^4 + 30x^2 + 1$$

więc $y' > 0$ dla każdego x . Wynika stąd, że funkcja nie ma ekstremum, cnd.

Pytania i zadania

1. Wypowiedzieć określenie a) maksimum, b) minimum, funkcji w punkcie x_0 .
2. Co to jest ekstremum funkcji? Dlaczego mówimy, że ekstremum jest pojęciem *lokalnym*?
3. Zbadać czy istnieje ekstremum, oraz wartość największa lub najmniejsza (w całej dziedzinie) funkcji

$$\text{a) } y = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{b) } y = \sqrt{x^2-1}, \quad \text{c) } y = \sqrt{1-x^2}.$$

4*. Znaleźć ekstrema funkcji

$$\text{a) } y = x + \frac{1}{x}, \quad \text{b) } y = x^3 - 12x, \quad \text{c) } y = \frac{x}{x^2+1},$$

$$\text{d) } y = 1 - \cos 2x, \quad \text{dla } 0 < x < \pi, \quad \text{e) } y = x - \sin x, \quad \text{dla } 0 < x < \pi.$$

65. Badanie funkcji

Przy badaniu funkcji należy wyznaczyć:

- 1° dziedzinę funkcji,
- 2° granice funkcji na krańcach dziedziny (np. w końcach przedziałów określoności),
- 3° przedziały, w których funkcja jest rosnąca i przedziały, w których funkcja jest malejąca,
- 4° ekstrema funkcji.

Ponadto celowe jest zwrócenie uwagi na szczególne właściwości badanej funkcji, np. czy funkcja jest parzysta lub nieparzysta, czy ma punkty zerowe, itp.

Wyniki badania funkcji wpisujemy do *tabelki* i sporządzamy *wykres*.

Przykład*. Zbadać funkcję

$$y = x^3 - 4x^2 + 4x + 2 \quad (65.1)$$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest przedział $(-\infty; \infty)$. Dla każdego $x \neq 0$ mamy

$$y = x^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \quad (65.2)$$

Jeżeli $x \rightarrow -\infty$, to $x^3 \rightarrow -\infty$, zaś drugi czynnik iloczynu (65.2) dąży do 1, więc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

Jeżeli $x \rightarrow \infty$, to $x^3 \rightarrow \infty$, zaś drugi czynnik iloczynu (65.2) dąży także do 1, więc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$$

Obliczamy pochodną

$$y' = 3x^2 - 8x + 4 = 3 \left(x - \frac{2}{3} \right) (x - 2)$$

Pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ i w przedziale $(2; \infty)$, natomiast pochodna jest ujemna, więc funkcja jest malejąca w przedziale $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. Pochodna jest równa zero w punkcie $\frac{2}{3}$ i w punkcie 2. Na podstawie warunku wystarczającego ekstremum (str. 291) sprawdzamy, że w punkcie $\frac{2}{3}$ funkcja ma maksimum $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{86}{27}$, zaś w punkcie 2 — minimum $f(2) = 2$.

Wyniki wpisujemy do tabelki. Dodatkowo obliczamy $f(0) = 2$, oraz $f(3) = 5$, gdyż znajomość tych liczb ułatwi wykonanie wykresu funkcji.

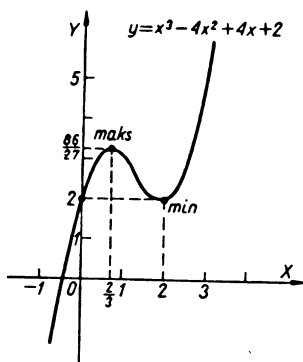
Odp. Tabl. 65-1 i rys. 65-1, (str. 294).

Przykład*. Zbadać funkcję

$$y = \frac{x^2}{x+1} \quad (65.3)$$

Tabl. 65-1

x	$x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < x < 2$	2	$2 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	maks. $\frac{86}{27}$		2 min.	∞



Rys. 65-1

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji (65.3) jest suma przedziałów:

$$(-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$$

Obliczamy granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$$

Następnie obliczamy pochodną:

$$y' = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$ i w przedziale $(0; \infty)$, natomiast pochodna jest ujemna, więc funkcja jest malejąca w przedziale $(-2; -1)$ i w przedziale $(-1; 0)$.

W punktach -2 i 0 funkcja ma ekstrema: maksimum $f(-2) = -4$ i minimum $f(0) = 0$.

Wyniki obliczeń wpisujemy do tabelki i sporządzamy wykres. Ponieważ funkcję badaną można zapisać w postaci

$$y = x - 1 + \frac{1}{x+1} \quad (65.4)$$

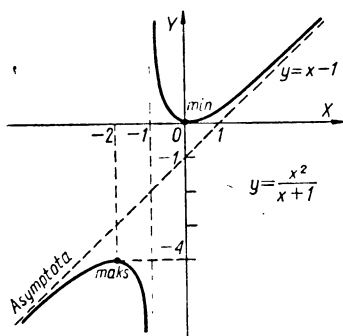
sumy dwóch składników, z których drugi $\frac{1}{x+1}$ dąży do 0, gdy $x \rightarrow -\infty$ lub gdy

$x \rightarrow +\infty$, więc dla x o dużej wartości bezwzględnej pierwszy składnik $x-1$ przedstawia w przybliżeniu funkcję (65.3). Wykres tego składnika przedstawia prostą o równaniu $y = x-1$, która nazywa się *asymptotą* krzywej (65.3).

Odp. Tabl. 65-2 i rys. 65-2.

Tabl. 65-2

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x$
y'	+	0	—	$\times$	—	0	+
y	$-\infty$ ↗	maks. -4	↘ $-\infty$	$\times$	∞ ↘	0 min.	↗ ∞



Rys. 65-2

Pytania i zadania

1. Wymienić czynności, które składają się na badanie funkcji.

2*. Zbadać funkcje:

a) $y = 1 - 2x - x^2$, b) $y = x^2 \cdot (x - 3)$, c) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$,

d) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, e) $y = (x - 3)\sqrt{x}$, f) $y = \frac{16}{x(4 - x^2)}$,

g) $y = x + \frac{1}{x}$, h) $y = x^2 + |2 - x|$.

66. Znajdowanie największej lub najmniejszej wartości funkcji w przedziale

Niech f oznacza funkcję ciągłą w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ i różniczkowalną wewnątrz tego przedziału. Wiemy, że funkcja f przyjmuje w tym przedziale wartość największą M i wartość najmniejszą m . Przypuśćmy, że chcemy znaleźć M lub m . Zauważmy, że jeśli funkcja f ma wartość M w punkcie wewnętrznym

przedziału $\langle a; b \rangle$, to ma w tym punkcie maksimum. Wynika stąd, że wartością największą funkcji w przedziale $\langle a; b \rangle$ jest jej maksimum, albo $f(a)$, albo $f(b)$. W celu znalezienia wartości największej należy więc obliczyć maksima, wartość funkcji w punkcie a , wartość funkcji w punkcie b , a następnie wziąć największą spośród tych wszystkich liczb. Podobnie, w celu znalezienia wartości najmniejszej m należy obliczyć minima, $f(a)$ i $f(b)$, a następnie wziąć najmniejszą spośród tych wszystkich liczb.

Przykład*. Znaleźć największą oraz najmniejszą wartość funkcji

$$y = x + \frac{4}{x} - 3 \quad (66.1)$$

w przedziale $\langle 1; 6 \rangle$.

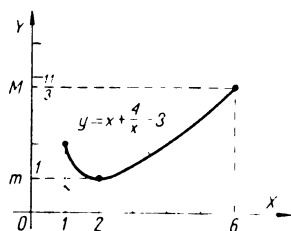
Rozwiązanie. Szukamy ekstremum funkcji (66.1)

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow [(x = -2) \vee (x = 2)]$$

Liczba -2 nie interesuje nas, gdyż leży poza przedziałem $\langle 1; 6 \rangle$. Dla $x = 2$ funkcja (66.1) ma minimum równe 1. Obliczamy ponadto $f(1) = 2$, oraz $f(6) = \frac{11}{3}$.

Odp. $M = \frac{11}{3}$, $m = 1$.

Rys. 66-1 ilustruje ostatni przykład.



Rys. 66-1

Przykład*. Zbadać, który z trójkątów równoramiennych o danym obwodzie ma największe pole.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x połowę długości podstawy trójkąta, przez $2p$ jego obwód, zaś przez S — pole.

Ponieważ $CD^2 = (p-x)^2 - x^2 = p^2 - 2px$, (rys. 66-2), więc

$$S = x \cdot CD = x \sqrt{p^2 - 2px}$$

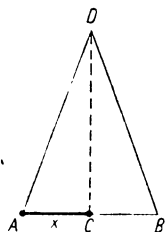
Stąd

$$S = \sqrt{p^2 x^2 - 2px^3}$$

Z uwagi na treść przykładu zbadamy tę funkcję dla $0 < x < \frac{p}{2}$.

Znajdziemy ekstremum funkcji (66.2). Obliczamy pochodną

$$S' = -\frac{px}{p^2x^2 - 2px^3} (p - 3x)$$



Rys. 66-2

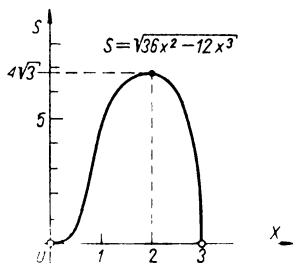
Wynika stąd, że w przedziale $(0; \frac{p}{2})$ pochodna S' ma tylko jeden punkt zerowy $x_0 = \frac{p}{3}$, przy czym w pewnym otoczeniu tego punktu $S' > 0$ gdy $x < \frac{p}{3}$ i $S' < 0$ gdy $x > \frac{p}{3}$. Funkcja (66.2) ma więc maksimum w punkcie x_0 :

$$S_{\max} = \sqrt{p^2 \cdot \frac{p^2}{9} - 2p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9} p^2$$

Ponieważ funkcja (66.2) jest rosnąca w przedziale $(0; x_0)$ i malejąca w przedziale $(x_0; \frac{p}{2})$, więc znalezione maksimum jest największą wartością danego pola.

Odp. $\frac{\sqrt{3}}{9} p^2$

Na rys. 66-3 wykreślona jest zależność (66.2) w przypadku, gdy $p = 6$.



Rys. 66-3

Przykład*. Na danym kole opisać trapez równoramienny o najmniejszym polu.

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rys. 66-4. Wyrazimy pole S trapezu za pomocą zmiennej x , którą jest połowa długości podstawy.

Ponieważ $AH = AE = GF$, oraz $DE = x$, więc

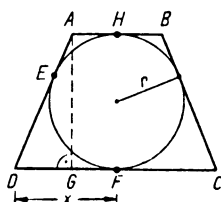
$$(x - AH)^2 + (2r)^2 = (x + AH)^2$$

Stąd $AH = \frac{r^2}{x}$, zatem

$$S = (AH + DF) \cdot AG = \left(\frac{r^2}{x} + x \right) \cdot 2r$$

czyli

$$S = 2r \left(x + \frac{r^2}{x} \right) \quad (66.3)$$



Rys. 66-4

przy czym z uwagi na treść zadania $x > 0$. Znajdziemy ekstremum funkcji (66.3). Obliczamy pochodną

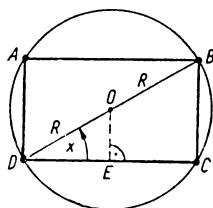
$$S' = 2r \left(1 - \frac{r^2}{x^2} \right) \quad (66.4)$$

Istnieje tylko jedna dodatnia wartość x , dla której pochodna (66.4) jest równa zero, a mianowicie $x_0 = r$. Łatwo sprawdzić, że w punkcie x_0 funkcja (66.3) ma minimum $S_{\min} = 4r^2$. To minimum jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji (66.3) w rozpatrywanym przedziale $(0; \infty)$ ponieważ dla $x \in (0; r)$ funkcja (66.3) jest malejąca, zaś dla $x \in (r; \infty)$ — rosnąca. Dla $x = r$ trapez opisany na kole jest kwadratem.

Odp. Kwadrat o boku $2r$.

Przykład*. Zbadać zmienność objętości walca wpisanego w kulę o promieniu R .

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rys. 66-5. Wyrazimy objętość V walca za pomocą miary łukowej x kąta BDC .



Rys. 66-5

Ponieważ $BC = 2R \cdot \sin x$, oraz $DE = R \cos x$, więc

$$V = \pi (DE)^2 \cdot BC = \pi \cdot R^2 \cos^2 x \cdot 2R \sin x$$

czyli

$$V = \pi R^3 \sin 2x \cdot \cos x \quad (66.5)$$

przy czym z uwagi na treść przykładu zbadamy tę funkcję dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Znajdziemy ekstremum funkcji (66.5). Obliczamy pochodną:

$$V' = \pi R^3 (2 \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x)$$

Stąd, po łatwych przekształceniach

$$V' = 2\pi R^3 \cos x (1 - 3 \sin^2 x) \quad (66.6)$$

Ponieważ dla $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ mamy $\cos x > 0$ i $\sin x > 0$, więc

$$V' = 0 \Leftrightarrow 1 - 3 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3} \sin x)(1 + \sqrt{3} \sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

W przedziale $(0; \frac{\pi}{2})$ istnieje zatem dokładnie jedna liczba x_0 , dla której $V' = 0$, taka mianowicie, że $\sin x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. W punkcie x_0 funkcja (66.5) osiąga maksimum które jest największą wartością tej funkcji w przedziale $(0; \frac{\pi}{2})$. Ponieważ $\cos x_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, więc na podstawie wzoru (66.5) dostajemy

$$V_{\max} = \pi R^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$$

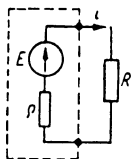
$$\text{Odp. } V_{\max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

U w a g a. Ostatni przykład można rozwiązać inaczej, przyjmując za zmienną x niewiadomą długość wysokości walca. Wówczas

$$V = \pi \left(R^2 - \frac{x^2}{4} \right) \cdot x \quad (66.7)$$

więc zadanie sprowadza się do znalezienia największej wartości funkcji (66.7) w przedziale $(0; 2R)$.

Przykład*. Bieguny ogniwa o sile elektromotorycznej E i oporności wewnętrznej ϱ (rys. 66-6) połączono przewodnikiem o oporności R . Z badać, dla jakiej wartości R moc na tej oporności jest największa.



Rys. 66-6

Rozwiązanie. Z fizyki wiadomo, że moc M na oporności R , wynosi

$$M = Ri^2 = R \cdot \left(\frac{E}{\varrho + R} \right)^2$$

czyli

$$M = E^2 \frac{R}{(\varrho + R)^2} \quad (66.8)$$

Ta równość wyraża zależność mocy M od zmiennej oporności R , przy czym $0 < R < \infty$. Znajdziemy ekstremum funkcji (66.8). Obliczamy pochodną. Po wykonaniu łatwych rachunków dostajemy

$$M' = \frac{E^2}{(\varrho + R)^3} (\varrho - R) \quad (66.9)$$

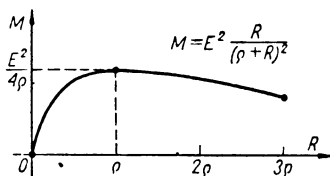
Ze wzoru (66.9) wynika, że funkcja (66.8) ma dla $R = \varrho$ maksimum, równe

$$M_{\text{maks}} = \frac{E^2}{4\varrho}$$

Znalezione maksimum jest największą wartością mocy (66.8) w przedziale $(0; \infty)$.

Odp. Dla $R = \varrho$; $M_{\text{maks}} = \frac{E^2}{4\varrho}$.

Rys. 66-7 ilustruje rozwiązany przykład.



Rys. 66-7

Pytania i zadania

1. Omówić metodę znajdowania najmniejszej lub największej wartości funkcji w przedziale.
- 2*. Znaleźć najmniejszą oraz największą wartość funkcji
 - a) $y = \sqrt[3]{x(10-x)}$ w przedziale $\langle 1; 8 \rangle$,
 - b) $y = x^3 - 2$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$,
 - c) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$,
 - d) $y = \frac{x-1}{x+1}$ w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$.
- 3*. Zbadać, który z trójkątów równoramiennych wpisanych w dany okrąg ma największe pole.
- 4*. Zbadać, który z prostokątów wpisanych w dany okrąg ma największy obwód.
- 5*. W dany stożek wpisać walec o największej objętości.
- 6*. Zbadać, który z prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i danej powierzchni całkowitej ma największą objętość.
- 7*. Na danym okręgu opisać trójkąt prostokątny o najmniejszej przeciwprostokątnej.
- 8*. Na danej kuli opisać stożek o najmniejszej objętości.

67. Interpolacja liniowa

Przypuśćmy, że funkcja f jest określona w przedziale $\langle x_1; x_2 \rangle$ i że znamy jej wartości tylko na końcach tego przedziału: $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Nie znając wartości funkcji f w przedziale $(x_1; x_2)$ postępujemy niekiedy tak, że zastępujemy ją jakąś znaną funkcją, np. *funkcją liniową*, która w punktach x_1, x_2 ma wartości y_1, y_2 — równie wartościom funkcji f . Taka funkcja liniowa określona jest wzorem

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (67.1)$$

Niech $c \in (x_1; x_2)$. Wówczas nieznaną wartość $f(c)$ można zastąpić wartością funkcji liniowej (67.1) dla $x = c$, czyli liczbą

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (c - x_1)$$

uwzględniając ją za przybliżenie wartości $f(c)$

$$f(c) \approx y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (c - x_1) \quad (67.2)$$

Postępowanie takie nazywamy *interpolacją liniową*. Posługując się wzorem (67.2) należy pamiętać, że jest to wzór przybliżony. Pozostaje sprawą otwartą jak wielki jest błąd związany ze wzorem (67.2), tzn. jaka jest różnica między jego lewą i prawą stroną.

Z interpolacji liniowej korzystamy m.in. przy obliczaniu na podstawie tablic wartości funkcji dla argumentu zawartego między dwiema wartościami tablicowymi. Dla wielu funkcji tablicowanych, np. dla logarytmu, sinusa, cosinusa, tablice są zazwyczaj tak ułożone, żeby błąd interpolacji liniowej nie przekraczał jednostki ostatniego rzędu. Równość (67.1) zapisujemy zwykle tak

$$y - y_1 = \frac{\Delta}{h} (x - x_1) \quad (67.3)$$

przy czym używamy następujących nazw:

$\Delta = y_2 - y_1$ — *różnica tablicowa*

$h = x_2 - x_1$ — *skok tablicowy*

$\frac{\Delta}{h} \cdot (x - x_1)$ — *poprawka interpolacyjna*

Przykład. Obliczyć metodą interpolacji liniowej $\sin 0,183$, jeżeli $\sin 0,18 = 0,1790$ i $\sin 0,19 = 0,1889$.

Rozwiązanie. Mamy tu $x_1 = 0,18$; $x_2 = 0,19$; $y_1 = 0,1790$ i $y_2 = 0,1889$. Stąd różnica tablicowa: $\Delta = 0,1889 - 0,1790 = 0,0099$,

skok tablicowy: $h = 0,19 - 0,18 = 0,01$,

więc na podstawie wzoru (67.3) dostajemy

$$\sin 0,183 - 0,1790 = 0,99 \cdot 0,003 = 0,00297 \approx 0,0030$$

Odp. $\sin 0,183 \approx 0,1820$.

1. Omówić metodę interpolacji liniowej. Podać interpretację geometryczną tej metody.
2. Wiadomo, że $\operatorname{tg} 0,52 = 0,5726$ i $\operatorname{tg} 0,56 = 0,6269$.
Obliczyć metodą interpolacji liniowej $\operatorname{tg} 0,53$.
3. Wiadomo, że $f(3,37) = 29,079$ i $f(3,42) = 30,569$. Obliczyć metodą interpolacji liniowej a) $f(3,38)$, b) $f(3,39)$, c) $f(3,40)$, d) $f(3,41)$.

68. Przybliżone rozwiązywanie równań

Niech $f(x)$ oznacza funkcję różniczkowalną w pewnym przedziale, którego dotyczyć będą podane niżej rozważania.

Definicja. Mówimy, że liczba x_0 jest *pierwiastkiem pojedynczym* równania

$$f(x) = 0 \quad (68.1)$$

jeżeli

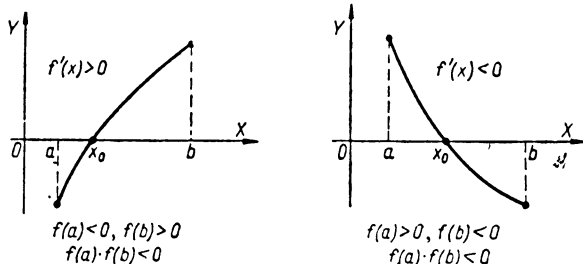
$$f(x_0) = 0 \quad \text{ i } \quad f'(x_0) \neq 0 \quad (68.2)$$

To określenie pierwiastka pojedynczego jest w przypadku wielomianu $f(x)$ równoważne określeniu, które podaliśmy na str. 168.

W dalszym ciągu będziemy zajmować się wyłącznie pierwiastkami pojedynczymi.

Jeżeli spełnione są warunki (68.2), to istnieje taki przedział $\langle a; b \rangle$, że $f(a)$ i $f(b)$ są różnych znaków, zaś x_0 jest jedynym pierwiastkiem równania (68.1) w tym przedziale. Wynika to z lematu na str. 285. Znajdowanie takiego przedziału $\langle a; b \rangle$ nazywamy *wyodrębnianiem* pierwiastka x_0 . Przy tej czynności korzystamy często z następującego twierdzenia: jeżeli pochodna $f'(x)$ ma w przedziale $\langle a; b \rangle$ stały znak (tzn. w całym przedziale $\langle a; b \rangle$ jest dodatnia albo w całym przedziale $\langle a; b \rangle$ jest ujemna) i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to równanie (68.1) ma w tym przedziale dokładnie jeden pierwiastek.

Rys. 68-1 ilustruje to twierdzenie.



Rys. 68-1

Przypuśćmy, że wyodrębniliśmy pierwiastek pojedynczy x_0 równania (68.1), lecz nie umiemy go obliczyć dokładnie. Wówczas posługujemy się jedną z metod przybliżonych rozwiązywania równań.

Omówimy tu dwie takie metody.

Metoda średnich arytmetycznych. Przypuśćmy, że przedział $\langle a; b \rangle$ wyodrębnia pierwiastek x_0 równania (68.1). Obliczamy $x_1 = \frac{a+b}{2}$, a następnie $f(x_1)$. Jeżeli $f(x_1) = 0$, to x_1 jest szukanim pierwiastkiem. Jeżeli $f(x_1) \neq 0$, to z dwóch przedziałów: $\langle a; x_1 \rangle$ i $\langle x_1; b \rangle$ wybieramy ten, na którego końcach wartości funkcji f są różnych znaków. Oczywiście tylko jeden spośród dwóch rozpatrywanych przedziałów spełnia ten warunek. Przypuśćmy, że jest nim $\langle a; x_1 \rangle$. Z kolei obliczamy $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$ i $f(x_2)$. Jeżeli $f(x_2) = 0$, to x_2 jest szukanim pierwiastkiem. Jeżeli $f(x_2) \neq 0$, to z dwóch przedziałów: $\langle a; x_2 \rangle$ i $\langle x_2; x_1 \rangle$ wybieramy jeden na podstawie kryterium podanego poprzednio. W ten sposób tworzymy *ciąg przybliżeń* $(x_1, x_2, \dots)$ pierwiastka x_0 . Łatwo zauważyć, że

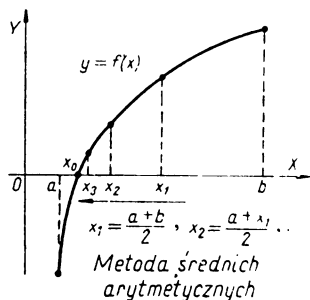
$$|x_0 - x_n| < \frac{b-a}{2^n} \quad (68.3)$$

Wynika stąd, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Metodą średnich arytmetycznych można więc znaleźć przybliżoną wartość x_0 z dowolną dokładnością.

Na rys. 68-2 przedstawiona jest interpretacja geometryczna tej metody.



Rys. 68-2

Przykład. Obliczyć metodą średnich arytmetycznych pierwiastek równania

$$x^3 + x - 1 = 0 \quad (68.4)$$

z błędem mniejszym niż 0,05.

Rozwiązanie. Ponieważ $f(0) = -1$, $f(1) = 1$; oraz $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, więc równanie (68.4) ma w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ dokładnie jeden pierwiastek x_0 . Żeby obliczyć przybliżenie tego pierwiastka z błędem mniejszym niż 0,05, należy znaleźć metodą średnich arytmetycznych x_5 (por. nierówność (68.3) przy czym $b-a = 1$). Obliczamy kolejno:

$$x_1 = 0,5; \quad f(0,5) = -0,375$$

$$x_2 = \frac{x_1 + 1}{2} = 0,75; \quad f(0,75) \approx 0,172$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0,625; \quad f(0,625) \approx 0,130$$

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2} = 0,687; \quad f(0,687) \approx 0,011$$

$$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = 0,656$$

Odp. $x_0 \approx 0,656$ (dokł. 0,682 ...).

Metoda siecznych. Przypuśćmy, że wyodrębniliśmy pierwiastek równania (68.1) w przedziale $\langle a; b \rangle$. Mamy więc $f(a) \cdot f(b) < 0$ i wewnątrz przedziału $\langle a; b \rangle$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek x_0 równania $f(x) = 0$. Metoda siecznych polega na tym, że funkcję f zastępujemy funkcją liniową mającą w punkcie a wartość $f(a)$ i w punkcie b wartość $f(b)$; pierwiastek x_1 tej funkcji liniowej przyjmujemy za pierwsze przybliżenie pierwiastka x_0 równania $f(x) = 0$. Ponieważ równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ ma postać

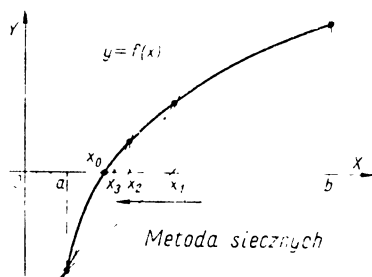
$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

więc przyjmując $y = 0$, znajdziemy $x = x_1$:

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a) \quad (68.5)$$

Następnie obliczamy $f(x_1)$. Jeżeli $f(x_1) = 0$, to liczba x_1 jest szukanym pierwiastkiem. Jeżeli $f(x_1) \neq 0$, to powtarzamy opisany wyżej rachunek w odniesieniu do tego z przedziałów $\langle a; x_1 \rangle$ i $\langle x_1; b \rangle$, na których końcach funkcja f ma wartości różnych znaków. W ten sposób tworzymy ciąg przybliżeń $(x_1, x_2, \dots)$ pierwiastka x_0 . Dowodzi się, że jest to ciąg zbieżny do x_0 . Metodą siecznych można zatem znaleźć przybliżoną wartość x_0 z dowolną dokładnością.

Rys. 68-3 ilustruje metodę siecznych.



Rys. 68-3

Przykład. Obliczyć metodą siecznych trzecie przybliżenie pierwiastka równania

$$x^3 + x - 1 = 0 \quad (68.6)$$

w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$.

Rozwiązanie. Ponieważ $f(0) = -1$ i $f(1) = 1$, więc korzystając ze wzoru (68.5) dostajemy $x_1 = 0,5$.

Mamy następnie $f(x_1) = -0,375$, więc

$$x_2 = 0,5 - \frac{1-0,5}{1-(-0,375)} \cdot (-0,375) \approx 0,637$$

oraz $f(x_2) = -0,105$, więc

$$x_3 = 0,637 - \frac{1-0,637}{1-(-0,105)} \cdot (-0,105) \approx 0,671$$

Odp. $x_0 \approx 0,671$.

Równania (68.4) i (68.6) są takie same, co ułatwia porównanie metody średnich arytmetycznych i metody siecznych. Zauważmy, że przybliżenie x_3 otrzymane metodą siecznych jest tu lepsze niż przybliżenie x_5 otrzymane metodą średnich arytmetycznych.

Pytania i zadania

1. Podać określenie pierwiastka pojedynczego równania $f(x) = 0$. Na czym polega *wyodrębnianie* takiego pierwiastka?
2. Wyjaśnić, na czym polega metoda *średnich arytmetycznych*.
3. Wyjaśnić, na czym polega metoda *siecznych*.
- 4*. Obliczyć pierwiastek równania

$$a) x^3 - x + 1 = 0, \quad b) x^5 - x - 2 = 0$$

z błędem mniejszym od 0,01.

- 5*. Znaleźć ujemny pierwiastek równania

$$x^4 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

- 6*. Znaleźć wszystkie pierwiastki równania

$$4x - 7 \sin x = 0$$

- 7*. Obliczyć najmniejszy dodatni pierwiastek równania $\operatorname{tg} x - x = 0$.

Uwaga. rozwiązania zadań 4—7 ilustrować rysunkami.

69. Całka nieoznaczona

Niech f oznacza funkcję określoną w przedziale otwartym $(a; b)$.

Definicja. Mówimy, że funkcja F jest *funkcją pierwotną* funkcji f w przedziale $(a; b)$, jeżeli

$$F'(x) = f(x) \tag{69.1}$$

dla każdego x z tego przedziału.

Na przykład funkcja x^2 jest funkcją pierwotną funkcji $2x$ w przedziale $(-\infty; \infty)$, ponieważ $(x^2)' = 2x$ dla każdego x . Podobnie funkcja $2\sqrt{x}$ jest funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{\sqrt{x}}$ w przedziale $(0; \infty)$, ponieważ $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ dla każdego x z tego przedziału itd.

Znajdowanie funkcji pierwotnej nazywamy *całkowaniem*; jest ono działaniem odwrotnym względem różniczkowania.

Twierdzenie. Jeżeli $F(x)$ jest jakąś funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $(a; b)$, to

1° suma

$$F(x) + C, \quad (C - \text{stała dowolna}) \quad (69.2)$$

jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $(a; b)$,

2° każda funkcja pierwotna funkcji $f(x)$ w przedziale $(a; b)$ może być przedstawiona w postaci sumy $F(x) + C$, (C — stała odpowiednio dobrana).

Dowód 1° łatwy: $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$.

Dowód 2° trudniejszy — pomijamy.

Jeżeli zatem F oznacza jakąś funkcję pierwotną funkcji f w przedziale $(a; b)$, to wyrażenie (69.2) przedstawia wszystkie funkcje pierwotne funkcji f w tym przedziale i tylko takie funkcje. To wyrażenie nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f w przedziale $(a; b)$ i oznaczamy symbolem

$$\int f(x) dx \quad (69.3)$$

(czytamy: *całka f od x, dx*). Mamy zatem

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \quad (69.4)$$

Znak $\int$ — wydłużona litera s — jest znakiem *całki*; $f(x)$ nazywamy *funkcją podcałkową*, x nazywamy *zmienną całkowania*. Znak dx , umieszczony na końcu symbolu (69.3), należy tu traktować jako część symbolu całki:

$$\int \dots dx$$

W miejscu zaznaczonym kropkami (...) umieszczamy symbol funkcji podcałkowej. Znak dx wskazuje, że litera x oznacza zmienną całkowania.

Przykłady

$$\begin{aligned} \int x dx &= \frac{1}{2} x^2 + C, & \int x^2 dx &= \frac{x^3}{3} + C, \\ \int 0 dx &= C, & \int \sin 2x dx &= -\cos 2x + C. \end{aligned}$$

Ze znanych wzorów na pochodne dostajemy następujące wzory na całki nieoznaczone:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (69.5)$$

dla $m \in \mathbb{W}$ i $m \neq -1$, oraz

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad (69.6)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad (69.7)$$

Stała dowolna C , która występuje w tych wzorach nazywa się *stałą całkowania*.

Jeżeli funkcje f i g mają w przedziale $(a; b)$ funkcje pierwotne, to

$$\int [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \quad (69.8)$$

w tym przedziale, czyli *całka sumy równa się sumie całek składników*. Równość (69.8) należy rozumieć w ten sposób, że każda funkcja pierwotna sumy $f+g$ jest sumą pewnej funkcji pierwotnej funkcji f oraz pewnej funkcji pierwotnej funkcji g i na odwrót: każda taka suma jest funkcją pierwotną sumy $f+g$.

Jeżeli funkcja f ma w przedziale $(a; b)$ funkcję pierwotną, to dla każdej stałej k

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx \quad (69.9)$$

w tym przedziale, czyli *czynnik stały można wyłączyć przed znak całki*.

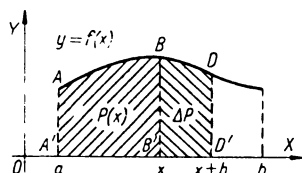
Przykłady

$$\begin{aligned} \int (4x^3 + x^2 - 68x + 7) \, dx &= \int 4x^3 \, dx + \int x^2 \, dx + \\ &+ \int (-68x) \, dx + \int 7 \, dx = x^4 + \frac{x^3}{3} - 34x^2 + 7x + C, \quad \text{dla } x \in (-\infty; \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (2 \sin x + 3 \cos x) \, dx &= \int 2 \sin x \, dx + \int 3 \cos x \, dx = \\ &= -2 \cos x + 3 \sin x + C, \quad \text{dla } x \in (-\infty; \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx &= \int x^{\frac{1}{2}} \, dx + \int x^{\frac{1}{3}} \, dx + \int x^{-3} \, dx = \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} x^{-2} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x^2} + C \\ &\text{dla } x \in (0; \infty) \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna. Niech f oznacza funkcję ciągłą i nieujemną (rys. 69-1) w przedziale $\langle a; b \rangle$.



Rys. 69-1

Oznaczmy przez $P(x)$ pole figury ograniczonej prostymi prostopadłymi do OX w punktach a i $x \in (a; b)$, krzywą o równaniu $y = f(x)$ oraz osią OX .

Twierdzenie. Pole figury $ABB'A'$ traktowane jako funkcja $P(x)$ odciętej x punktu B ma pochodną równą rzędnej $BB' = f(x)$ punktu B :

$$P'(x) = f(x) \quad (69.10)$$

Dowód. Niech $h \neq 0$ oznacza przyrost zmiennej x . Tworzymy iloraz różnicowy.

$$\frac{P(x+h) - P(x)}{h} \quad (69.11)$$

Ten iloraz przedstawia stosunek pola ΔP figury $BDD'B'$ do długości odcinka $B'D'$. Dotyczy to zarówno przypadku gdy $h > 0$ — mamy wówczas $\Delta P = P(x+h) - P(x)$ i $B'D' = h$ (rys. 69-1), jak i przypadku gdy $h < 0$ — ponieważ wówczas

$$\Delta P = P(x) - P(x+h) = -(P(x+h) - P(x))$$

oraz $B'D' = -h$. Stosunek (69.11) jest więc zawarty między największą i najmniejszą wartością funkcji f w przedziale domkniętym o końcach x i $x+h$. Ponieważ funkcja f jest ciągła, więc na podstawie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich (str. 269) istnieje między x i $x+h$ taki punkt ζ , że iloraz (69.11) równa się $f(\zeta)$. Jeżeli $h \rightarrow 0$, to $\zeta \rightarrow x$ oraz $f(\zeta) \rightarrow f(x)$, gdyż funkcja f jest ciągła. Stąd

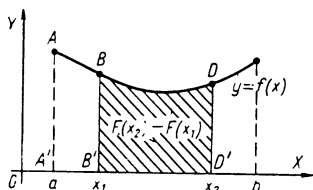
$$P'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = f(x), \quad \text{cnd.}$$

Funkcja $P(x)$ jest więc funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $(a; b)$.

Wniosek. Jeżeli F oznacza jakąś funkcję pierwotną funkcji f ciągłej w rozważanym przedziale, to

$$P(x) = F(x) + C \quad (69.12)$$

przy czym C jest odpowiednio dobraną stałą (por. 2°, tw. na str. 306).



Rys. 69-2

Rozważmy figurę $BDD'B'$ (rys. 69-2), która jest różnicą figury $ADD'A'$ i figury $ABB'A'$. Na podstawie wzoru (69.12) mamy

$$\text{pole } ADD'A' = F(x_2) + C$$

$$\text{pole } ABB'A' = F(x_1) + C$$

Stąd ($x_1 < x_2$)

$$\text{pole } BDD'B' = F(x_2) - F(x_1) \quad (69.13)$$

różnica $F(x_2) - F(x_1)$ przedstawia pole figury ograniczonej prostymi $x = x_1$, $x = x_2$, osią OX i krzywą $y = f(x)$.

Przykład Obliczyć pole figury ograniczonej prostymi $x=0$, $x=1$, osią OX i krzywą o równaniu $y=x^2-4x+4$.

Rozwiązanie. Funkcja x^2-4x+4 jest ciągła i nieujemna w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$. Znajdujemy funkcję pierwotną

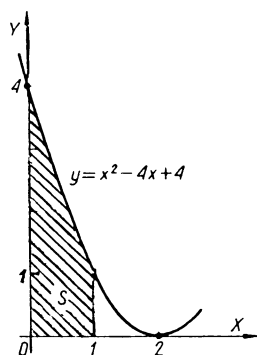
$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

a następnie korzystamy z równości (69.13), przyjmując $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Stąd

$$\text{pole } S = \left(\frac{1}{3} - 2 + 4 \right) - 0 = \frac{7}{3}$$

Odp, $S = \frac{7}{3}$, (rys. 69-3).

Inne przykłady obliczania pól podamy w następnym punkcie.



Rys. 69-3

Pytania i zadania

1. Wypowiedzieć określenie *funkcji pierwotnej* funkcji $f(x)$ w przedziale. Podać kilka przykładów.
2. Co to jest *całka nieoznaczona* funkcji $f(x)$ w przedziale?
3. Napisać wzór na całkę nieoznaczoną funkcji
 - a) x^m , $m \in \mathbb{W}$, $m \neq -1$,
 - b) $\cos x$,
 - c) $\sin x$.
4. Na czym polega zastosowanie funkcji pierwotnej do obliczania pola figury płaskiej?
- 5*. Znaleźć kilka funkcji pierwotnych funkcji $f(x) = 1 - 2x$ i narysować je na wspólnym rysunku.
- 6*. Znaleźć tę funkcję pierwotną funkcji $f(x) = x - x^3$, której wykres przechodzi przez punkt $P(-2, 1)$.
7. Obliczyć całki:

$$\text{a) } \int (x - x^2) dx, \quad \text{b) } \int (x^2 - 3 \cos x) dx, \quad \text{c) } \int (2x - 3 + \sin x) dx,$$

$$d) \int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx, \quad e) \int (3x-2)^3 dx, \quad f) \int 3\sqrt[3]{x} dx,$$

$$g) \int \frac{x^2+1}{x^2} dx.$$

8*. Obliczyć całki:

$$a) \int \frac{x^4-1}{x^2+1} dx, \quad b) \int \frac{x-1}{x^3} dx + 1, \quad c) \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

70. Całka oznaczona

Wiemy, że jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ ciągłej w pewnym przedziale, to każda funkcja pierwotna funkcji $f(x)$ w tym przedziale ma postać $F(x)+C$, gdzie C jest stałą. Wynika stąd, że różnica

$$F(x_2) - F(x_1) \quad (70.1)$$

w punktach x_2 i x_1 , rozpatrywanego przedziału jest dla każdej funkcji pierwotnej F funkcji f taka sama. Tę różnicę nazywamy *całką oznaczoną* funkcji f od x_1 do x_2 i oznaczamy symbolem

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (70.2)$$

Mamy więc dla każdej funkcji f ciągłej w przedziale $\langle x_1; x_2 \rangle$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) \quad (70.3)$$

co zapisujemy także

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$$

i czytamy: całka oznaczona funkcji $f(x)dx$ w granicach od x_1 do x_2 równa się $F(x)$ z podstawieniem górnym x_2 i dolnym x_1 .

Przykłady

$$\int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\int_0^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$$

$$\int_1^0 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^0 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Z określenia (70.3) wynika, że

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx, \quad \text{oraz} \quad \int_{x_1}^{x_1} f(x) dx = 0 \quad (70.4)$$

Wzór (69.13) na pole figury $BDD'B'$ możemy obecnie zapisać tak:

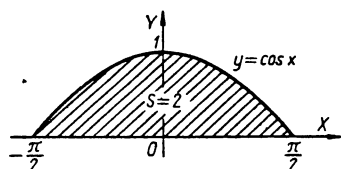
$$\text{pole } BDD'B' = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (70.5)$$

Przykład. Obliczyć pole ograniczone łukiem cosinusoidy $y = \cos x$ od $x = -\frac{\pi}{2}$ do $x = \frac{\pi}{2}$ i osią OX .

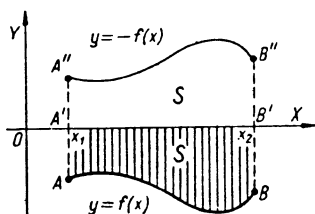
Rozwiązanie

$$\text{pole } S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$$

Odp. $S = 2$ (rys. 70-1).



Rys. 70-1



Rys. 70-2

Uwaga. Jeżeli funkcja f jest ciągła i niedodatnia, a więc gdy figura $AA'B'B$, której pole chcemy obliczyć, leży pod osią OX (rys. 70-2), to

$$\text{pole } AA'B'B = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (70.6)$$

Istotnie, mamy wówczas

$$\begin{aligned} \text{pole } AA'B'B &= \text{pole } A''A'B'B'' = \int_{x_1}^{x_2} [-f(x)] dx = [-F(x)]_{x_1}^{x_2} = \\ &= -[F(x)]_{x_1}^{x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \end{aligned}$$

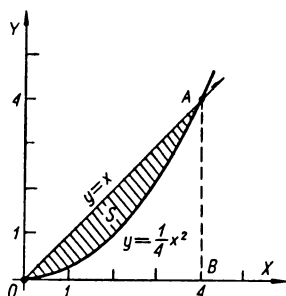
Przykład*. Obliczyć pole ograniczone liniami: $y = \frac{1}{4}x^2$ oraz $y = x$.

Rozwiązanie. Sporządzamy rys. 70-3. Szukane pole S jest różnicą

dwóch pól: trójkąta OAB i figury ograniczonej osią OX , prostą $x = 4$ i krzywą $y = \frac{1}{4}x^2$. Stąd

$$S = 8 - \int_0^4 \frac{1}{4} x^2 dx = 8 - \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

Odp. $\dot{S} = \frac{8}{3}$.



Rys. 70-3

Interpretacja fizyczna. Wiemy (p. 59), że prędkość $v(t)$ punktu P poruszającego się po osi OS jest pochodną drogi $s(t)$ względem czasu t . Droga $s(t)$ jest więc funkcją pierwotną prędkości; stąd

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = s(t_2) - s(t_1) \quad (70.7)$$

Przykład*. Punkt porusza się po osi OS z prędkością $v(t) = 2 \cos \pi t$. Wiadomo, że $s(2) = 4$. Znaleźć równanie ruchu $s = s(t)$, oraz obliczyć $s(7)$.

Rozwiązanie. Funkcją pierwotną funkcji $2 \cos \pi t$ jest $\frac{2}{\pi} \sin \pi t$, ponieważ $\left(\frac{2}{\pi} \sin \pi t\right)' = \frac{2}{\pi} \cdot \cos \pi t \cdot \pi = 2 \cos \pi t$. Równanie ruchu ma zatem postać

$$s = \frac{2}{\pi} \sin \pi t + C$$

przy czym C dobieramy na podstawie warunku $s(2) = 4$, czyli

$$4 = \frac{2}{\pi} \cdot \sin 2\pi + C$$

więc $C = 4$. Stąd

$$s = \frac{2}{\pi} \sin \pi t + 4 \quad (70.8)$$

Znając równanie ruchu (70.8), obliczamy $s(7) = 4$.

Odp. $s = \frac{2}{\pi} \sin \pi t + 4$; $s(7) = 4$.

Praca jako całka siły. Niech $f(s)$ oznacza miarę na osi OS wektora siły działającej na masę umieszczoną w punkcie o współrzędnej s . Praca wykonana przez tę siłę na przesunięcie masy z położenia s_1 w położenie s_2 , równa jest całce funkcji $f(s)$ od s_1 do s_2 :

$$\text{praca } L = \int_{s_1}^{s_2} f(s) ds \quad (70.9)$$

Wyprowadzenie tego wzoru pominiemy. Zauważmy, że jeżeli funkcja $f(s)$ jest stała, $f(s) = k$, to równość (70.9) ma postać $L = k \cdot (s_2 - s_1)$, dobrze znaną z fizyki elementarnej.

Przykład*. Wiadomo, że siła za pomocą której można rozciągnąć o s cm sprężynę znajdującą się w spoczynku, jest wprost proporcjonalna do s . Dla pewnej sprężyny siła ta wynosi 10 s kG. Obliczyć pracę potrzebną do rozciągnięcia tej sprężyny o 6 cm.

Rozwiązanie

$$L = \int_0^6 10s \, ds = 10 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^6 = 180 \text{ kG cm}$$

Odp. 1,8 kGm.

Pytania i zadania

1. Podać określenie całki oznaczonej.
2. Podać interpretację geometryczną całki oznaczonej.
3. Podać interpretację fizyczną całki oznaczonej.
- 4*. Obliczyć całki oznaczone:

$$\text{a) } \int_{-2}^1 x^2 dx, \quad \text{b) } \int_0^1 (x^2 + x - 1) dx, \quad \text{c) } \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

Podać interpretację geometryczną.

5*. Wiadomo, że przyspieszenie w ruchu po osi OS wynosi $2 \sin t \frac{m}{s^2}$, zaś

prędkość w chwili początkowej $v(0) = 4 \frac{m}{s}$.

Wyznaczyć równanie ruchu jeżeli wiadomo, że w chwili początkowej punkt ruchomy znajdował się w położeniu $s = 10$ m.

6*. Jaką pracę należy wykonać, aby ciało o masie m unieść z powierzchni ziemi na wysokość h ? Do jakiej granicy dąży ta praca gdy $h \rightarrow \infty$?

Odpowiedzi do rozdziału X

63.

2. a) fałszywe, b), c), d), e) prawdziwe. 3*. a) rosn. $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$, mal. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$,

b) rosn. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$, $(0; \infty)$, mal. $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$, c) rosn. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, mal. $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; \infty)$, d) rosn. $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$, mal. $(-1; 0)$, $(0; 1)$, e) rosn. $(-\infty; -1)$, $(-1; \infty)$, f) rosn. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $(0; \infty)$; mal. $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

64.

3. a) maks. $f(0) = 1$, wart. najmn. $f(-1) = f(1) = 0$, wart. najw. $f(0) = 1$, b) wart. najmn. $f(-1) = f(1) = 0$, c) maks. $f(0) = 1$, wart. najmn. $f(-1) = f(1) = 0$, wart. najw. $f(0) = 1$. 4*. a) maks. $f(-1) = -2$, min. $f(1) = 2$, b) maks. $f(-2) = 16$, min. $f(2) = -16$, c) min. $f(-1) = -\frac{1}{2}$, maks. $f(1) = \frac{1}{2}$, d) maks. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, e) nie ma.

65.

2*. a) maks. $f(-1) = 2$, b) maks. $f(0) = 0$, min. $f(2) = -4$, c) maks. $f(-2) = 25$, min. $f(1) = -2$, d) maks. $f(0) = -2$, min. $f(2) = 2$, e) min. $f(1) = -2$, f) maks. $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -3\sqrt{3}$, min. $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{3}$, g) maks. $f(-1) = -2$, min. $f(1) = 2$, h) min. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$; w punkcie 2 pochodna nie istnieje.

66.

2*. a) $M = 5$, $m = 3$, b) $M = 6$, $m = -3$, c) $M = 1$, $m = \frac{1}{2}$, d) $M = 0$, $m = -1$. 3*. Trójkąt równoboczny. 4*. Kwadrat. 5*. $V = V_{\max}$, gdy wysokość walca jest trzykrotnie mniejsza od wysokości stożka. 6*. Sześcian. 7*. Trójkąt równoramienny. 8*. $V = V_{\min}$, gdy wysokość stożka jest czterokrotnie większa od promienia kuli.

67.

2. 0,5862. 3. a) 29,377, b) 29,675, c) 29,973, d) 30,271.

68.

4*. a) -1,33, b) 1,27. 5*. -0,67. 6*. -1,73; 0; 1,73. 7*. 4,493.

69.

6*. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + 3$. 7. a) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$, b) $\frac{1}{3}x^3 - 3\sin x + C$, c) $x^2 - 3x - \cos x + C$, d) $-\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + C$, e) $\frac{1}{12}(3x-2)^4 + C$, f) $\frac{9}{4}x^3\sqrt{x} + C$, g) $x - \frac{1}{x} + C$, dla $x \in (-\infty; 0)$ lub $x \in (0; \infty)$. 8*. a) $\frac{x^3}{3} - x + C$, b) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} -$

$-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$, dla $x \in (0; \infty)$, c) $\frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x} + C$, dla $x \in (-\infty; 0)$
lub $x \in (0; \infty)$.

70.

4*. a) 3, b) $-\frac{1}{6}$, c) 2, 5*. $s = 10 + 6t - 2 \sin t$.

6*. Praca $L = mgR \left(1 - \frac{R}{R+h}\right)$ kGm, gdzie R — promień kuli ziemskiej w metrach,
 g — przyspieszenie ziemskie w m/s^2 , m — masa ciała w kilogramach, h — wysokość
w metrach; gdy $h \rightarrow \infty$, to $L \rightarrow mgR$.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\pi = 3,1416$$

$$\log \pi = 0,4971$$

Mantysy logarytmów

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

SKOROWIDZ

- Aksjomaty 24
- algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego 62
- alternatywa (suma logiczna) zdań 11–12
 - wykluczająca 12
 - zdań 32
- antysymetria relacji 39
- argument funkcji 35, 71
- asymptota krzywej 295

- Badanie funkcji 285–288, 293–300
- błąd bezwzględny 60
 - przybliżenia 60
 - względny 60

- Całka nieoznaczona funkcji 306
 - oznaczona funkcji 310
- całkowanie funkcji 306
- cecha logarytmu 249
- cechy podzielności 48
- ciąło funkcji wymiernych 189
 - liczbowe 68
- ciąg arytmetyczny 205
 - geometryczny 211
 - — nieskończony 223
 - liczbowy 192
 - malejący 193
 - niemalejący 194
 - nierosnący 194
 - nieskończony 192
 - przybliżeń pierwiastka 303, 304
 - rosnący 193
 - rozbieżny 219
 - — do nieskończoności 219
 - skończony 192
- ciąg stały 194
 - sum częściowych 223
 - zbieżny do zera 217
- ciągi monotoniczne 193–194
 - przybliżeń dziesiętnych liczby niewymiernej 60
- ciągłość funkcji 267
 - zbioru R 66
- cyfra znacząca przybliżenia 61
- część całkowita liczby 76

- Definicja 24
 - Cauchy'ego granicy funkcji 260
 - Heinego granicy funkcji 258
- dodawanie 39
- dopełnienie zbioru 31, 33
- dowód indukcyjny 195
 - matematyczny 24
 - nie wprost 25
 - wprost 25
- druga pochodna funkcji 281
- dyskusja trójkątnu kwadratowego 123
- układu równań 106
- działania arytmetyczne 39
 - na pierwiastkach 44
 - — potęgach 42
 - — wielomianach 159, 189
 - — zbiorach 30–31
- działanie grupowe 68
 - odwrotne 40, 69
- dziedzina funkcji 35, 71
 - — zdaniowej 20
 - równania 130
- dzielenie 39
- dzielnik (podzielnik) 48
- dziesiętkowy system pozycyjny 48

Ekstenzjonalność definicji 24
 ekstrema funkcji 289
 ekstremum trójkątnu kwadratowego 125
 element jednostkowy grupy 68
 — — zbioru 69
 — obojętny dodawania 40
 — — mnożenia 41
 — odwrotny 68
 — spełniający formę zdaniową 20
 — zbioru 28
 — zerowy 69

Forma zdaniowa (funkcja zdaniowa) 20
 — — sprzeczna 20
 — — tożsamościowa 20
 formy zdaniowe 29, 32
 — — równoważne 21
 funkcja 35, 71

— dwóch zmiennych 179
 — homograficzna 189
 — kwadratowa (drugiego stopnia) 118
 — liniowa 89
 — logarytmiczna 243
 — malejąca 79, 286
 — nieparzysta 82, 233
 — odwrotna 36
 — okresowa 80
 — parzysta 81, 233
 — pierwotna 305
 — pierwszego stopnia 89
 — podcałkowa 306
 — potęgowa 233
 — rosnąca 79, 286
 — różniczkowa 287
 — stała 73
 — tożsamościowa 36
 — wykładnicza 235
 — wymierna 268
 — złożona 278
 funkcje wymierne 188–190

Granica ciągu 217–218
 — funkcji 258
 — jednostronna 265
 — lewostronna 265
 — niewłaściwa 264–265
 — — nieskończoność 220

granica prawostronna 265
 — w nieskończoności 266
 grupa 68

Hipoteza 25
 — indukcyjna 195

Iloczyn 41
 — (część wspólna) zbiorów 30, 33
 — kartezjański zbiorów 178
 iloraz ciągu geometrycznego 211
 implikacja (wynikanie) 14–15, 18, 29, 33
 — odwrotna 18
 indukcja matematyczna (zupełna) 195
 interpolacja liniowa 301
 interpretacja geometryczna całki 307, 311
 — — pochodnej 272

Jednomian drugiego stopnia 118
 — dwóch zmiennych 180
 — stopnia n 157
 — zerowy 157, 180
 jednomiany podobne 157, 180
 jednoznaczne przyporządkowanie 35

Kolejność działań arytmetycznych 41
 kombinacja 202
 koniunkcja (iloczyn logiczny) zdań 10, 33
 kontrapozycja twierdzenia 25
 kres dolny zbioru liczb 57
 — górny zbioru liczb 57
 krok indukcyjny 195
 krotność pierwiastka 168
 krzywa wykładnicza 236
 kwadrat logiczny 26
 kwantyfikator ogólny (duży) 21
 — — szczegółowy (mały) 22

Liczba dodatnia 40
 — dziesiętna 51
 — pierwsza 48
 — przeciwna 40
 — — ujemna 40
 — — złożona 48
 liczby całkowite 47–49
 — nieparzyste 48
 — niewymierne 57–63

liczby parzyste 48
— rzeczywiste 65–67
— wymierne 49–53
logarytm liczby przy podstawie 239–240
logarytmy dziesiętne 248

Maksimum funkcji 288

— trójkątnu kwadratowego 121, 125
mantysa logarytmu 249
metoda analizy starożytnych 88
— graficzna rozwiązań 153
— równań (nierówności) równoważnych 26
— siecznych 304
— średnich arytmetycznych 303
— zero–jedynekowa 13
miejsce zerowe funkcji 78
minimum funkcji 289
— trójkątnu kwadratowego 121, 125
mnogość 28
mnożenie 39
moduł dodawania 40
— mnożenia 41

Nadzbior 29

najmniejsza wspólna wielokrotność 49
największy wspólny dzielnik 49
następnik implikacji 14
negacja zdania 8, 33
nierówności 85–87
— algebraiczne 137–177
— kwadratowe 142–146
— logarytmiczne 246–247
— równoważne 87
— z dwiema niewiadomymi 100–101
— z wartością bezwzględną 98
niewiadoma 85

Obraz elementu 35

obrót prostej 90
odcięta punktu 72
odejmowanie 39
odwrotność liczby 40
odwzorowanie (funkcja) 35, 71
— odwracalne 36
— tożsamościowe 36
— wzajemnie jednoznaczne 36

okres funkcji 80

— — zasadniczy (podstawowy) 80
— ułamka 52
oś liczbowa 58
— odciętych 72
— rzędnych 72
otoczenie punktu 216

Parabola 118

permutacja zbioru 198
pewnik 24
pierścień 68
— liczbowy 68
— wielomianów 161
pierwiastek arytmetyczny 44
— kwadratowy 44
— podwójny 129, 168
— pojedynczy 168, 302
— równania 85, 129
— stopnia n 44
— sześcienny 44
— wielomianu 158
pierwiastkowanie 43–45
pochodna funkcji 270–281
— — złożonej 279
—, obliczanie 275–280
podstawa logarytmu 239
— potęgi 42
podzbiór 29
podzielnik (dzielnik) 48
— — wielomianu 160
podzielność liczb całkowitych 48
pojęcia abstrakcyjne 24
— matematyczne 24
— pierwotne 24
poprawka interpolacyjna 301
poprzednik 14
porządkowanie liczb rzeczywistych 39
postać iloczynowa trójkątnu kwadratowe-
go 121
— kanoniczna trójkątnu kwadratowego 120
potęga o wykładniku zero 157
potęgi 42, 229–232
półoś dodatnia 58
— ujemna 58
prawa de Morgana 13–14, 19, 33, 34

prawa działań arytmetycznych 41
 — logiki 8–10, 17, 33
 — rachunku zbiorów 33
 — — zdań 33
 — znaków 40
 prawie wszystkie wyrazy ciągu 216
 prawo podwójnego zaprzeczenia 9, 19
 — przechodniości implikacji 16
 — sprzeczności 8
 — trychotomii 39
 — wyłączonego środka 9
 — zaprzeczenia implikacji 19
 procenty 53
 promień otoczenia punktu 216
 proporcjonalność odwrotna 75
 — prosta 74
 przechodniość relacji 39
 przeciwdziałanie funkcji 35, 71
 przedział domknięty (zamknięty) 67
 — — lewostronnie 67
 — — prawostronnie 67
 — otwarty 67
 przedziały nieograniczone (nieskończone)
 67
 przekształcenie 35
 przestrzeń 28, 31
 przesunięcie równoległe prostej 90
 — wykresu funkcji 82
 przybliżenia liczb 60
 przybliżenie dziesiętne z nadmiarem 57, 59
 — — z niedomiarem 57, 59
 przybliżone rozwiązanie układu równań
 153
 — — równań 302–304
 przyporządkowanie wzajemnie jednozna-
 czne 73
 punkt nieciągłości funkcji 267
 — zerowy (miejsce zerowe) wielomianu
 158
 — — (pierwiastek) trójmianu kwadrato-
 wego 121
 — — funkcji 78

Rachunek zbiorów 32–33
 — zdań 32
 redukcja jednomianów podobnych 157
 reguła odrywania 16

reguła zaokrąglania 61
 relacja 30, 37
 — antysymetryczna 37
 — mniejszości 37, 39
 — porządkująca 37
 — przechodnia 37
 — równości 39
 — równoważności 39
 — spójna 37
 rodzina 28
 rozkład liczby naturalnej na czynniki 48
 — wielomianu na czynniki 167–168
 rozszerzanie ułamka 50, 189
 rozwiązanie nierówności 85
 — równania 85
 — układu równań 102, 181
 rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej
 59
 — — — rzeczywistej 65
 — — skończone, okresowe, nieokresowe
 65
 — — ułamka 51
 równania 85–87
 — algebraiczne 166–171
 — logarytmiczne 245
 — logarytmiczno-wykładnicze 245–246
 — pierwiastkowe 138
 — równoważne 86
 — wykładnicze 238
 równanie drugiego stopnia z dwiema nie-
 wiadomymi 149
 — dwukwadratowe 133
 — kwadratowe 128–133
 — — niezupełne 133
 — liniowe 90
 — pierwszego stopnia 91
 — sprzeczne 91
 — tożsamościowe 91
 — z dwiema niewiadomymi 100–101
 — zwrotne 171
 równość wielomianów 159
 — zbiorów 29
 równoważne układy równań 105
 równoważność form zdaniowych 29
 — zdań 18
 różnica ciągu arytmetycznego 205
 — tablicowa 301

- różnica zbiorów 30
- różniczkowalność funkcji 270
- rzędna punktu 72

- Sąsiedztwo punktu 258
- schemat twierdzenia 15
- siatka znaków 173
- silnia 198
- skala funkcyjna 254
 - logarytmiczna 254
- skok tablicowy 301
- skrawanie ułamka 50, 189
- spójność relacji 39
- stopień wielomianu 158, 180
- styczna do krzywej w punkcie 272
- suma 41
 - zbiorów 30, 32
- superpozycja (złożenie) funkcji 279
- suwak logarytmiczny 254
- symbol Newtona 200
- symetria relacji 39
- system dziesiętkowy 51
- szereg geometryczny 223–224
 - rozbieżny 223
 - zbieżny 223

- Średnia arytmetyczna 114
 - geometryczna 114

- Teza twierdzenia 15, 25
- trójkąt Pascala 201
- trójmian kwadratowy 118
- twierdzenia o logarytmach 240–241
- twierdzenie Bézouta 163
 - matematyczne 15
 - o rachunku granic 263–264
 - o rozkładzie wielomianu 162
 - odwrotne 25
 - proste 25
 - przeciwne 25
 - przeciwstawne (kontrapozycja) 25

- Układ równań algebraicznych 181
 - — pierwszego stopnia 102–110
 - współrzędnych prostokątnych 72
- ułamek dziesiętny nieskończony 52
 - — skończony 52
- ułamek niewłaściwy 50
 - okresowy 52
 - właściwy 50
- ułamki dziesiętne 51
 - zwykłe 50
- uporządkowanie zbioru 37
- usuwanie niewymierności z mianownika 63

- Wartość bezwzględna liczby 45
 - funkcji 35, 71
 - — najmniejsza 118, 289, 295
 - — największa 119, 289, 295
 - logiczna zdania 7, 9
- warunek konieczny 17–18
 - — ekstremum 290
 - wystarczający (dostateczny) 17–18
 - — ekstremum 291
- wielomian dwóch zmiennych 180
 - jednorodny 181
 - stopnia n 158
 - symetryczny 180
 - zerowy 158
- wierzchołek paraboli 118
- właściwości funkcji 78–81
 - — ciągłych 268–269
- współczynnik jednomianu 157, 180
 - kierunkowy 89
 - proporcjonalności 74–75
- współczynniki wielomianu 158
- współrzędna punktu na osi 66
- współrzędne punktu 72
- wykładnik potęgi 42
- wykonalność działań 46
- wykreś funkcji 71–72, 73, 74, 82, 118
 - — liniowej 90
 - jednomianu kwadratowego 118
 - trójmianu kwadratowego 121
- wyłączność definicji 24
- wyodrębnianie pierwiastka 302
- wyraz ciągu 192
 - wolny 89
 - — wielomianu 158
- wyznacznik drugiego stopnia 106
- układu równań 106
- wzory na całki nieoznaczone 306–307
- skróconego mnożenia 43

wzory Viete'a 131–132
 wzór dwumianowy Newtona 204
 — przybliżony 301
 — rekurencyjny 193

 Założenie twierdzenia 15, 18, 25
 zamknięty układ implikacji 26
 — — twierdzeń 26
 zaprzeczenie alternatywy 13
 — implikacji 16
 — tezy 25
 — zdania 8
 — — z kwantyfikatorem 22
 zasada ciągłości 66
 — indukcji matematycznej 195
 zawieranie się zbiorów 29, 33
 zbiory liczbowe 46
 — rozłączne 31
 zbiór 28
 — argumentów funkcji 71
 — elementów mających własność 28
 — jednoelementowy (jednostkowy) 28

zbiór liczb całkowitych 47
 — liczb naturalnych 47
 — — rzeczywistych 39
 — nieskończony 29
 — ograniczony z dołu 57
 — — z góry 57
 — pusty 28
 — rozwiązań równania 85
 — — układu równań 181
 — skończony 28
 — uporządkowany 37
 — wartości funkcji 71
 zdania równoważne 19
 — sprzeczne 8, 9
 zdanie 7, 22
 — fałszywe 7, 25
 — prawdziwe 7
 zmienna całkowania 306
 — niezależna 71
 — zależna 71
 zwrotność relacji 39

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE polecają uczniom
szkół średnich następujące książki:

MATEMATYKA

Bogusław Gdowski, Edmund Pluciński

ZBIÓR ZADAŃ Z MATEMATYKI DLA KANDYDATÓW NA WYŻSZE UCZELNIE

Książka zawiera zadania z matematyki, dostosowane do poziomu i zakresu materiału wykładanego w szkołach średnich.

W zbiorze tym Czytelnik znajdzie zarówno łatwe zadania rachunkowe, jak i zadania trudne, a wśród nich wiele na dowodzenie. Do większości zadań podano dokładne rozwiązania.

Na końcu książki znajdują się tematy z egzaminów wstępnych z matematyki na wyższe uczelnie, które pozwolą Czytelnikowi zorientować się w stawianych wymaganiach na tych egzaminach.

Dziewięć wydań w latach 1971–1986

Wacław Leksiński, Bohdan Macukow, Wojciech Żakowski

MATEMATYKA W ZADANIACH DLA KANDYDATÓW NA WYŻSZE UCZELNIE

Tom 1 i 2

Książka zawiera zwięzłe informacje teoretyczne ze wszystkich działów matematyki objętych programem szkół średnich, przykładowo rozwiązane zadania oraz zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania wraz ze wskazówkami i odpowiedziami.

Trzy wydania w latach 1981–1987

Bogdan Miś

TAJEMNICZA LICZBA e I INNE SEKRETY MATEMATYKI

Jest to książka popularnonaukowa. Jej treść stanowią gawędy dotyczące podstawowych pojęć matematyki, takich jak: liczba, zbiór, działanie, relacja, funkcja — związanych z fundamentalnymi dziedzinami matematyki: teorią liczb, teorią mnogości, algebrą, analizą.

Napisana jest językiem żywym, a liczne rysunki ułatwiają jej lekturę. Jest przeznaczona dla uczniów lubiących matematykę. Zainteresuje też zapewne nauczycieli matematyki, ze względu na sposób przedstawienia niektórych zagadnień — lekki, niepodręcznikowy — uwzględniający kilkuletnie doświadczenia dydaktyczne autora z pracy ze studentami na Uniwersytecie Warszawskim.

Rok wydania 1989

Barbara Piłat, Mariusz J. Wasilewski

TABLICE CAŁEK. Całki nieoznaczone. Całki oznaczone.

Książka zawiera podstawowe wzory rachunku całkowego, tablice całek najczęściej występujących w technice, wybrane całki oznaczone, wybrane funkcje specjalne, tablice przekształceń Laplace'a oraz tablice probabilistyczne.

Dwa wydania: 1983, 1985

FIZYKA

Jędrzej Jędrzejewski, Witold Kruczek, Adam Kujawski

ZBIÓR ZADAŃ Z FIZYKI DLA KANDYDATÓW NA WYŻSZE UCZELNIE Tom 1 i 2

Książka zawiera zadania ze wszystkich działów fizyki objętych programem szkół średnich. Do części z tych zadań podano szczegółowe rozwiązania, a do wszystkich zadań — odpowiedzi.

Grupy zadań z poszczególnych tematów są poprzedzone krótkimi wprowadzeniami, zawierającymi wskazówki teoretyczne i praktyczne.

W ostatnich dwóch rozdziałach zamieszczono zestaw zadań testowych oraz tematy z egzaminów wstępnych na wyższe uczelnie.

Sześć wydań w latach 1973–1988

Jan Gaj

LABORATORIUM FIZYCZNE W DOMU

Treścią książki są opisy wykonania różnorodnych doświadczeń fizycznych oraz prostych przyrządów, które można zbudować łatwo dostępnymi środkami. Tekst jest podany w formie swobodnej rozmowy z Czytelnikiem. Duży nacisk położono na fizyczną interpretację omawianych eksperymentów.

Książka jest bogato ilustrowana, zawiera też kilka wkładek (krążki barwne, tarcza zegara słonecznego), przeznaczonych do przeprowadzenia doświadczeń przez Czytelników.

Dwa wydania: 1982, 1985

CHEMIA

Kurt Waselowsky

225 DOŚWIADCZEŃ CHEMICZNYCH

Przekład z jęz. niemieckiego

W książce podano niezbędne wiadomości dotyczące urządzenia własnego laboratorium chemicznego, zaproponowano 225 interesujących doświadczeń chemicznych oraz omówiono ich przebieg i wyniki. Liczne rysunki uatrakcyjnią Czytelnikowi lekturę oraz pomogą wykonać doświadczenia.

Rok wydania 1987

Hermann Raaf

CHEMIA CAŁKIEM PROSTA

Przekład z jęz. niemieckiego

W książce opisano przystępnym językiem w sposób żywy i interesujący proste, ciekawe i zabawne doświadczenia chemiczne.

Rok wydania 1986

Irena Liebert-Krach
(wybór i opracowanie)

TABELE CHEMICZNE DLA UCZNIÓW

Przedstawione w zwartej formie tabele danych fizykochemicznych ułatwią naukę i będą pomocne podczas wykonywania doświadczeń laboratoryjnych.

Rok wydania 1988

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

ul. Mazowiecka 2/4, 00-048 Warszawa

tel. 26-72-71 do 79

Dział Upowszechniania i Sprzedaży

tel. 27-56-87

WNT Warszawa 1989. Wyd. XV. Nakład 19800+200 egz. Ark. wyd. 24,6.

Ark. druk. 20,5. Format A5. Papier offset. kl. V, 70 g. Podpisano

do druku w kwietniu 1989 r. Druk ukończono w kwietniu 1989 r.

MF/51032/WNT

Poznańskie Zakłady Graficzne im. M. Kasprzaka. Zam. 72076/88 K-8/141